AiguillesHorloge

November 29, 2020

1 Calculer la distance entre l'aiguille des heures et celle des minutes

Soit l la vitesse de l'aiguille des heures. Alors, comme l'aiguille des minutes, dont la vitesse est notée L, fait un tour complet quand celle de heures ne fait que $\frac{1}{12}$ de tour, on a que $L = 12 \cdot l$.

Nous voulons savoir à quelle moment elles vont se superposer entre, disons, 14h00 et 15h00.

Pour ce faire nous posons que d est la distance en "tics" des minutes de l'horloge. Ce nombre est en même temps une distance et un temps, en minutes.

Fixons l'aiguille des heures à 14h00 (en 2 sur le cadran d'une horloge), et plaçons l'aiguille des minutes à 12h00 (en 12 sur le cadran d'une horloge). Lorsque les deux aiguilles auront parcouru le même temps, elles arriveront à une "distance" d de midi. Seulement, l'aiguille des heures a une petite avance sur celle des minutes. On va avaluer cette distance en avance par rapport à l'aiguille des minutes: c'est exactement la position en minutes qu'elle a sur le cadran. Comme elle est située au départ à 14h00, cela correspond à 10 après midi.

On a donc que les deux aiguilles auront mis $\frac{d}{L}$ pour celle des minutes et $\frac{d-10}{l}$ pour celle des heures. Mais ces deux temps sont identiques. Ainsi, pour connaître à quel moment, entre 14h00 et 15h00 elles vont se croiser, il faut trouver d:

[

$$\begin{aligned}
\frac{d}{L} &= \frac{d-10}{l} \\
\Leftrightarrow \frac{d}{12l} &= \frac{d-10}{l} \\
\Leftrightarrow \frac{d}{12} &= d - 10 \\
\Leftrightarrow d &= \frac{12 \cdot 10}{11}
\end{aligned}$$

]

Et on voit que la distance ne dépend pas de la vitesse de l si on a comme convention que les "tics" du cadran sont une distance et un temps.

Il suffit donc suivre cette procédure, en changeant les valeurs de départ (14h00 et 15h00), puis d'évaluer le nombre de "minutes" qui séparent l'aiguille des heures de midi (d'où part l'aiguille des minutes pour rattraper celle des heures) et de calculer

$$d = \frac{12}{11} \cdot a$$

où a est le nombre de minutes qui séparent l'aiguille des heures de celle des minutes sur le cadran de l'horloge.

2 Un autre cas

A quelle heure l'aiguille des minutes (L) fait un angle de 90° avec l'aiguille des heures (l) ?

On commence par fixer l à 12h00. Puis on compte en arrière, sur le cadran de l'horloge, 15 minutes pour repérer l'endroit où devrait se situer hypothétiquement l'aiguille des heures. Ainsi c'est sur 21h00 que, hypothétiquement, on va situer l'aiguille des heures.

Maintenant on applique la procédure déjà utilisée pour calculer la "distance" (qui est en même temps le temps, en minutes) à laquelle vont se rencontrer les deux aiguilles. Dans la formule

$$d = \frac{12}{11} \cdot 45$$

le 45 est la distance à laquelle on suppose l'aiguille des heures de midi. Pour les besoins du calcul on suppose cette aiguille fixe. On fait alors avancer l'aiguille des minutes depuis 12h00 pour atteindre celle des heures. Comme celle des heures avance aussi, mais plus lentement, le calcu ci-dessus donnera la distance à partir de 12h00 à laquelle l'aiguille des minutes dépasse celle des heures.

Ci-dessous la liste de tous les moments, à partir de 12h00, où les deux aiguilles sont à une distance de 90°:

[93]:
```
for i in range(0,60,5):
    a=45
    # on prend le modulo 60 lorsqu'on dépasse les 60 minutes.
    if (i+a)==60:
        n=60
    else:
        n=(i+a)%60
    hm = 12*n/11
    de = str(int(12+i/5))
    h = str(12+(int(i/5)+1 if (hm)>=60 else int(i/5)))
    aa = str(int(12+i/5+1))
    m = hm - int(hm)
    minutes = str('{:02d}'.format(int(hm)%60))
    secondes = str('{:02d}'.format(int(m*60)))
    print("Entre " + de +"h00 et " + aa + "h00---> "+ h +"h" + minutes + " " +␣
 ↪secondes)
```

```
Entre 12h00 et 13h00---> 12h49 05
Entre 13h00 et 14h00---> 13h54 32
Entre 14h00 et 15h00---> 15h00 00
Entre 15h00 et 16h00---> 16h05 27
```

```
Entre 16h00 et 17h00---> 16h05 27
Entre 17h00 et 18h00---> 17h10 54
Entre 18h00 et 19h00---> 18h16 21
Entre 19h00 et 20h00---> 19h21 49
Entre 20h00 et 21h00---> 20h27 16
Entre 21h00 et 22h00---> 21h32 43
Entre 22h00 et 23h00---> 22h38 10
Entre 23h00 et 24h00---> 23h43 38
```

On peut se demander maintenant, à quel moment ces aiguilles là sont séparées d'un angle de 180° ?

En reprenant l'idée précédente, on constate que la séparation entre les aiguilles doit être de 30 minutes, donc pour midi on a la première formule

$$d = \frac{12}{11} \cdot 30$$

pour le moment entre $13h00$ et 14h00 on a

$$d = \frac{12}{11} \cdot 35$$

[96]:

```
for i in range(0,60,5):
    a=30
    # on prend le modulo 60 lorsqu'on dépasse les 60 minutes.
    if (i+a)==60:
        n=60
    else:
        n=(i+a)%60
    hm = 12*n/11
    de = str(int(12+i/5))
    h = str(12+(int(i/5)+1 if (hm)>=60 else int(i/5)))
    aa = str(int(12+i/5+1))
    m = hm - int(hm)
    minutes = str('{:02d}'.format(int(hm)%60))
    secondes = str('{:02d}'.format(int(m*60)))
    print("Entre " + de +"h00 et " + aa + "h00---> "+ h +"h" + minutes + " " +␣
 ↪secondes)
```

```
Entre 12h00 et 13h00---> 12h32 43
Entre 13h00 et 14h00---> 13h38 10
Entre 14h00 et 15h00---> 14h43 38
Entre 15h00 et 16h00---> 15h49 05
Entre 16h00 et 17h00---> 16h54 32
Entre 17h00 et 18h00---> 18h00 00
Entre 18h00 et 19h00---> 19h05 27
Entre 19h00 et 20h00---> 19h05 27
Entre 20h00 et 21h00---> 20h10 54
```

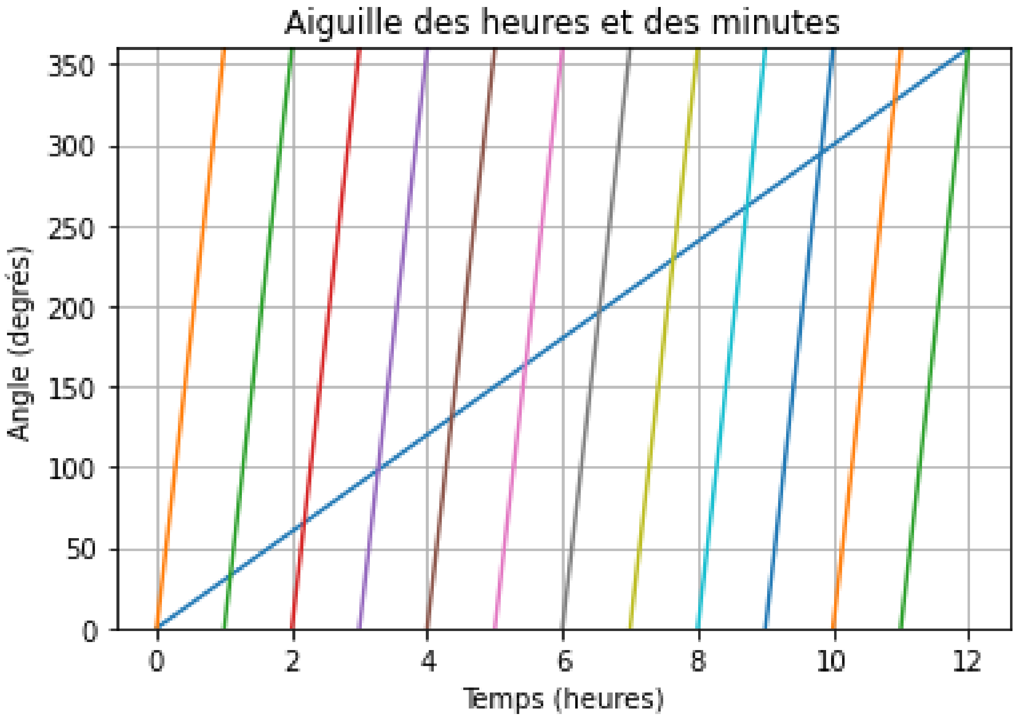
```
Entre 21h00 et 22h00---> 21h16 21
Entre 22h00 et 23h00---> 22h21 49
Entre 23h00 et 24h00---> 23h27 16
```

Et il y a aussi le cas où les deux aiguilles sont séparées de 270°, dans ce cas on remplace "a" par 15:

[97]:
```
for i in range(0,60,5):
    a=15
    # on prend le modulo 60 lorsqu'on dépasse les 60 minutes.
    if (i+a)==60:
        n=60
    else:
        n=(i+a)%60
    hm = 12*n/11
    de = str(int(12+i/5))
    h = str(12+(int(i/5)+1 if (hm)>=60 else int(i/5)))
    aa = str(int(12+i/5+1))
    m = hm - int(hm)
    minutes = str('{:02d}'.format(int(hm)%60))
    secondes = str('{:02d}'.format(int(m*60)))
    print("Entre " + de +"h00 et " + aa + "h00---> "+ h +"h" + minutes + " " +␣
 ↪secondes)
```

```
Entre 12h00 et 13h00---> 12h16 21
Entre 13h00 et 14h00---> 13h21 49
Entre 14h00 et 15h00---> 14h27 16
Entre 15h00 et 16h00---> 15h32 43
Entre 16h00 et 17h00---> 16h38 10
Entre 17h00 et 18h00---> 17h43 38
Entre 18h00 et 19h00---> 18h49 05
Entre 19h00 et 20h00---> 19h54 32
Entre 20h00 et 21h00---> 21h00 00
Entre 21h00 et 22h00---> 22h05 27
Entre 22h00 et 23h00---> 22h05 27
Entre 23h00 et 24h00---> 23h10 54
```

[98]:
```
%matplotlib inline
from matplotlib.pylab import *
x=linspace(0,12,12)
plot(x,30*x)
ylim(0,360)
grid(True)
title('Aiguille des heures et des minutes')
xlabel('Temps (heures)')
ylabel('Angle (degrés)')
for i in range (0,12):
    plot(x,360*(x-i))
```

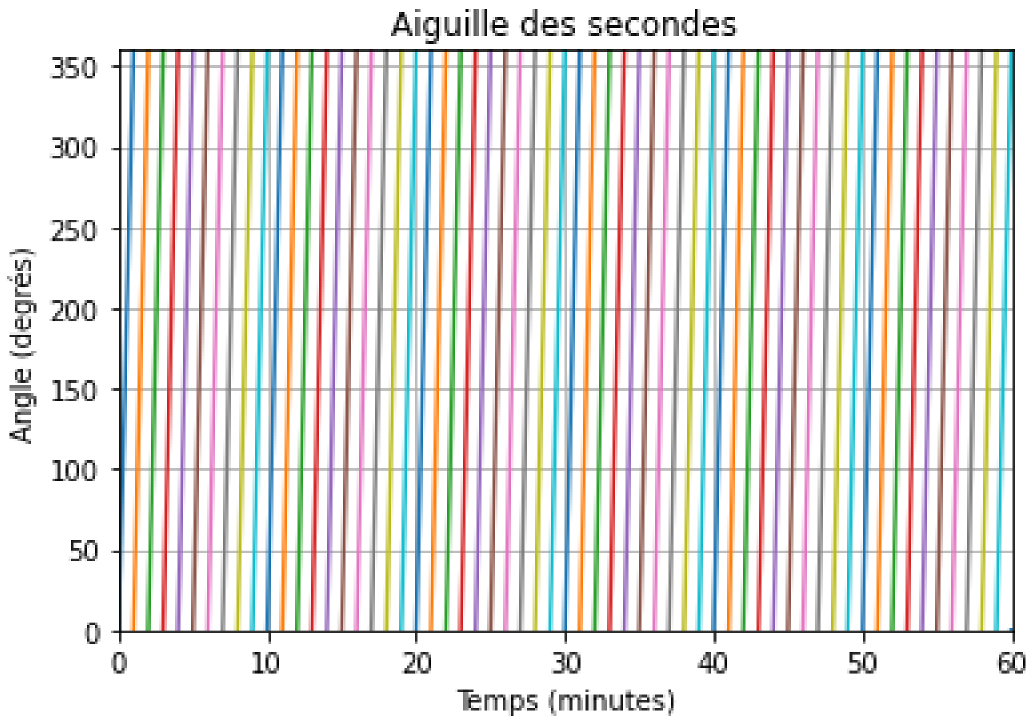


Dans le graphique ci-dessus, on voit le graphique de la position angulaire de l'aiguille des heures et de celle des minutes, entre 12h00 et 24h00.

On constate que les deux aiguilles se superposent exactement onze fois, sans compter la superposition de départ, dans cet intervalle de temps.

On peut aussi représenter la position angulaire de l'aiguille des secondes. Mais on ne voit assez rapidement pas grand chose:

[59]:
```
%matplotlib inline
from matplotlib.pylab import *
x=linspace(0,60)
#plot(x,30*x)
ylim(0,360)
xlim(0,60)
grid(True)
title('Aiguille des secondes')
xlabel('Temps (minutes)')
ylabel('Angle (degrés)')
for i in range (0,61):
    plot(x,360*(x-i))
#plot(x,360*(x-59))
```



Si l'on superpose les deux graphiques, on s'aperçoit qu'il n'y a que deux (en fait un seul) endroit où les trois aiguilles se rencontrent, c'est à midi et à minuit.

3 Challenge

Imaginez une montre en forme de cube, dont chacun de ses trois plan horizontaux tourne à la vitesse de chacune des trois aiguilles d'une horloge classique, à savoir, l'aiguille des heures, celle des minutes et celle des secondes.

3.1 La question est la suivante

Si à l'heure de midi, le cube est parfaitement constitué, à quelle heure redeviendra-t-il un cube à nouveau ?

Pour répondre à la question, il suffit de se demander à quelle moment deux des trois aiguilles sont à 90°, 180° ou, pour être exhaustif, à 270°.

La liste ci-dessous nous donne la réponse à cette question.

Cependant, comme nous avons la position des deux aiguilles évaluée à la seconde près, il est aisé de voir que lorsque la plus lente, celle des heures, est à angle droit ou à un angle plat de distance de celle des minutes, il n'y a pas trop le choix pour celle des secondes, elle doit forcément être positionnée à midi. En effet, si tel n'était pas le cas, alors les deux autres aiguilles ne donneraient pas l'heure qu'elle donnent.

[92]:
```python
lL = []
# On commence à midi (12:00) avec un angle de 90 degrés, puis 180, puis 270.
for i in range(0,60,5):
    #distance en minutes entre l'aiguille des minutes et celle des heures
    # à sa position fixe supposée (c'est-à-dire 15 minutes avant 12:00, pour␣
 ↪faire
    # un angle de 90 degrés entre les deux).
    d=45
    ang = str('{:3d}'.format(int(360-(d*6))))
    # on prend le modulo 60 lorsqu'on dépasse les 60 minutes.
    if (i+d)==60:
        n=60
    else:
        n=(i+d)%60
    hm = 12*n/11
    hmbrut = str('{:03.6f}'.format(hm))
    h = str(12+(int(i/5)+1 if (hm)>=60 else int(i/5)))
    #
    lL.append((ang, hmbrut,str(i), h))

    d = d - 15
    ang = str('{:3d}'.format(int(360-(d*6))))
    if (i+d)==60:
        n=60
    else:
        n=(i+d)%60
    hm = 12*n/11
    hmbrut = str('{:03.6f}'.format(hm))
    h = str(12+(int(i/5)+1 if (hm)>=60 else int(i/5)))
    #
    lL.append((ang, hmbrut,str(i), h))

    d = d - 15
    ang = str('{:3d}'.format(int(360-(d*6))))
    if (i+d)==60:
        n=60
    else:
        n=(i+d)%60
    hm = 12*n/11
    hmbrut = str('{:03.6f}'.format(hm))
    h = str(12+(int(i/5)+1 if (hm)>=60 else int(i/5)))
    #
    lL.append((ang, hmbrut,str(i), h))


print("Positionnement des aiguilles des heures (l) et des minutes (L).")
print("La liste montre le tuple dont la signification est la suivante:")
```

```python
print('\n(angle, minutes secondes entre elles, indice, heure)')
print("\n")
for i in lL:
    print (' '+str(i))
```

```
Positionnement des aiguilles des heures (l) et des minutes (L).
La liste montre le tuple dont la signification est la suivante:

(angle, minutes entre elles, indice, heure)


 (' 90', '49.090909', '0', '12')
 ('180', '32.727273', '0', '12')
 ('270', '16.363636', '0', '12')
 (' 90', '54.545455', '5', '13')
 ('180', '38.181818', '5', '13')
 ('270', '21.818182', '5', '13')
 (' 90', '60.000000', '10', '15')
 ('180', '43.636364', '10', '14')
 ('270', '27.272727', '10', '14')
 (' 90', '65.454545', '15', '16')
 ('180', '49.090909', '15', '15')
 ('270', '32.727273', '15', '15')
 (' 90', '5.454545', '20', '16')
 ('180', '54.545455', '20', '16')
 ('270', '38.181818', '20', '16')
 (' 90', '10.909091', '25', '17')
 ('180', '60.000000', '25', '18')
 ('270', '43.636364', '25', '17')
 (' 90', '16.363636', '30', '18')
 ('180', '65.454545', '30', '19')
 ('270', '49.090909', '30', '18')
 (' 90', '21.818182', '35', '19')
 ('180', '5.454545', '35', '19')
 ('270', '54.545455', '35', '19')
 (' 90', '27.272727', '40', '20')
 ('180', '10.909091', '40', '20')
 ('270', '60.000000', '40', '21')
 (' 90', '32.727273', '45', '21')
 ('180', '16.363636', '45', '21')
 ('270', '65.454545', '45', '22')
 (' 90', '38.181818', '50', '22')
 ('180', '21.818182', '50', '22')
 ('270', '5.454545', '50', '22')
 (' 90', '43.636364', '55', '23')
 ('180', '27.272727', '55', '23')
```

```
('270', '10.909091', '55', '23')
```

```
[ ]:
```