
Mathématiques

Collège de Genève

MA1 / MA2 — Première année

Table des matières

1	Des nombres	7
1.1	Chiffres et nombres	7
1.2	Les ensembles de nombres	8
1.3	Ordre des opérations et parenthèses	9
1.4	Multiples, diviseurs et division euclidienne	9
1.5	Fractions	10
1.6	Nombres rationnels — écriture décimale	10
1.7	Puissances	11
1.8	Racines carrées	11
1.9	Droite réelle et valeur absolue	12
1.10	Irrationalité	13
1.11	Exercices	13
1.12	Résumé du chapitre	21
1.13	QCM — Des nombres	23
1.14	Corrigés	25
2	Théorie des ensembles	33
2.1	Vocabulaire et notations	34
2.2	Opérations sur les ensembles	35
2.3	Diagrammes de Venn	36
2.4	Intervalles réels	36
2.5	Exercices	37
2.6	Résumé du chapitre	45
2.7	QCM — Théorie des ensembles	47
2.8	Corrigés	49
3	Argumenter et démontrer	53
3.1	Propositions et connecteurs logiques	53
3.2	Implication et équivalence	54
3.3	Quantificateurs	55
3.4	Modes de raisonnement	55
3.5	Exercices	56
3.6	Résumé du chapitre	61
3.7	QCM — Argumenter et démontrer	63
3.8	Corrigés	65

4	Introduction aux fonctions	71
4.1	Définition et vocabulaire	71
4.2	Domaine de définition	72
4.3	Représentation graphique	72
4.4	Monotonie	72
4.5	Extrema	73
4.6	Ordonnée à l'origine, zéros, tableau de signes	73
4.7	Quelques fonctions élémentaires	74
4.8	Image et préimage	74
4.9	Variation directe et inverse	75
4.10	Exercices	76
4.11	Résumé du chapitre	81
4.12	QCM — Introduction aux fonctions	83
4.13	Corrigés	85
5	Fonctions affines et linéaires	89
5.1	Résoudre une équation du premier degré	90
5.2	Fonction linéaire	91
5.3	Fonction constante	91
5.4	Fonction affine	91
5.5	Équation d'une droite	92
5.6	Systèmes d'équations linéaires	92
5.7	Exercices	95
5.8	Résumé du chapitre	99
5.9	QCM — Fonctions affines et linéaires	101
5.10	Corrigés	105
6	Calcul littéral	109
6.1	Expressions algébriques	109
6.2	Développement	110
6.3	Factorisation	111
6.4	Fractions algébriques	112
6.5	Exercices	113
6.6	Résumé du chapitre	117
6.7	QCM — Calcul littéral	119
6.8	Corrigés	123
7	Fonctions du second degré	127
7.1	Forme développée	128
7.2	Forme canonique	128
7.3	Discriminant et racines	129
7.4	Forme factorisée	130
7.5	Signe du trinôme	130
7.6	Représenter graphiquement une parabole	130
7.7	Résoudre un problème d'optimisation	131
7.8	Déterminer l'expression d'une parabole à partir d'un graphique	131
7.9	Intersections de deux courbes	131
7.10	Exercices	132
7.11	Résumé du chapitre	135

7.12	QCM — Fonctions du second degré	137
7.13	Corrigés	141
8	Pythagore et Thalès	145
8.1	Rappels : angles et droites parallèles	146
8.2	Sommes d'angles dans les polygones	146
8.3	Théorème de Pythagore	147
8.4	Théorème de Thalès	148
8.5	Triangles semblables	148
8.6	Exercices	149
8.7	Résumé du chapitre	153
8.8	QCM — Pythagore et Thalès	155
8.9	Corrigés	159
9	Cercles et angles inscrits	163
9.1	Vocabulaire du cercle	164
9.2	Périmètre, aire, arcs et secteurs	164
9.3	Angle au centre et angle inscrit	165
9.4	Angle dans un demi-cercle	165
9.5	Quadrilatère inscrit	166
9.6	Puissance d'un point	166
9.7	Exercices	167
9.8	Résumé du chapitre	171
9.9	QCM — Cercles et angles inscrits	173
9.10	Corrigés	177
10	Trigonométrie dans le triangle rectangle	181
10.1	Les rapports trigonométriques	182
10.2	Angles remarquables	182
10.3	Relations fondamentales	183
10.4	Résolution de triangles rectangles	183
10.5	Exercices	184
10.6	Résumé du chapitre	187
10.7	QCM — Trigonométrie dans le triangle rectangle	189
10.8	Corrigés	193

Chapitre 1

Des nombres

Avant d'écrire, on comptait. Des os taillés retrouvés en Afrique centrale — le fameux os d'Ishango, vieux de vingt mille ans — portent des encoches groupées par séries. Personne ne sait exactement ce qu'elles signifiaient : des lunes, des proies, des jours. Mais quelqu'un, là, avait besoin de garder une trace. Besoin de nombres. La question n'était pas encore qu'est-ce qu'un nombre ? — elle était : combien ? C'est encore souvent notre première question.

Et pourtant, entre les entiers que l'on grave sur un os et les irrationnels qu'Hippasos de Métaponte paya de sa vie pour avoir révélés, il y a un gouffre.

Un gouffre que ce chapitre se propose de traverser, pas à pas.¹



1.1 Chiffres et nombres

Définition 1.1 — chiffres et nombres.

Les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont les **chiffres**, avec lesquels on construit les **nombres**. Notre système de numération est **positionnel en base 10** : la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans le nombre.

Exemple 1.1. $2435,78 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$.

¹**Les faits** : L'os d'Ishango (RDC), env. 20 000 ans, découvert en 1950 (parfois daté 1960 selon les sources) par le géologue belge Jean de Heinzelin de Braucourt, conservé à l'Institut royal des sciences naturelles de Belgique, Bruxelles. La légende : La mort d'Hippasos de Métaponte pour avoir révélé les irrationnels est une légende antique dont l'historicité est très débattue ; les sources anciennes elles-mêmes divergent.

Remarque 1.1. D'autres bases sont possibles : la base 2 (binaire) est fondamentale en informatique, la base 60 (sexagésimale) nous vient des Babyloniens et survit dans nos secondes et nos degrés d'angle.

1.2 Les ensembles de nombres

Les mathématiques organisent les nombres en familles emboîtées, chacune plus riche que la précédente.

Définition 1.2 — entiers naturels.

L'ensemble des **entiers naturels** est

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Il sert à compter et à ordonner.

Définition 1.3 — entiers relatifs.

L'ensemble des **entiers relatifs** est

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Il étend $\mathbb{N}$ en ajoutant les **opposés** : à chaque $n \in \mathbb{N}$ correspond $-n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.2. Vocabulaire des opérations. La **somme** est le résultat d'une addition ; la **différence**, d'une soustraction ; le **produit**, d'une multiplication ; le **quotient**, d'une division.

Définition 1.4 — nombres rationnels.

L'ensemble des **nombres rationnels** est

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Ce sont exactement les nombres dont le développement décimal est **fini** ou **périodique**.

Exemple 1.2. $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ est rationnel (période : 3). $\frac{7}{4} = 1,75$ est rationnel (développement fini). $2,\overline{34} = 2,343434\dots$ est rationnel (période : 34).

Définition 1.5 — nombres réels.

L'ensemble des **nombres réels** $\mathbb{R}$ contient tous les rationnels et tous les **irrationnels** — les nombres dont le développement décimal est infini et *non* périodique.

Exemple 1.3. $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ et $\pi = 3,14159265\dots$ sont irrationnels.

On a les inclusions strictes :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Entre deux réels distincts $a < b$, il existe toujours un rationnel r tel que $a < r < b$. Pourtant $\mathbb{Q}$ est « beaucoup plus petit » que $\mathbb{R}$ au sens de Cantor : $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Ce paradoxe — les rationnels sont partout, mais les réels sont infiniment plus nombreux — est l'une des grandes surprises de l'analyse.

1.3 Ordre des opérations et parenthèses

Proposition 1.6 — *ordre des opérations.*

Pour calculer une expression, on effectue les opérations dans l'ordre suivant :

1. les opérations **entre parenthèses** (les plus imbriquées d'abord);
2. les **puissances** (et racines);
3. les **multiplications et divisions**, de gauche à droite;
4. les **additions et soustractions**, de gauche à droite.

Exemple 1.4. Calculer $7 - 2 \cdot 3 + 6$: on effectue d'abord $2 \cdot 3 = 6$, puis $7 - 6 + 6 = 7$.

Calculer $-14 - (2 - 4 - (6 - 3) + (4 - 3 - (1 + 2 - (-6 + 2) - 1) - 7) + 3)$: on traite les parenthèses les plus imbriquées en premier ; le résultat est 0.

1.4 Multiples, diviseurs et division euclidienne

Définition 1.7 — *divisibilité.*

Si $a = b \cdot k$ pour un certain entier k , on dit que a est un **multiple** de b , ou que b **divise** a , ou que b est un **diviseur** de a .

- Le **pgcd** de deux entiers est leur Plus Grand Diviseur Commun.
- Le **ppcm** de deux entiers est leur Plus Petit Multiple Commun.
- Un entier ≥ 2 est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
- Deux entiers sont **premiers entre eux** si leur pgcd vaut 1.

Définition 1.8 — *division euclidienne.*

Effectuer la **division euclidienne** de a par b ($b > 0$), c'est trouver q (quotient) et r (reste) tels que :

$$a = q \cdot b + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Exemple 1.5. Division euclidienne de 183 par 12 : $183 = 15 \cdot 12 + 3$. Quotient : 15 ; reste : 3.

1.5 Fractions

Définition 1.9 — *fraction*.

Une **fraction** est un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ (numérateur) et $q \in \mathbb{Z}^*$ (dénominateur). Elle est **irréductible** si $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si $ad = bc$.

Proposition 1.10 — *opérations sur les fractions*.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (\text{réduire au même dénominateur})$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (\text{multiplier numérateurs et dénominateurs})$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad (\text{diviser} = \text{multiplier par l'inverse})$$

L'**inverse** de $\frac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$) est $\frac{b}{a}$.

Exemple 1.6. $\frac{3}{4} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} + \frac{5}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$.

$$\frac{8}{60} \cdot \frac{18}{32} = \frac{2}{15} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{40}.$$

1.6 Nombres rationnels — écriture décimale

Théorème 1.11 — *caractérisation des rationnels*.

Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est **fini ou infini périodique**.

Exemple 1.7. Fraction vers décimale. $\frac{17}{6} = 2,8\overline{3}$ (on divise jusqu'à retrouver un reste déjà obtenu).

Décimale vers fraction. Écrire $x = 2,3\overline{4}$ comme fraction : $100x = 234,3\overline{4}$, donc $100x - x = 232$, soit $x = \frac{232}{99}$.

1.7 Puissances

Définition 1.12 — puissance.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ facteurs}}$. De plus : $a^0 = 1$ (pour $a \neq 0$) et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (pour $a \neq 0$).

Théorème 1.13 — propriétés des puissances.

Pour $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Attention : en général $(a + b)^n \neq a^n + b^n$.

Exemple 1.8. $\frac{14^3 \cdot 9^4}{42^3 \cdot 9^2} = \frac{14^3}{42^3} \cdot 9^{4-2} = \left(\frac{14}{42}\right)^3 \cdot 81 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 81 = \frac{81}{27} = 3.$

Définition 1.14 — notation scientifique.

Un nombre $x \neq 0$ est en **notation scientifique** lorsqu'il s'écrit $x = a \cdot 10^n$, avec $1 \leq |a| < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$. Le nombre a est appelé la **mantisse**.

Exemple 1.9. $6430 = 6,43 \cdot 10^3$. $-0,00370 = -3,70 \cdot 10^{-3}$.

Pyramides de puissances. On interprète x^{y^z} comme $x^{(y^z)}$ (de haut en bas). Exemple : $2^{4^2} = 2^{(4^2)} = 2^{16} = 65536$, et non $(2^4)^2 = 16^2 = 256$.

Estimer de grands nombres. On utilise souvent l'approximation $2^{10} \approx 10^3$. Exemple : $2^{2010} = (2^{10})^{201} \approx (10^3)^{201} = 10^{603}$.

1.8 Racines carrées

Définition 1.15 — racine carrée.

La **racine carrée** d'un réel $a \geq 0$ est l'unique réel $b \geq 0$ tel que $b^2 = a$. On note $b = \sqrt{a}$.

Attention : $\sqrt{16} = 4$ (pas ± 4 !). $\sqrt{-16}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.16 — propriétés des racines carrées.

Pour $a, b \geq 0$ et $b \neq 0$:

$$\sqrt{a^2} = a, \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exemple 1.10. Simplifier $\sqrt{32} : \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

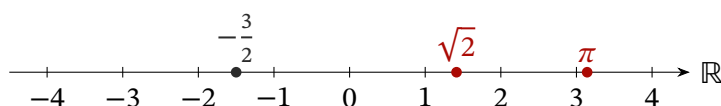
Rationaliser $\frac{9}{\sqrt{27}} : \frac{9}{\sqrt{27}} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Conjugué : rationaliser $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Réduire : $2\sqrt{72} - 7\sqrt{18} = 12\sqrt{2} - 21\sqrt{2} = -9\sqrt{2}$.

1.9 Droite réelle et valeur absolue**Définition 1.17 — droite réelle.**

Chaque réel correspond à un point sur une droite orientée, la **droite réelle**. Les rationnels et irrationnels y sont « mélangés » de façon dense.

**Définition 1.18 — valeur absolue.**

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ est la **distance** entre x et 0 ; $|x - a|$ est la distance entre x et a .

Proposition 1.19 — inégalité triangulaire.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Exemple 1.11. Résoudre $|x - 3| < 2$: $-2 < x - 3 < 2 \Rightarrow x \in (1, 5)$.

Résoudre $|2x + 1| > 3$: $2x + 1 > 3$ ou $2x + 1 < -3$, soit $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

1.10 Irrationalité

Théorème 1.20 — irrationalité de $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exemple 1.12. $0,\bar{9} = 1$? Oui : posons $x = 0,\bar{9}$, alors $10x = 9,\bar{9}$, donc $10x - x = 9$, soit $x = 1$.

1.11 Exercices

Exercice 1.1. Calculer :

$$-(-7) + (-8 - (7 - 11) - 3(2 - 3 \cdot 5 - (4 \cdot (-2) - (-5) \cdot (-2)))) - 7$$

Exercice 1.2. Calculer, en respectant l'ordre des opérations :

- a) $15 + 4 \cdot 3$
- b) $8 \cdot 2 - 18 : 6$
- c) $20 : 4 + 3|2 - 6|$
- d) $2 \cdot 5^2 - 3 + (7 - 4)$

Exercice 1.3. Évaluer chaque expression pour $a = -3$, $b = 4$ et $c = -2$:

- a) $2a + 5b$
- b) $\frac{b - 2c}{a + 1}$
- c) $-a^2 + b \cdot c$

Exercice 1.4. [MA2] Simplifier :

$$\frac{5 + (-2)^3 \cdot 2}{\sqrt{9} - 1} - |-6 + 2|$$

Exercice 1.5. Placer les parenthèses pour que les égalités soient vraies :

- a) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 16$
- b) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 41$
- c) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 28$

d) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 4$

Exercice 1.6. Classifier chaque nombre dans le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) :

$$-7, \quad \frac{22}{7}, \quad \sqrt{9}, \quad \sqrt{3}, \quad 0,\overline{142857}, \quad \pi - 3.$$

Exercice 1.7. Pour chacun des nombres suivants, indiquer **tous** les ensembles ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) auxquels il appartient :

$$-8, \quad \sqrt{5}, \quad 0, \quad \frac{3}{4}, \quad \sqrt{16}, \quad 5, \quad \frac{13}{2}.$$

Exercice 1.8. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

- a) Tout entier naturel est un entier relatif.
- b) Tout nombre rationnel est un entier.
- c) Tout entier relatif est un nombre rationnel.
- d) La racine carrée d'un entier est toujours irrationnelle.
- e) La somme de deux nombres irrationnels est toujours irrationnelle.

Exercice 1.9. Donner, si c'est possible, un exemple de nombre :

- a) appartenant à $\mathbb{Z}$ mais pas à $\mathbb{N}$;
- b) appartenant à $\mathbb{Q}$ mais pas à $\mathbb{Z}$;
- c) appartenant à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$;
- d) appartenant à $\mathbb{N}$ mais pas à $\mathbb{Z}$ (justifier si c'est impossible);
- e) dont le carré est un entier naturel, sans que le nombre lui-même soit un entier.

Exercice 1.10. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne :

- a) 63 par 4
- b) 218 par 12
- c) 3245 par 135
- d) 32 par 50

Exercice 1.11. Mêmes consignes :

- a) 97 par 6
- b) 305 par 15
- c) 4321 par 27

Exercice 1.12. Parmi les nombres 12, 30, 27, 246, 325, 4238, indiquer ceux qui sont divisibles par 2, par 3, par 5.

Exercice 1.13. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. On veut former des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons, en utilisant tous les élèves.

- a) Quel est le nombre maximal d'équipes ?
- b) Combien de filles et de garçons dans chaque équipe ?

Exercice 1.14. Calculer le pgcd et le ppcm de chaque paire d'entiers :

- a) 36 et 60
- b) 84 et 126
- c) 17 et 45

Exercice 1.15. Deux bus partent en même temps d'un arrêt. Le premier y repasse toutes les 24 minutes, le second toutes les 40 minutes.

- a) Après combien de temps repartiront-ils ensemble pour la première fois ?
- b) Combien de fois cela se reproduira-t-il durant une journée de service de 12 heures ?

Exercice 1.16. Calculer à la main et donner le résultat sous forme irréductible :

- a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{12}$
- b) $\frac{5}{21} + \frac{12}{15}$
- c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} - \frac{5}{6}$
- d) $\frac{120}{49} \cdot \frac{56}{144}$
- e) $\frac{25}{36} \div \frac{5}{16}$

Exercice 1.17. Mêmes consignes :

- a) $\frac{7}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$

b) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) \div \frac{7}{10}$

Exercice 1.18. Un réservoir est rempli aux $\frac{2}{3}$ de sa capacité. On en retire ensuite $\frac{1}{4}$ du contenu actuel. Quelle fraction de la capacité totale reste-t-il dans le réservoir ?

Exercice 1.19. Rendre irréductibles :

a) $\frac{216}{720}$

b) $\frac{1122}{1496}$

c) $\frac{1826688}{829280}$

Exercice 1.20. Écrire sous forme décimale :

a) $\frac{1}{45}$

b) $\frac{2}{9}$

c) $\frac{31}{7}$

d) $\frac{200}{17}$

Exercice 1.21. Écrire sous forme décimale (préciser la période le cas échéant) :

a) $\frac{5}{6}$

b) $\frac{7}{11}$

c) $\frac{11}{8}$

Exercice 1.22. Écrire comme fraction irréductible :

a) 0,375

b) $1,\bar{2}$

c) $2,\overline{34}$

d) $-1,234\overline{343}$

Exercice 1.23. [MA2] Écrire $x = 0,58\overline{3}$ comme fraction irréductible.

Indication : ici la partie qui se répète ne commence pas juste après la virgule — il faut multiplier par deux puissances de 10 différentes.

Exercice 1.24. Simplifier en donnant un résultat sans exposants négatifs ($a, b \in \mathbb{R}^*$) :

a) $\frac{14^3 \cdot 9^4}{42^3 \cdot 9^2}$

b) $\frac{(5a^3)^4 \cdot (b^4)^5}{(25(ab)^4)^2 \cdot (b^2)^6 \cdot a^4}$

c) $\frac{(b^3)^{-4} \cdot (a^{-1}b^2)^5}{(b^2b^3)^{-2}(b^6)^2} \cdot a^4$

Exercice 1.25. Simplifier ($a \neq 0$) :

a) $\frac{2^5 \cdot 2^3}{2^6}$

b) $(3^2)^3 \div 3^4$

c) $\frac{(2a)^3 \cdot a^2}{4a^4}$

Exercice 1.26. Sans calculatrice, dire si chaque égalité est vraie ou fausse. Si elle est fausse, donner la valeur correcte.

a) $2^{-3} = -8$

b) $5^0 = 0$

c) $(-2)^4 = -16$

d) $-2^4 = -16$

Exercice 1.27. Écrire en notation scientifique :

a) 7283

b) 0,00149

c) $0,67 \cdot 10^2$

d) $159 \cdot 10^{-5}$

Exercice 1.28. Un globule rouge mesure environ $7 \cdot 10^{-6}$ m de diamètre. Combien de globules rouges, alignés côte à côte, faudrait-il pour couvrir une distance de 1 cm ?

Exercice 1.29. [MA2] Quel est le plus grand nombre : 2^{400} ou 10^{100} ?

Exercice 1.30. Simplifier (résultat sous forme $a\sqrt{b}$, b le plus petit possible) :

- a) $\sqrt{32}$
- b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$
- c) $2\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$
- d) $\sqrt{12} + \sqrt{3} - 2\sqrt{9} + (\sqrt{3})^3$

Exercice 1.31. Mêmes consignes :

- a) $\sqrt{50}$
- b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$
- c) $3\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{2}$

Exercice 1.32. Rationaliser le dénominateur :

- a) $\frac{-9}{\sqrt{27}}$
- b) $\frac{-4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$
- c) $\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{4}}$

Exercice 1.33. Mêmes consignes :

- a) $\frac{6}{\sqrt{2}}$
- b) $\frac{3}{\sqrt{7} - 2}$

Exercice 1.34. [MA2] Simplifier :

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2})^4$$

Exercice 1.35. Écrire en notation d'intervalle et représenter sur une droite graduée :

- a) $\{x \mid x > -3\}$
- b) $\{x \mid x \leq 5\}$
- c) $\{x \mid -2 < x \leq 4\}$

Exercice 1.36. Calculer la distance entre chaque paire de points sur la droite réelle :

- a) 8 et -5
- b) -3 et -11
- c) x et y , où $x < y$ (exprimer le résultat en fonction de x et y)

Exercice 1.37. Résoudre et représenter sur la droite réelle :

- a) $-1 \leq 2x + 3 < 7$
- b) $|x - 1| \leq 4$
- c) $|2x + 1| > 3$

Exercice 1.38. [MA2] Résoudre :

- a) $|3x - 2| = 7$
- b) $|x + 4| \leq -1$ (bien justifier la réponse)
- c) $2|x - 1| - 3 > 5$

Exercice 1.39. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Indication : supposer $\sqrt{2} = p/q$ irréductible et chercher une contradiction.

Exercice 1.40. Déterminer lesquelles des expressions suivantes sont rationnelles une fois évaluées :

$$\pi - \pi, \quad 3 \cdot \sqrt{2}, \quad 1 + 5,5, \quad \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{5}{20}}, \quad \frac{\pi}{5}, \quad 2^0, \quad 1024, \quad \sqrt{\frac{50}{2}}.$$

Exercice 1.41. En s'inspirant de la démonstration vue en cours pour $\sqrt{2}$, démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 1.42. Montrer que $0,4\overline{9} = 0,5$.

Exercice 1.43. La distance Terre-Soleil est $1,496 \cdot 10^8$ km. La vitesse de la lumière est $3 \cdot 10^5$ km/s. En combien de minutes la lumière parcourt-elle cette distance ?

Exercice 1.44. Problème. On note $n!$ (lire « n factorielle ») le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

- a) Quels sont les trois derniers chiffres de $17!$?
- b) Par combien de zéros $627!$ se termine-t-il ?

Exercice 1.45. L'échiquier de Sessa. Un sage demande comme récompense 1 grain de blé pour la première case d'un échiquier, 2 pour la deuxième, 4 pour la troisième, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^e case.

- a) Quelle est la somme totale de grains? (*Utiliser $2^{10} \approx 10^3$.*)
- b) Un grain de blé pèse environ 50 mg. Comparer cette masse à celle de la Terre ($5,97 \cdot 10^{24}$ kg).

Exercice 1.46. Convertir :

- a) $(1011)_2$ en base 10.
- b) 25 (base 10) en base 2.
- c) $(101)_5$ en base 10.

Exercice 1.47. [MA2] Convertir $(10110)_2$ en base 10, puis convertir 47 en base 2.

Exercice 1.48. [MA2] Convertir $(1101101)_2$ en base 10, puis convertir 500 en base 2.

1.12 Résumé du chapitre

Ensembles de nombres

- $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}$ = fractions = décimales finies ou périodiques
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = irrationnels ($\sqrt{2}, \pi, \dots$)

Ordre des opérations

1. Parenthèses (les plus imbriquées d'abord)
2. Puissances et racines
3. $\times$ et $\div$ (de gauche à droite)
4. $+$ et $-$ (de gauche à droite)

Division euclidienne

$$a = q \cdot b + r, \quad 0 \leq r < b$$

- pgcd, ppcm, nombres premiers, premiers entre eux

Fractions

- Irréductible : $\text{pgcd}(p, q) = 1$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
- Décimale périodique $\leftrightarrow$ fraction

Puissances

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Notation scientifique : $a \cdot 10^n, 1 \leq |a| < 10$

Racines carrées

- $\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- Simplifier : extraire les facteurs carrés
- Rationaliser : multiplier par le conjugué
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général

Valeur absolue

- $|x|$ = distance de x à 0
 - $|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$
 - Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$
-

1.13 QCM — Des nombres

Une seule réponse correcte par question.

1. $\sqrt{2}$ appartient à :

- a) $\mathbb{N}$
- b) $\mathbb{Q}$
- c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- d) $\mathbb{Z}$

2. Le résultat de $3 + 2 \cdot 4^2 - 1$ est :

- a) 100
- b) 34
- c) 200
- d) 63

3. Le reste de la division euclidienne de 100 par 7 est :

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 14

4. $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ vaut :

- a) $\frac{4}{10}$
- b) $\frac{11}{12}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{5}{12}$

5. $0,\overline{3}$ est égal à :

- a) $\frac{3}{10}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{3}{9}$
- d) $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{9}$

6. $2^3 \cdot 2^4$ vaut :

- a) 2^{12}

- b) 4^7
- c) 2^7
- d) 2^1

7. L'écriture scientifique de 0,00307 est :

- a) $3,07 \cdot 10^{-3}$
- b) $3,07 \cdot 10^3$
- c) $30,7 \cdot 10^{-4}$
- d) $0,307 \cdot 10^{-2}$

8. $\sqrt{50}$ simplifiée vaut :

- a) $5\sqrt{2}$
- b) $2\sqrt{5}$
- c) $25\sqrt{2}$
- d) $10\sqrt{5}$

9. $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ avec dénominateur rationnel vaut :

- a) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$
- b) $2(\sqrt{3}+1)$
- c) $2(\sqrt{3}-1)$
- d) $4(\sqrt{3}+1)$

10. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ signifie que :

- a) $\sqrt{2}$ est négatif
- b) $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction
- c) $\sqrt{2}$ n'existe pas
- d) $\sqrt{2}$ est plus grand que 2

11. $\text{pgcd}(12, 18)$ vaut :

- a) 3
- b) 6
- c) 9
- d) 36

12. La solution de $|x-2| \leq 3$ est :

- a) $x \in (-1, 5)$
- b) $x \in [-1, 5]$
- c) $x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$
- d) $x \in [-3, 3]$

Réponses : 1-c 2-b 3-b 4-b 5-d 6-c 7-a 8-a 9-b 10-b 11-b 12-b

1.14 Corrigés

Solution 1.1.

On calcule de l'intérieur vers l'extérieur. D'abord $4 \cdot (-2) - (-5) \cdot (-2) = -8 - 10 = -18$. Puis $2 - 3 \cdot 5 - (-18) = 2 - 15 + 18 = 5$. Puis $7 - 11 = -4$. Puis $-8 - (-4) - 3 \cdot 5 - 7 = -8 + 4 - 15 - 7 = -26$. Enfin $-(-7) + (-26) = 7 - 26 = -19$.

Solution 1.2.

- a) $15 + 12 = 27$.
- b) $16 - 3 = 13$.
- c) $5 + 3 \cdot 4 = 5 + 12 = 17$.
- d) $2 \cdot 25 - 3 + 3 = 50 - 3 + 3 = 50$.

Solution 1.3.

- a) $2(-3) + 5(4) = -6 + 20 = 14$.
- b) $\frac{4 - 2(-2)}{-3 + 1} = \frac{8}{-2} = -4$.
- c) $-(-3)^2 + 4 \cdot (-2) = -9 - 8 = -17$. Attention : $-a^2$ signifie $-(a^2)$, qui vaut -9 même si a est négatif.

Solution 1.4.

Numérateur : $5 + (-8) \cdot 2 = 5 - 16 = -11$. Dénominateur : $3 - 1 = 2$. D'où $\frac{-11}{2} - |-4| = -\frac{11}{2} - 4 = -\frac{19}{2}$.

Solution 1.5.

- a) $35 + 5 : 5 - (3 + 2) \cdot 4 = 35 + 1 - 20 = 16$.
- b) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 35 + 1 - 3 + 8 = 41$: c'est déjà l'expression telle quelle, sans parenthèse supplémentaire.
- c) $(35 + 5) : (5 - 3) + 2 \cdot 4 = 40 : 2 + 8 = 20 + 8 = 28$.
- d) $(35 + 5) : ((5 - 3) + 2 \cdot 4) = 40 : 10 = 4$.

Solution 1.6.

$\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$; $-7 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $\frac{22}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; $0,142857 = \frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $\pi - 3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution 1.7.

$-8 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $0 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $5 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $\frac{13}{2} \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Solution 1.8.

- a) Vrai ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).
- b) Faux : $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
- c) Vrai ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).
- d) Faux : $\sqrt{4} = 2$ est rationnel.
- e) Faux : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ est rationnel.

Solution 1.9.

- a) -3 .
- b) $\frac{1}{2}$.
- c) $\sqrt{2}$.
- d) Impossible : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, donc tout élément de $\mathbb{N}$ est aussi dans $\mathbb{Z}$.
- e) $\sqrt{2}$: en effet $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{N}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.

Solution 1.10.

- a) $63 = 4 \cdot 15 + 3$; quotient 15, reste 3.
- b) $218 = 12 \cdot 18 + 2$; quotient 18, reste 2.
- c) $3245 = 135 \cdot 24 + 5$; quotient 24, reste 5.
- d) $32 = 50 \cdot 0 + 32$; quotient 0, reste 32 (puisque $32 < 50$).

Solution 1.11.

- a) $97 = 6 \cdot 16 + 1$; quotient 16, reste 1.
- b) $305 = 15 \cdot 20 + 5$; quotient 20, reste 5.
- c) $4321 = 27 \cdot 160 + 1$; quotient 160, reste 1.

Solution 1.12.

- Divisibles par 2 : 12, 30, 246, 4238.
- Divisibles par 3 : 12, 30, 27, 246 (somme des chiffres multiple de 3).
- Divisibles par 5 : 30, 325 (se terminent par 0 ou 5).

Solution 1.13.

$\text{pgcd}(105, 175) = 35$; 35 équipes de 3 filles et 5 garçons.

Solution 1.14.

- a) $\text{pgcd}(36, 60) = 12$; $\text{ppcm}(36, 60) = 180$.
- b) $\text{pgcd}(84, 126) = 42$; $\text{ppcm}(84, 126) = 252$.
- c) 17 est premier et ne divise pas 45, donc $\text{pgcd}(17, 45) = 1$ (premiers entre eux); $\text{ppcm}(17, 45) = 765$.

Solution 1.15.

$\text{ppcm}(24, 40) = 120$: ils repartent ensemble toutes les 120 minutes, soit 2 heures. Sur 12 heures (720 minutes), cela se produit $720 \div 120 = 6$ fois (sans compter le départ initial).

Solution 1.16.

- a) $\frac{3}{4} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} + \frac{5}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$.
- b) $\frac{5}{21} + \frac{12}{15} = \frac{25}{105} + \frac{84}{105} = \frac{109}{105}$.
- c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$, donc $\frac{3}{10} - \frac{5}{6} = \frac{9}{30} - \frac{25}{30} = -\frac{16}{30} = -\frac{8}{15}$.
- d) $\frac{120}{49} \cdot \frac{56}{144} = \frac{6720}{7056} = \frac{20}{21}$.
- e) $\frac{25}{36} \div \frac{5}{16} = \frac{25}{36} \cdot \frac{16}{5} = \frac{400}{180} = \frac{20}{9}$.

Solution 1.17.

- a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, donc $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$.
- b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$, donc $\frac{17}{20} \cdot \frac{10}{7} = \frac{170}{140} = \frac{17}{14}$.

Solution 1.18.

Quantité retirée : $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ de la capacité totale. Il reste $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ de la capacité totale.

Solution 1.19.

- a) $\frac{216}{720} = \frac{3}{10}$ (diviser par 72).
- b) $\frac{1122}{1496} = \frac{3}{4}$ (diviser par 374).
- c) $\frac{1826688}{829280} = \frac{804}{365}$ (diviser par 2272); cette fraction est déjà irréductible, car $804 = 2^2 \cdot 3 \cdot 67$ et $365 = 5 \cdot 73$ n'ont aucun facteur premier commun.

Solution 1.20.

- a) $\frac{1}{45} = 0,0\overline{2}$.
- b) $\frac{2}{9} = 0,\overline{2}$.
- c) $\frac{31}{7} = 4,\overline{428571}$.
- d) $\frac{200}{17} = 11,\overline{7647058823529411}$ (période de 16 chiffres — normal, car 17 est premier et la période d'une fraction $1/p$ peut compter jusqu'à $p-1$ chiffres).

Solution 1.21.

- a) $\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$.
- b) $\frac{7}{11} = 0,\overline{63}$.
- c) $\frac{11}{8} = 1,375$ (développement fini).

Solution 1.22.

- a) $0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$.
- b) Soit $x = 1,\overline{2}$. Alors $10x = 12,\overline{2}$, donc $10x - x = 11$, soit $9x = 11$, donc $x = \frac{11}{9}$.
- c) Soit $x = 2,\overline{34}$. Alors $100x = 234,\overline{34}$, donc $100x - x = 232$, soit $x = \frac{232}{99}$.
- d) Ici la partie non périodique après la virgule est 234 (3 chiffres) et la période est 343 (3 chiffres). Soit $x = 1,234343343343 \dots$ (la valeur absolue). On multiplie par 10^3 puis par 10^6 :

$$1000x = 1234,343343 \dots \quad 1\,000\,000x = 1\,234\,343,343343 \dots$$

En soustrayant : $999\,000x = 1\,233\,109$, donc $x = \frac{1\,233\,109}{999\,000}$ (déjà irréductible).

$$\text{D'où } -1,234\overline{343} = -\frac{1\,233\,109}{999\,000}.$$

Solution 1.23.

$100x = 58,333 \dots$ et $1000x = 583,333 \dots$, donc $1000x - 100x = 525$, soit $900x = 525$, donc $x = \frac{525}{900} = \frac{7}{12}$.

Solution 1.24.

$$\text{a) } \frac{14^3 \cdot 9^4}{42^3 \cdot 9^2} = \frac{14^3}{42^3} \cdot 9^{4-2} = \left(\frac{14}{42}\right)^3 \cdot 81 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 81 = \frac{81}{27} = 3.$$

$$\text{b) Au numérateur : } (5a^3)^4 \cdot (b^4)^5 = 625a^{12} \cdot b^{20} = 625a^{12}b^{20}. \text{ Au dénominateur : } (25(ab)^4)^2 \cdot (b^2)^6 \cdot a^4 = 625a^8b^8 \cdot b^{12} \cdot a^4 = 625a^{12}b^{20}. \text{ Le quotient vaut donc } \frac{625a^{12}b^{20}}{625a^{12}b^{20}} = 1.$$

$$\text{c) Au numérateur : } (b^3)^{-4} \cdot (a^{-1}b^2)^5 = b^{-12} \cdot a^{-5}b^{10} = a^{-5}b^{-2}. \text{ Au dénominateur : } (b^2b^3)^{-2}(b^6)^2 = (b^5)^{-2} \cdot b^{12} = b^{-10} \cdot b^{12} = b^2. \text{ Le quotient est donc } \frac{a^{-5}b^{-2}}{b^2} = a^{-5}b^{-4}, \text{ et en multipliant par } a^4 : a^{-5}b^{-4} \cdot a^4 = a^{-1}b^{-4} = \frac{1}{ab^4}.$$

Solution 1.25.

$$\text{a) } 2^{5+3-6} = 2^2 = 4.$$

$$\text{b) } 3^6 \div 3^4 = 3^2 = 9.$$

$$\text{c) } \frac{8a^3 \cdot a^2}{4a^4} = \frac{8a^5}{4a^4} = 2a.$$

Solution 1.26.

$$\text{a) Faux : } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{b) Faux : } 5^0 = 1.$$

$$\text{c) Faux : } (-2)^4 = 16 \text{ (base négative, exposant pair).}$$

$$\text{d) Vrai : sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur 2, donc } -2^4 = -(2^4) = -16.$$

Solution 1.27.

$$\text{a) } 7283 = 7,283 \cdot 10^3.$$

$$\text{b) } 0,00149 = 1,49 \cdot 10^{-3}.$$

$$\text{c) } 0,67 \cdot 10^2 = 67 = 6,7 \cdot 10^1.$$

$$\text{d) } 159 \cdot 10^{-5} = 1,59 \cdot 10^{-3}.$$

Solution 1.28.

1 cm = 10^{-2} m. On calcule

$$\frac{10^{-2}}{7 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^4}{7} \approx 1428,6.$$

Il faudrait donc environ 1429 globules rouges.

Solution 1.29.

$10^{100} = (2^{10/\log_2 10})^{100} \approx (2^{3,32})^{100} = 2^{332} > 2^{400}$? En fait : $2^{10} \approx 10^3$ donc $2^{400} = (2^{10})^{40} \approx 10^{120} > 10^{100}$. Donc $2^{400} > 10^{100}$.

Solution 1.30.

a) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$.

c) $2\sqrt{72} = 2\sqrt{36 \cdot 2} = 12\sqrt{2}$ et $7\sqrt{18} = 7\sqrt{9 \cdot 2} = 21\sqrt{2}$, donc $12\sqrt{2} - 21\sqrt{2} = -9\sqrt{2}$.

d) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $2\sqrt{9} = 6$ et $(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$, donc $2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 6 + 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 6$.

Solution 1.31.

a) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10$.

c) $3\sqrt{8} = 6\sqrt{2}$ et $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, donc $6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

Solution 1.32.

a) $\frac{-9}{\sqrt{27}} = \frac{-9}{3\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$.

b) $\frac{-4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{-4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{-4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = -2\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$.

c) $\sqrt{4} = 2$, donc $\frac{2}{\sqrt{3} - 2} = \frac{2(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} = \frac{2(\sqrt{3} + 2)}{-1} = -2\sqrt{3} - 4$.

Solution 1.33.

a) $\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

b) $\frac{3}{\sqrt{7} - 2} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{7 - 4} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{3} = \sqrt{7} + 2$.

Solution 1.34.

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$. Et $(\sqrt{2})^4 = ((\sqrt{2})^2)^2 = 2^2 = 4$. Au total : $2 + 4 = 6$.

Solution 1.35.

a) $(-3, +\infty)$.

b) $(-\infty, 5]$.

c) $(-2, 4]$.

Solution 1.36.

a) $|8 - (-5)| = 13$.

b) $|-3 - (-11)| = 8$.

c) $y - x$ (qui est bien positif puisque $x < y$).

Solution 1.37.

a) $-2 \leq x < 2; x \in [-2, 2)$.

b) $-3 \leq x \leq 5; x \in [-3, 5]$.

c) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Solution 1.38.

a) $3x - 2 = 7 \Rightarrow x = 3$, ou $3x - 2 = -7 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$. $S = \left\{-\frac{5}{3}, 3\right\}$.

b) Une valeur absolue est toujours ≥ 0 , elle ne peut donc jamais être ≤ -1 .
Ainsi $S = \emptyset$.

c) $2|x - 1| > 8 \Rightarrow |x - 1| > 4 \Rightarrow x > 5$ ou $x < -3$. $S = (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$.

Solution 1.39.

Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, et $\frac{p}{q}$ irréductible (c'est-à-dire $\text{pgcd}(p, q) = 1$).

En élevant au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$.

Ainsi p^2 est pair. Or le carré d'un nombre impair est impair (si $p = 2k + 1$, alors $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair). Donc p est nécessairement pair : on écrit $p = 2k$.
En substituant : $(2k)^2 = 2q^2$, soit $4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$. Ainsi q^2 est pair, donc q est pair (même argument que ci-dessus).

On obtient donc que p et q sont tous deux pairs, ce qui contredit le fait que $\frac{p}{q}$ est irréductible (ils auraient alors 2 comme diviseur commun). Cette contradiction montre que l'hypothèse de départ était fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Solution 1.40.

Rationnels : $\pi - \pi = 0$; $1 + 5,5 = 6,5$; $2^0 = 1$; 1024 ; $\sqrt{25} = 5$. Irrationnels (ou non défini) : $3\sqrt{2}$; $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (rationnel!); $\frac{\pi}{5}$.

Solution 1.41.

Par l'absurde, supposons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, et $\frac{p}{q}$ irréductible. Alors $3q^2 = p^2$, donc 3 divise p^2 , donc 3 divise p (car 3 est premier) : on écrit $p = 3k$. En substituant : $3q^2 = 9k^2$, soit $q^2 = 3k^2$, donc 3 divise aussi q^2 , donc 3 divise q . Ainsi 3 divise à la fois p et q , ce qui contredit le fait que $\frac{p}{q}$ est irréductible. Donc $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Solution 1.42.

Posons $x = 0,4999 \dots$. Alors $10x = 4,999 \dots$, donc $10x - x = 4,999 \dots - 0,4999 \dots = 4,5$, soit $9x = 4,5$, donc $x = 0,5$.

Solution 1.43.

$$t = \frac{1,496 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^5} \approx 499 \text{ s} \approx 8,3 \text{ min.}$$

Solution 1.44.

- a) Comptons les facteurs 5 et 2 dans $17!$. Les multiples de 5 inférieurs ou égaux à 17 sont 5, 10, 15, ce qui donne exactement 3 facteurs 5 (aucun n'est multiple de 25). Il y a en revanche bien plus de facteurs 2 (au moins un par nombre pair, donc largement plus de 3). Comme $17!$ contient donc au moins $2^3 \cdot 5^3 = 1000$ comme diviseur, $17!$ se termine par **trois zéros** : ses trois derniers chiffres sont 000.
- b) Le nombre de zéros à la fin de $n!$ est donné par le nombre de facteurs 5 dans sa décomposition (les facteurs 2 étant toujours plus nombreux) :

$$\left\lfloor \frac{627}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{627}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{627}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{627}{625} \right\rfloor = 125 + 25 + 5 + 1 = 156.$$

$627!$ se termine donc par 156 zéros.

Solution 1.45.

$S = 2^{64} - 1 \approx 1,84 \cdot 10^{19}$ grains $\approx 9,2 \cdot 10^{14}$ kg — bien supérieur à la production mondiale annuelle.

Solution 1.46.

- a) $(1011)_2 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$.
- b) $25 = 16 + 8 + 1$, donc $25 = (11001)_2$.
- c) $(101)_5 = 1 \cdot 25 + 0 \cdot 5 + 1 = 26$.

Solution 1.47.

$$(10110)_2 = 16 + 4 + 2 = 22; 47 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1 = (101111)_2.$$

Solution 1.48.

$$(1101101)_2 = 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 109.$$

$$\text{Pour } 500 : 500 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 4, \text{ donc } 500 = (111110100)_2.$$

Chapitre 2

Théorie des ensembles

Dans une classe de 30 élèves, 18 apprennent le français, 15 apprennent l'allemand, et 4 n'apprennent ni l'un ni l'autre. Combien apprennent les deux langues ?

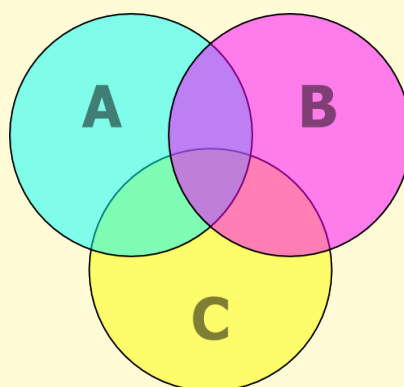
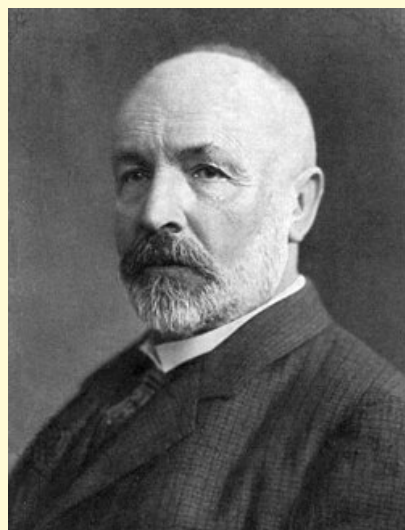
Le problème semble simple et il l'est ! — une fois qu'on dispose du bon langage.

Ce langage, c'est la théorie des ensembles. Georg Cantor l'a inventée à la fin du XIX^e siècle, non pour résoudre des problèmes d'emplois du temps, mais pour comprendre l'infini.

Il découvrit quelque chose de stupéfiant : il y a plusieurs tailles d'infini, et certains infinis sont strictement plus grands que d'autres.

Kronecker, son maître, le traita de « corrupteur de la jeunesse ». Hilbert, en revanche, déclara : « Du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser. »

La réponse au problème des langues ? $30 - 4 = 26$ élèves étudient au moins une langue, et $18 + 15 - 26 = 7$ étudient les deux. On reviendra sur cette formule.¹



¹**Les Faits** : Georg Cantor a fondé la théorie des ensembles à la fin du XIX^e siècle. Kronecker (son ancien professeur) l'a qualifié de “charlatan scientifique”, de “renégat” et de “corrupteur de la jeunesse” — citation bien attestée. Hilbert a écrit “Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können” (“Personne ne pourra nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous”) dans son article *Über das Unendliche*, *Mathematische Annalen*, vol. 95 (1926).

Problème d'ouverture. Une compétition mathématique soviétique de 1961 posait la question suivante. Un groupe de 100 élèves a été interrogé : 28 aiment la physique, 30 les mathématiques, 42 la chimie ; 8 aiment la physique et les maths, 10 la physique et la chimie, 5 les maths et la chimie ; 3 aiment les trois disciplines. Combien d'élèves n'aiment **aucune** de ces trois disciplines ?

2.1 Vocabulaire et notations

Définition 2.1 — *ensemble et élément.*

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**. On note :

- $x \in A$: « x **appartient** à A »
- $x \notin A$: « x **n'appartient pas** à A »
- $\emptyset$ ou $\{\}$: l'**ensemble vide** (ne pas confondre avec $\{\emptyset\}$!)

Remarque 2.1. Pour qu'un ensemble soit utilisable, il doit être **bien défini** : étant donné un objet quelconque, on doit pouvoir dire sans ambiguïté s'il appartient ou non à l'ensemble. « L'ensemble des multiples de 7 » est bien défini ; « l'ensemble des bons films » ne l'est pas, car « bon » est une question d'opinion.

Définition 2.2 — *inclusion.*

$A \subseteq B$ signifie que tout élément de A appartient aussi à B : « A est **inclus** dans B ». Si de plus $A \neq B$, on écrit $A \subsetneq B$ (**strictement inclus**). On utilise $A \not\subseteq B$ quand A n'est pas inclus dans B .

Proposition 2.3 — *nombre de sous-ensembles.*

Un ensemble à n éléments possède exactement 2^n sous-ensembles, dont $2^n - 1$ sous-ensembles propres (on retire l'ensemble lui-même).

Exemple 2.1. $\{7; 8\}$ a $2^2 = 4$ sous-ensembles : $\emptyset, \{7\}, \{8\}, \{7; 8\}$ (dont $3 = 2^2 - 1$ sous-ensembles propres).

Remarque 2.2. Ne pas confondre $\in$ (appartenance d'un *élément*) et $\subseteq$ (inclusion d'un *ensemble*) : $3 \in \{1; 2; 3\}$ mais $\{3\} \subseteq \{1; 2; 3\}$. De même : $0, \{0\}, \emptyset$ et $\{\emptyset\}$ sont quatre objets distincts.

Définition 2.4 — *notations spéciales.*

Pour un ensemble A de nombres :

- $A^* = A \setminus \{0\}$: éléments de A sauf zéro
- $A_+ = \{x \in A \mid x \geq 0\}$: éléments positifs ou nuls
- $A_- = \{x \in A \mid x \leq 0\}$: éléments négatifs ou nuls

Exemples : $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}$; $\mathbb{Z}^* = \{\dots; -3; -2; -1\}$.

Remarque 2.3. Égaux ou équivalents ? Deux ensembles sont **égaux** s'ils ont exactement les mêmes éléments. Deux ensembles sont **équivalents** s'ils ont le même nombre d'éléments (le même cardinal), sans nécessairement contenir les mêmes éléments. Par exemple, $\{a; b; c\}$ et $\{1; 2; 3\}$ sont équivalents (tous deux de cardinal 3) mais ne sont pas égaux.

2.2 Opérations sur les ensembles

Définition 2.5 — union, intersection, différence.

Soient A et B deux ensembles :

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (union, « A ou B »)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ (intersection, « A et B »)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ (différence, « A sans B »)

Le «ou» de l'union est **non exclusif** : $A \cup B$ contient aussi les éléments qui sont dans les deux.

Exemple 2.2. $A = \{-5; 3; 4; 6; 8; 9\}$ et $B = \{2; 3; 4; 8; 10\}$:

- $A \cup B = \{-5; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$
- $A \cap B = \{3; 4; 8\}$
- $A \setminus B = \{-5; 6; 9\}$
- $B \setminus A = \{2; 10\}$

Proposition 2.6 — formule d'inclusion-exclusion.

Pour deux ensembles finis A et B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Pour trois ensembles :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Ici $|E|$ désigne le **cardinal** de E (son nombre d'éléments).

Définition 2.7 — ensemble universel et complémentaire.

Dans un contexte donné, l'**ensemble universel** U regroupe tous les éléments considérés. Pour $A \subseteq U$, le **complémentaire** de A , noté A' , est l'ensemble des éléments de U qui n'appartiennent pas à A :

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A.$$

Exemple 2.3. $U = \{1; 2; \dots; 10\}$ et $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$: alors $A' = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

Proposition 2.8 — lois de De Morgan.

Pour tous ensembles $A, B \subseteq U$:

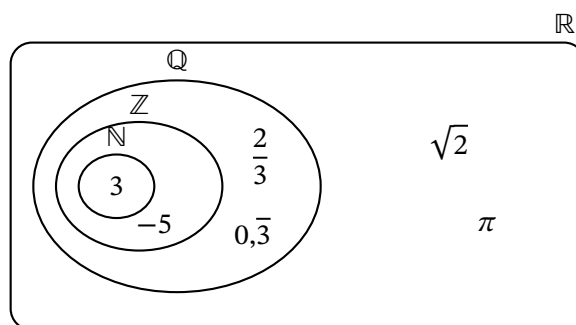
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{et} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Autrement dit : le complémentaire d'une intersection est l'union des complémentaires, et réciproquement.

2.3 Diagrammes de Venn**Définition 2.9 — diagramme de Venn.**

Un **diagramme de Venn** représente des ensembles par des régions fermées dans un rectangle (l'ensemble universel). Chaque élément occupe la région correspondant à sa caractérisation la plus précise.

Exemple 2.4. Représentation des ensembles de nombres :

**2.4 Intervalles réels****Définition 2.10 — intervalles.**

Un **intervalle** est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$:

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (\text{fermé des deux côtés})$$

$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (\text{ouvert des deux côtés})$$

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (\text{semi-ouvert à droite})$$

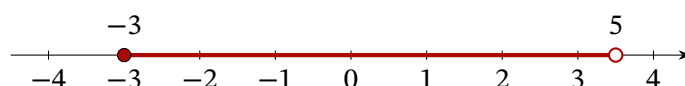
$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad (\text{semi-ouvert à gauche})$$

$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

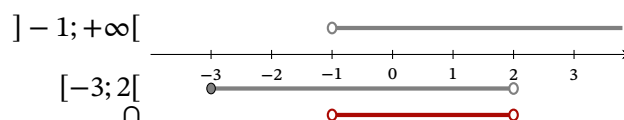
Un crochet **fermé** ($[$ ou $]$) indique que la borne est incluse; un crochet **ouvert** ($($ ou $)$) indique qu'elle est exclue. Les bornes $\pm\infty$ sont **toujours** exclues.

Exemple 2.5. Représentation de $[-3; 5[$ sur la droite réelle :



Un disque plein • indique une borne incluse, un cercle vide ◦ une borne exclue.

Exemple 2.6. Déterminer $] - 1; +\infty[\cap [-3; 2[$:



$] - 1; +\infty[\cap [-3; 2[=] - 1; 2[.$

Produit cartésien. Le **produit cartésien** de A et B est :

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Si $|A| = m$ et $|B| = n$, alors $|A \times B| = mn$. Le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les couples de réels.

2.5 Exercices

Exercice 2.1. Écrire avec des notations ensemblistes :

- L'ensemble comprenant les nombres 2, 5, 11, -2 et 1.
- L'ensemble des entiers naturels compris entre 22 et 2222 (inclus).
- L'ensemble des entiers relatifs strictement négatifs.
- L'ensemble des nombres rationnels strictement positifs.

Exercice 2.2. Compléter par le ou les symboles adéquats ($\in, \notin, \subseteq, \subsetneq, \cup, \cap, \setminus, =$) :

- $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$
- $-33 \dots \mathbb{N}$
- $\{33\} \dots \mathbb{N}$
- $\{3; 4; 5\} \cup \{5\} = \dots$
- $\{3; 4; 5\} \cap \{5\} = \dots$
- $\{3; 4; 5\} \setminus \{5\} = \dots$

- g) $\{3; 4; 5; 6; 7\} \dots \{6; 7; 8; 9\} = \{6; 7\}$
- h) $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
- i) $\{3; 4; 5; 6; 7\} \dots \{5; 6; 7; 8; 9\} = \{3; 4\}$
- j) $\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \dots$

Exercice 2.3. Transcrire en notations ensemblistes :

- a) « L'ensemble des nombres rationnels est inclus dans l'ensemble des nombres réels. »
- b) « $-\frac{3}{4}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$. »
- c) « L'ensemble des entiers entre -12 et 13 »
- d) « L'ensemble des réels strictement supérieurs à $\sqrt{2}$ »

Et inversement, traduire en français :

- e) $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
- f) $\pi \notin \mathbb{Q}$

Exercice 2.4. Décrire en français chacune des expressions suivantes (où $A, B, C \subseteq U$) :

- a) $A \cap (B \cup C)$
- b) $(A \cap B') \cup C$
- c) $A' \cap B' \cap C'$

Et inversement, traduire en notation ensembliste :

- d) « L'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B , mais pas dans C . »
- e) « L'ensemble des éléments qui ne sont ni dans A , ni dans B . »

Exercice 2.5. Quelles sont les significations des notations suivantes? Sont-elles toutes distinctes?

$$0 \quad \{0\} \quad \emptyset \quad \{\emptyset\}$$

Exercice 2.6. Lister les éléments de chacun des ensembles suivants :

- a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 10\}$
- b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 3 \text{ et } x \text{ est pair}\}$
- c) $\{x \mid x \text{ est un diviseur de } 18\}$
- d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 20\}$

Exercice 2.7. Calculer le nombre de sous-ensembles et de sous-ensembles propres de chacun des ensembles suivants :

- a) $A = \{3; 8; 11; 17; 20; 25; 28\}$
- b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est un diviseur de } 12\}$
- c) l'ensemble vide

Exercice 2.8. Combien d'éléments doit avoir un ensemble pour posséder exactement :

- a) 16 sous-ensembles ?
- b) 64 sous-ensembles ?
- c) 15 sous-ensembles propres ?

Exercice 2.9. Pour chaque paire d'ensembles, dire s'ils sont **égaux**, **équivalents** sans être égaux, ou ni l'un ni l'autre.

- a) $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{3; 2; 1\}$
- b) $C = \{a; b; c\}$ et $D = \{1; 2; 3\}$
- c) $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et $F = \{2; 4\}$
- d) $I = \{x; y\}$ et $J = \{x; y; z\}$

Exercice 2.10. Dire si chacun des ensembles suivants est bien défini. Justifier.

- a) L'ensemble des nombres pairs.
- b) L'ensemble des bons films.
- c) L'ensemble des multiples de 7 inférieurs à 100.
- d) L'ensemble des élèves sympathiques de la classe.

Exercice 2.11. Identifier chaque ensemble comme fini ou infini.

- a) $\{2; 4; 6; \dots; 28\}$
- b) $\{6; 12; 18; \dots\}$
- c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 30\}$
- d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$
- e) l'ensemble des lettres de l'alphabet français

Exercice 2.12. Trouver $n(A)$ pour chacun des ensembles suivants.

- a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
- b) $A = \{2; 4; 6; \dots; 100\}$
- c) $A = \{x \mid x \text{ est une lettre du mot MATHEMATIQUES}\}$
- d) $A = \emptyset$

Exercice 2.13. Donner un exemple de deux ensembles A et B tels que :

- a) $A \cap B = \emptyset$ (ils sont disjoints);
- b) $A \subsetneq B$;
- c) $A = B$, mais décrits de deux façons différentes;
- d) A et B sont équivalents sans être égaux.

Exercice 2.14. Vrai ou faux ? Justifier.

- a) $\emptyset \subseteq A$ pour tout ensemble A .
- b) $\emptyset \in A$ pour tout ensemble A .
- c) $A \subseteq A$ pour tout ensemble A .
- d) $A \subsetneq A$ pour tout ensemble A .

Exercice 2.15. Soient $A = \{-5; 3; 4; 6; 8; 9\}$ et $B = \{2; 3; 4; 8; 10\}$. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$.

Exercice 2.16. Soient $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ et $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Déterminer :

- a) $A \cap B \cap C$
- b) $A \cup B \cup C$
- c) $(A \cap B) \cup C$
- d) $A \cap (B \cup C)$

Exercice 2.17. Soit $U = \{1; 2; \dots; 12\}$ l'ensemble universel, $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ et $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- a) Déterminer A' et B' .
- b) Déterminer $A' \cap B'$ et $(A \cup B)'$. Que remarque-t-on ?
- c) Déterminer $A' \cup B'$ et $(A \cap B)'$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2.18. [MA2] Pour A et B des ensembles quelconques, dire si chaque affirmation est **toujours** vraie ou **pas toujours** vraie (donner un contre-exemple si ce n'est pas toujours vrai).

- a) $A \subseteq A \cup B$
- b) $A \cup B \subseteq A$
- c) $A \cap B \subseteq A$
- d) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- e) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- f) Si $A \subseteq B$, alors $A \cup B = B$.
- g) Si $A \subseteq B$, alors $A \cap B = A$.

Exercice 2.19. Trouver les ensembles C et D sachant que :

- a) $C \cup D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \cap D = \{2; 3; 4\}$, $1 \notin D \setminus C$ et $5 \notin C \setminus D$.
- b) $C \cup D = \{2; 3; 4; 5\}$ et $C \cap D = \{2; 4\}$. Donner toutes les possibilités.

Exercice 2.20. Représenter les ensembles $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ par un diagramme de Venn, et y placer :

$$-420; \quad \frac{57}{8}; \quad 2^{333}; \quad 10^{-6}; \quad -29,23\overline{64}; \quad \sqrt{22}; \quad \frac{0}{12}; \quad 5,\overline{9}.$$

Exercice 2.21. Pour chacune des expressions suivantes, représenter par un diagramme de Venn à trois cercles A, B, C et hachurer la région correspondante :

- a) $(A \cap B) \cup C$
- b) $A \cap (B \cup C)$
- c) $(A \cap B) \setminus C$
- d) $(B \cup C) \setminus (A \cap B)$
- e) $(A \cap B) \setminus (B \cup C)$

Exercice 2.22. On considère un diagramme de Venn à deux ensembles A et B dans un univers U . Associer à chacune des quatre régions suivantes l'expression ensembliste qui la décrit, parmi $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $(A \cup B)'$:

- a) la région commune aux deux ensembles;
- b) la région qui appartient à A mais pas à B ;
- c) la région qui appartient à B mais pas à A ;

d) la région extérieure aux deux ensembles (mais à l'intérieur de U).

Exercice 2.23. Écrire sous forme d'intervalle les ensembles représentés :

- a) $\bullet \text{---} \circ$ de -5 à -1 (borne gauche incluse, droite exclue)
- b) $\circ \text{---} \bullet$ de -7 à 2 (borne gauche exclue, droite incluse)
- c) $\bullet \text{---} \bullet$ de -3 à 4 (les deux incluses)
- d) flèche vers $+\infty$ depuis -2 (inclus)

Exercice 2.24. Écrire sous forme d'intervalle, puis représenter sur la droite réelle :

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 8\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 45\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \pi\}$
- e) « L'ensemble des réels strictement supérieurs à $\sqrt{2}$ »
- f) « L'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 8 » (*attention : entiers, pas réels!*)

Exercice 2.25. Dans un parc de loisirs, soit t la taille d'un enfant en mètres. Écrire pour chaque attraction l'intervalle des tailles autorisées :

- a) Réservée aux enfants de **moins de** $1,40$ m
- b) Réservée aux enfants d'**au moins** $1,40$ m
- c) Interdite aux enfants de $1,40$ m **et moins**
- d) Interdite aux enfants de **plus de** $1,40$ m

Exercice 2.26. Soient $A =] - 15; 12]$ et $B = [-2; 15[$.

- a) Représenter A et B sur la même droite réelle.
- b) Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$; donner les réponses sous forme d'intervalles et sous forme $\{x \in \mathbb{R} \mid \dots\}$.

Exercice 2.27. On considère :

$$A =] - 5; 2], \quad B = [0; 5[, \quad C =] - 3; 3[, \quad D = [-3; 3].$$

- a) Représenter les quatre intervalles sur la droite réelle.

- b) Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $D \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, $A \setminus C$ et $D \setminus C$.

Exercice 2.28. On considère les ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 2\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$$

- Écrire chacun sous forme d'intervalle.
- Représenter graphiquement.
- Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $D \cap E$, $E \cap G$, $B \cup E$, $F \cup G$, $A \setminus C$, $D \setminus C$ et $G \setminus H$.

Exercice 2.29. Soit $A =]-2; 5]$. Déterminer $A \cap \mathbb{N}$ en listant ses éléments (attention : ce n'est pas un intervalle réel!).

Exercice 2.30. Dans une classe de 30 élèves, 18 font du sport, 15 jouent d'un instrument, et 4 ne font ni l'un ni l'autre. Combien font les deux activités ?

Exercice 2.31. Dans une entreprise de 60 employés, T est l'ensemble de ceux qui parlent anglais et F celui de ceux qui parlent allemand, avec $n(T) = 38$, $n(F) = 25$ et $n(T \cap F) = 15$.

- Combien d'employés parlent anglais ou allemand ?
- Combien ne parlent ni l'un ni l'autre ?
- Combien parlent anglais seulement ?

Exercice 2.32. Résoudre le problème d'ouverture : parmi 100 élèves, 28 aiment la physique (P), 30 les maths (M), 42 la chimie (C), $|P \cap M| = 8$, $|P \cap C| = 10$, $|M \cap C| = 5$, $|P \cap M \cap C| = 3$. Combien n'aiment aucune des trois disciplines ?

Exercice 2.33. [MA2] Une enquête a été menée auprès de 80 élèves d'un collège sur leurs loisirs préférés parmi le football (F), la lecture (L) et la musique (M) :

35 aiment le football	15 aiment le football et la lecture
40 aiment la lecture	12 aiment le football et la musique
30 aiment la musique	10 aiment la lecture et la musique
5 aiment les trois activités	

- Combien d'élèves n'aiment aucune de ces trois activités ?
- Combien d'élèves aiment **exactement une** de ces trois activités ?
- Combien d'élèves aiment le football, mais ni la lecture ni la musique ?

Indication : comme dans l'exemple du chapitre, répartissez d'abord les 5 élèves qui aiment les trois activités, puis les régions qui n'en concernent que deux, et enfin celles qui n'en concernent qu'une seule.

Exercice 2.34. [MA2] Soit $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{a; b\}$.

- a) Lister tous les éléments de $A \times B$.
- b) Vérifier : $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
- c) Combien d'éléments a $A \times A$? Les lister.
- d) Le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: quelle est la signification géométrique d'un élément $(x; y)$?

Exercice 2.35. [MA2] Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$ et $B = \{x; y\}$.

- a) Combien d'éléments a $A \times B$?
- b) Combien de sous-ensembles a l'ensemble $A \times B$?
- c) Combien de sous-ensembles ont respectivement A et B ? Le produit de ces deux nombres est-il égal à la réponse de la question précédente?

2.6 Résumé du chapitre

Notations fondamentales

- $x \in A$ (appartient) $x \notin A$ (n'appartient pas) $\emptyset$ (ensemble vide)
- $A \subseteq B$ (inclus) $A \subsetneq B$ (strictement inclus)
- $A^* = A \setminus \{0\}$ A_+ (positifs) A_- (négatifs)
- Ne pas confondre : $0, \{0\}, \emptyset, \{\emptyset\}$

Opérations

- $A \cup B$: union $A \cap B$: intersection $A \setminus B$: différence
- Formule : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Intervalles

- $[a; b]$ fermé $]a; b[$ ouvert $[a; b[,]a; b]$ semi-ouverts
- $\pm\infty$ toujours exclu : $[a; +\infty[,] - \infty; b]$
- $\bullet$ = borne incluse $\circ$ = borne exclue

Ensembles de nombres

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

2.7 QCM — Théorie des ensembles

Une seule réponse correcte par question.

1. $\{3; 4; 5\} \cap \{5; 6; 7\} = ?$

- a) $\{3; 4; 5; 6; 7\}$
- b) $\{5\}$
- c) $\emptyset$
- d) $\{3; 4\}$

2. Lequel de ces symboles exprime l'**appartenance** d'un élément ?

- a) $\subseteq$
- b) $\subsetneq$
- c) $\in$
- d) $=$

3. Laquelle de ces assertions est **fausse** ?

- a) $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$
- b) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- c) $\{0\} = \emptyset$
- d) $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

4. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ est égal à :

- a) $\mathbb{Z}$
- b) $\mathbb{N}$
- c) $\mathbb{Z}_-^*$
- d) $\mathbb{Z}_-$

5. $|A| = 10, |B| = 7, |A \cap B| = 3. |A \cup B| = ?$

- a) 20
- b) 17
- c) 14
- d) 10

6. $] - 1; +\infty[\cap [-3; 2[= ?$

- a) $] - 3; 2[$
- b) $] - 1; 2[$
- c) $[-3; +\infty[$
- d) $] - 1; +\infty[$

7. L'intervalle $[-2; 3[$ correspond à :

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$

8. $] -\infty; 4] \cup [2; +\infty[= ?$

- a) $[2; 4]$
- b) $] -\infty; 2]$
- c) $\mathbb{R}$
- d) $[2; +\infty[$

Réponses : 1-b 2-c 3-c 4-d 5-c 6-b 7-b 8-c

2.8 Corrigés

Solution 2.1.

a. $\{-2; 1; 2; 5; 11\}$; b. $\{n \in \mathbb{N} \mid 22 \leq n \leq 2222\}$; c. $\mathbb{Z}^* = \{\dots; -3; -2; -1\}$; d. $\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Solution 2.2.

a. $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$; b. $-33 \notin \mathbb{N}$; c. $\{33\} \subsetneq \mathbb{N}$; d. $\{3; 4; 5\}$; e. $\{5\}$; f. $\{3; 4\}$; g. $\cap$; h. $\cup$; i. $\setminus$; j. $\mathbb{Z}^*$.

Solution 2.3.

a. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; b. $-\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$; c. $\{n \in \mathbb{Z} \mid -12 \leq n \leq 13\}$; d. $] \sqrt{2}; +\infty[$; e. « $\mathbb{Q}$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}$ »; f. « π n'est pas rationnel».

Solution 2.4.

a. «Les éléments qui sont dans A , et qui sont dans B ou dans C .» b. «Les éléments qui sont dans A mais pas dans B , ou qui sont dans C .» c. «Les éléments qui ne sont dans aucun des trois ensembles A, B, C .» d. $(A \cap B) \setminus C$. e. $(A \cup B)'$ (ou, de façon équivalente par De Morgan, $A' \cap B'$).

Solution 2.5.

0 : le nombre zéro; $\{0\}$: l'ensemble contenant uniquement zéro; $\emptyset$: l'ensemble vide (aucun élément); $\{\emptyset\}$: l'ensemble contenant l'ensemble vide (un élément!). Ces quatre objets sont bien distincts.

Solution 2.6.

a. $\{5; 6; 7; 8; 9\}$; b. $\{-2; 0; 2\}$; c. $\{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$; d. $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ (car $4^2 = 16 < 20$ mais $5^2 = 25 \nless 20$).

Solution 2.7.

a. $n(A) = 7$, donc $2^7 = 128$ sous-ensembles, dont 127 propres. b. $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $n(B) = 6$, donc $2^6 = 64$ sous-ensembles, dont 63 propres. c. $n(\emptyset) = 0$, donc $2^0 = 1$ sous-ensemble ($\emptyset$ lui-même) et 0 sous-ensemble propre.

Solution 2.8.

a. $2^n = 16 = 2^4$, donc $n = 4$. b. $2^n = 64 = 2^6$, donc $n = 6$. c. $2^n - 1 = 15$, donc $2^n = 16 = 2^4$, donc $n = 4$.

Solution 2.9.

a. Égaux (mêmes éléments, l'ordre ne compte pas). b. Équivalents mais pas égaux (même cardinal 3, éléments différents). c. Ni l'un ni l'autre ($n(E) = 4 \neq 2 = n(F)$). d. Ni l'un ni l'autre ($n(I) = 2 \neq 3 = n(J)$).

Solution 2.10.

a. Bien défini : le critère («pair») est objectif. b. Mal défini : «bon» dépend de l'opinion de chacun. c. Bien défini : critère numérique précis. d. Mal défini : «sympathique» est subjectif.

Solution 2.11.

a. Fini (14 éléments). b. Infini (la liste des multiples de 6 ne s'arrête pas). c. Infini. d. Infini (il y a une infinité de rationnels entre 0 et 1). e. Fini (26 lettres).

Solution 2.12.

a. $n(A) = 6$. b. $n(A) = 50$. c. Les lettres distinctes sont M, A, T, H, E, I, Q, U, S, donc $n(A) = 9$ (attention à ne pas compter deux fois M, A, T, E). d. $n(A) = 0$.

Solution 2.13.

Réponses possibles (il en existe beaucoup d'autres) : a. $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 4\}$.
 b. $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3\}$. c. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}$, $B = \{0; 1; 2\}$. d. $A = \{1; 2\}$, $B = \{a; b\}$.

Solution 2.14.

a. Vrai : l'ensemble vide est sous-ensemble de n'importe quel ensemble. b. Faux en général : $\emptyset$ n'est élément de A que si A le contient explicitement comme élément (par exemple $A = \{\emptyset; 1\}$). c. Vrai : tout ensemble est sous-ensemble de lui-même. d. Faux : par définition, $A \subsetneq B$ exige $A \neq B$; un ensemble n'est jamais un sous-ensemble *propre* de lui-même.

Solution 2.15.

$A \cup B = \{-5; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$; $A \cap B = \{3; 4; 8\}$; $B \setminus A = \{2; 10\}$; $A \setminus B = \{-5; 6; 9\}$.

Solution 2.16.

a. $A \cap B \cap C = \emptyset$ (aucun élément commun aux trois — normal, B ne contient que des pairs et C que des impairs). b. $A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. c. $(A \cap B) \cup C = \{2; 4; 6\} \cup \{1; 3; 5; 7; 9\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}$. d. $A \cap (B \cup C) = A$, car tous les éléments de A (de 1 à 7) se trouvent déjà dans $B \cup C$.

Solution 2.17.

a. $A' = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$; $B' = \{7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. b. $A' \cap B' = \{7; 9; 11\}$ et $(A \cup B)' = \{7; 9; 11\}$: on retrouve la loi de De Morgan $(A \cup B)' = A' \cap B'$. c. $A' \cup B' = \{1; 3; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ et $(A \cap B)' = \{1; 3; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$: on retrouve l'autre loi de De Morgan, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Solution 2.18.

a. Toujours vraie. b. Pas toujours : avec $A = \{1; 2\}$, $B = \{3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3\} \not\subseteq A$.
 c. Toujours vraie. d. Pas toujours : valable seulement si $A \cap B = \emptyset$; avec $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, $n(A \cup B) = 3 \neq 4$. e. Toujours vraie (formule d'inclusion-exclusion).
 f. Toujours vraie. g. Toujours vraie.

Solution 2.19.

a. $1 \notin D \setminus C$ signifie $1 \notin D$ ou $1 \in C$; $5 \notin C \setminus D$ signifie $5 \notin C$ ou $5 \in D$; la solution est $C = \{1; 2; 3; 4\}$, $D = \{2; 3; 4; 5\}$.
 b. Les éléments 3 et 5 doivent être dans exactement l'un des deux ensembles; il y a 4 possibilités : $3 \in C, 5 \in C$; $3 \in C, 5 \in D$; $3 \in D, 5 \in C$; $3 \in D, 5 \in D$.

Solution 2.20.

$\mathbb{N} : 2^{333}, \frac{0}{12} = 0, 5, \overline{9} = 6$; $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : -420$; $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} : \frac{57}{8}, 10^{-6}, -29,23\overline{64}$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \sqrt{22}$.

Solution 2.21.**Solution 2.22.**

a. $A \cap B$; b. $A \setminus B$; c. $B \setminus A$; d. $(A \cup B)'$.

Solution 2.23.

a. $[-5; -1[$; b. $] - 7; 2]$; c. $[-3; 4]$; d. $[-2; +\infty[$.

Solution 2.24.

a. $[2; 8[$; b. $] - 3; +\infty[$; c. $] - 4; 45]$; d. $] - \infty; \pi]$; e. $] \sqrt{2}; +\infty[$; f. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq 8\}$ (pas un intervalle réel!).

Solution 2.25.

a. $t \in]0; 1,40[$; b. $t \in [1,40; +\infty[$; c. $t \in]1,40; +\infty[$; d. $t \in]0; 1,40]$.

Solution 2.26.

b. $A \cup B =]-15; 15[$; $A \cap B = [-2; 12]$; $A \setminus B =]-15; -2[$; $B \setminus A =]12; 15[$.

Solution 2.27.

b. $A \cap B = [0; 2]$; $A \cup B =]-5; 5[$; $D \cap]-\infty; 2[= [-3; 2[$; $A \setminus C =]-5; -3]$; $D \setminus C = \{-3; 3\}$.

Solution 2.28.

a. $A =]-5; 2]$, $B = [0; 5[$, $C =]-3; 3[$, $D = [-3; 3]$, $E =]-\infty; 2[$, $F =]-5; +\infty[$, $G = [-3; +\infty[$, $H =]-\infty; -3]$. c. $A \cap B = [0; 2]$; $A \cup B =]-5; 5[$; $D \cap E = [-3; 2[$; $E \cap G = [-3; 2[$; $B \cup E =]-\infty; 5[$; $F \cup G =]-5; +\infty[$; $A \setminus C =]-5; -3]$; $D \setminus C = \{-3; 3\}$; $G \setminus H =]-3; +\infty[$.

Solution 2.29.

$A \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Solution 2.30.

$|S \cup I| = 30 - 4 = 26$. $|S \cap I| = 18 + 15 - 26 = 7$.

Solution 2.31.

a. $n(T \cup F) = 38 + 25 - 15 = 48$. b. $60 - 48 = 12$ employés. c. $38 - 15 = 23$ employés parlent anglais seulement.

Solution 2.32.

$|P \cup M \cup C| = 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$. Aucune discipline : $100 - 80 = 20$ élèves.

Solution 2.33.

On répartit les 80 élèves dans les 8 régions du diagramme, en partant du centre :

- les trois activités : 5;
- football et lecture seulement : $15 - 5 = 10$;
- football et musique seulement : $12 - 5 = 7$;
- lecture et musique seulement : $10 - 5 = 5$;
- football seulement : $35 - 10 - 7 - 5 = 13$;
- lecture seulement : $40 - 10 - 5 - 5 = 20$;
- musique seulement : $30 - 7 - 5 - 5 = 13$.

Total dans au moins une activité : $13 + 20 + 13 + 10 + 7 + 5 + 5 = 73$.

a. Aucune activité : $80 - 73 = 7$ élèves. b. Exactement une activité : $13 + 20 + 13 = 46$ élèves. c. Football seulement : **13** élèves.

Solution 2.34.

a. $(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)$. b. $6 = 3 \cdot 2$. □ c. 9 éléments : (i, j) avec $i, j \in \{1; 2; 3\}$. d. Un point du plan, de coordonnées (x, y) .

Solution 2.35.

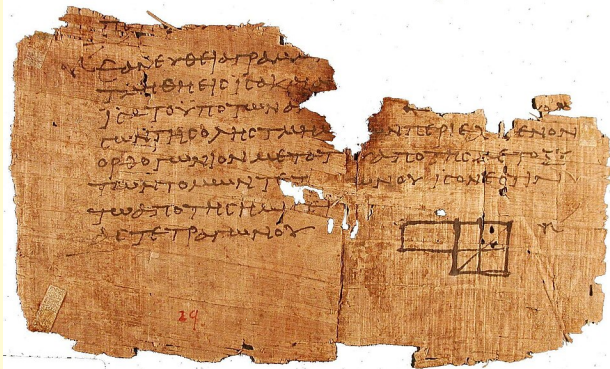
a. $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 4 \cdot 2 = 8$. b. $A \times B$ a 8 éléments, donc $2^8 = 256$ sous-ensembles. c. A a $2^4 = 16$ sous-ensembles, B a $2^2 = 4$ sous-ensembles; leur produit vaut $16 \cdot 4 = 64$, ce qui n'est **pas** égal à 256! Contrairement au cardinal, le nombre de sous-ensembles d'un produit cartésien ne se calcule pas en multipliant les nombres de sous-ensembles de chaque ensemble.

Chapitre 3

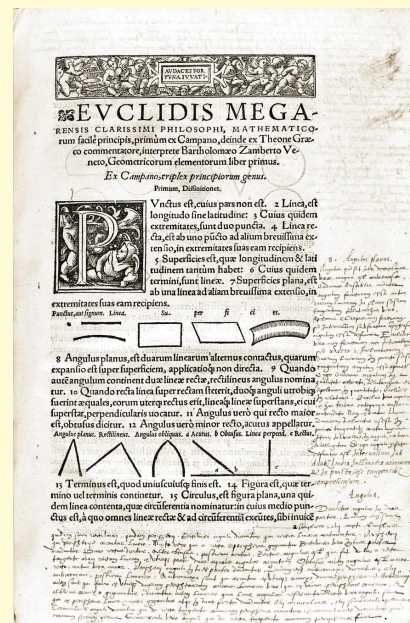
Argumenter et démontrer

Vers 300 avant notre ère, Euclide d'Alexandrie rassemble dans ses *Éléments* tout ce que les Grecs savent de la géométrie. Mais ce qui rend ce livre unique n'est pas ce qu'il contient, c'est la manière dont il le dit.

Euclide part de cinq postulats simples, admis sans preuve, et en déduit des centaines de théorèmes par la seule force du raisonnement. Aucune figure n'est une preuve. Aucune mesure n'est une preuve. Seule la logique compte.



Deux mille ans plus tard, nous faisons exactement pareil.¹



3.1 Propositions et connecteurs logiques

Définition 3.1 — *proposition*.

Une **proposition** (ou **énoncé**) est une phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse — pas les deux à la fois.

¹**Les faits** : Euclide d'Alexandrie, vers 300 av. J.-C., auteur des “*Éléments*” ; très peu de faits biographiques sûrs sur Euclide nous sont connus : on sait peu de choses de sa vie.

Exemple 3.1. « $2 + 2 = 4$ » est une proposition vraie. « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est une proposition fausse. « $x > 0$ » n'est pas une proposition (valeur de x inconnue) — c'est un **prédicat**.

Les **connecteurs logiques** permettent de combiner des propositions :

Définition 3.2 — *négation, conjonction, disjonction.*

Soient P et Q deux propositions.

- **Négation** $\neg P$: vraie si P est fausse.
- **Conjonction** $P \wedge Q$: vraie si P et Q sont toutes deux vraies.
- **Disjonction** $P \vee Q$: vraie si au moins l'une des deux est vraie.

3.2 Implication et équivalence

Définition 3.3 — *implication.*

L'**implication** $P \Rightarrow Q$ (lire : « P implique Q » ou «si P alors Q ») est fausse uniquement quand P est vraie et Q est fausse.

Dans $P \Rightarrow Q$, on appelle P l'**hypothèse** et Q la **conclusion**.

Définition 3.4 — *réciproque et contraposée.*

Soit l'implication $P \Rightarrow Q$.

- Sa **réciproque** est $Q \Rightarrow P$.
- Sa **contraposée** est $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Théorème 3.5 — *contraposée.*

Une implication et sa contraposée sont toujours simultanément vraies ou fausses :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

En revanche, une implication et sa réciproque sont indépendantes.

Exemple 3.2. Implication : «si n est pair, alors n^2 est pair».

Contraposée : «si n^2 est impair, alors n est impair». (équivalente)

Réciproque : «si n^2 est pair, alors n est pair». (vraie aussi, mais c'est un théorème distinct !)

Définition 3.6 — *équivalence.*

L'**équivalence** $P \iff Q$ signifie $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On dit que P et Q sont **équivalentes**.

3.3 Quantificateurs

Définition 3.7 — *quantificateurs*.

- $\forall x \in E, P(x)$: «pour tout x dans E , $P(x)$ est vraie» (**quantificateur universel**).
- $\exists x \in E, P(x)$: «il existe au moins un x dans E tel que $P(x)$ est vraie» (**quantificateur existentiel**).

Proposition 3.8 — *négation des quantificateurs*.

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x).$$

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x).$$

Exemple 3.3. La négation de «tout entier naturel est pair» est «il existe un entier naturel qui n'est pas pair» (vrai : 1).

3.4 Modes de raisonnement

Définition 3.9 — *axiome, conjecture, théorème, démonstration*.

Un **axiome** est une vérité admise sans démonstration, sur laquelle se fondent les théories mathématiques (par exemple : par un point donné passe une unique parallèle à une droite donnée).

Une **conjecture** est une supposition fondée sur des apparences, non (encore) démontrée. D'après le **principe du tiers exclu**, une conjecture est **soit vraie, soit fausse** — jamais les deux, jamais ni l'une ni l'autre. Si elle est vraie, elle l'est *sans exception*.

Une **démonstration** est un raisonnement qui établit la véracité d'une conjecture à partir d'axiomes, de définitions et de résultats déjà démontrés.

Un **théorème** est une conjecture qui a pu être démontrée.

Exemple 3.4. La conjecture de Goldbach — «tout nombre pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers» — a été énoncée en 1742 et n'est **toujours pas démontrée** à ce jour : ce n'est donc pas (encore) un théorème, malgré des millions d'exemples numériques qui la vérifient.

Proposition 3.10 — *chiffre des unités*.

Un entier positif n se termine par le chiffre i (avec $i \in \{0, 1, \dots, 9\}$) si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 10k + i$.

Définition 3.11 — *raisonnement direct.*

On démontre $P \Rightarrow Q$ en partant de P et en enchaînant des implications jusqu'à obtenir Q .

Définition 3.12 — *raisonnement par contraposée.*

On démontre $P \Rightarrow Q$ en prouvant $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Utile quand la contraposée est plus facile à manipuler.

Définition 3.13 — *raisonnement par l'absurde.*

On suppose P vraie et Q fausse (i.e. $\neg Q$ vraie), et on cherche une **contradiction**. Si on en trouve une, alors $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Définition 3.14 — *contre-exemple.*

Pour réfuter $\forall x \in E, P(x)$, il suffit d'exhiber **un seul** $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ est fausse.

Exemple 3.5. Réfuter : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 41$ est premier ».
Contre-exemple : $n = 40$ donne $40^2 + 40 + 41 = 41^2$, non premier.

Raisonnement par récurrence. Pour démontrer $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : supposer $P(n)$ vraie pour un n quelconque et démontrer $P(n+1)$.

Exemple. Montrer que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Init. : $n = 1 : 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. ✓

Hér. : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. ✓

3.5 Exercices

Exercice 3.1. Écrire la contraposée et la réciproque de chaque implication. Préciser si la réciproque est vraie ou fausse.

- a) Si n est divisible par 4, alors n est pair.
- b) Si $x > 0$, alors $x^2 > 0$.
- c) Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Exercice 3.2. Démontrer par l'absurde que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 3.3. Écrire la négation de chaque proposition, puis dire si la proposition originale est vraie ou fausse.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$

Exercice 3.4. Réfuter par un contre-exemple :

- a) « Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 2^n > n^2$ ».
- b) « Pour tout $x \in \mathbb{R}, |x + 1| = |x| + 1$ ».

Exercice 3.5. Démontrer directement que le produit de deux entiers impairs est impair.

Exercice 3.6. Écrire la contraposée et la réciproque de chaque implication. Préciser si la réciproque est vraie ou fausse.

- a) Si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales sont perpendiculaires.
- b) Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.
- c) Si n est premier et $n > 2$, alors n est impair.

Exercice 3.7. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. *Indication : utiliser le résultat de l'exercice 3.2 (si n^2 est pair, alors n est pair) et supposer $\sqrt{2} = p/q$ avec p/q irréductible.*

Exercice 3.8. Traduire chaque phrase en langage courant à l'aide de quantificateurs, puis dire si l'énoncé obtenu est vrai ou faux.

- a) Tout nombre réel possède un carré positif ou nul.
- b) Il existe un entier naturel plus grand que tous les autres.
- c) Chaque entier naturel non nul admet un diviseur premier.

Exercice 3.9. Réfuter par un contre-exemple :

- a) « Si $a^2 = b^2$, alors $a = b$ ».
- b) « Pour tout $n \in \mathbb{N}, n^2 - n + 11$ est premier ».
- c) « La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle ».

Exercice 3.10. Démontrer directement chaque affirmation.

- a) La somme de deux entiers pairs est paire.
- b) Si n est un multiple de 6, alors n est un multiple de 3.

Exercice 3.11. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier (par une preuve directe si vrai, par un contre-exemple si faux).

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est un multiple de 3 et de 4, alors n est un multiple de 12.
- b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(x + y)^2 = x^2 + y^2$.
- c) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n et $n + 1$ ne sont jamais tous les deux pairs.

Exercice 3.12. Traduire chaque implication en utilisant « condition nécessaire » ou « condition suffisante » (au choix, une seule formulation par affirmation).

- a) Si un nombre est un multiple de 10, alors il est un multiple de 5.
- b) Être majeur est nécessaire pour voter.
- c) Habiter à Genève est suffisant pour habiter en Suisse.

Exercice 3.13. Attention : la négation de « tous les élèves de la classe ont réussi le test » n'est **pas** « aucun élève n'a réussi le test ». Écrire la négation correcte de chaque affirmation.

- a) Tous les élèves de la classe ont réussi le test.
- b) Aucun triangle de cette figure n'est isocèle.
- c) Certains nombres premiers sont pairs.

Exercice 3.14. Pour chaque paire d'implications, dire si elles sont **équivalentes** (l'une est la contraposée de l'autre) ou **indépendantes** (l'une est la réciproque de l'autre).

- a) « Si n est pair, alors n n'est pas premier (pour $n > 2$) » et « si n est premier et $n > 2$, alors n est impair ».
- b) « Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » et « si $x^2 = 9$, alors $x = 3$ ».

Exercice 3.15. Les affirmations suivantes utilisent deux quantificateurs. Écrire leur négation, puis dire si l'affirmation de départ est vraie ou fausse.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = y$.

Exercice 3.16. Réfuter par un contre-exemple, ou démontrer si l'affirmation est vraie.

- a) « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est un multiple de 2 et de 3, alors n est un multiple de 5 ».
- b) « Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, si $a < b$ alors $a^2 < b^2$ ».

Exercice 3.17. Démontrer par l'absurde : il n'existe pas de plus grand entier naturel.

Exercice 3.18. Démontrer directement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.

Exercice 3.19. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3.20. Le mathématicien Jacques Ozanam (1640–1717) proposait le tour suivant : choisir un nombre A à trois chiffres; former B en échangeant le chiffre des centaines et celui des unités de A ; calculer C , la différence (positive) entre le plus grand et le plus petit des deux nombres A et B ; former D en échangeant à nouveau le chiffre des centaines et celui des unités de C ; calculer enfin $C + D$.

- a) Tester ce procédé avec $A = 481$, puis avec un autre nombre de ton choix.
- b) Énoncer une conjecture sur le résultat obtenu.
- c) (MA2) Démontrer cette conjecture en notant $A = 100a + 10b + c$ (avec $a > c$, pour fixer les idées).

Exercice 3.21. En utilisant la proposition sur le chiffre des unités, écrire chaque conjecture sous forme d'implication, puis dire si elle est vraie ou fausse.

- a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n + 3$ se termine par 3.
- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10n + 4$ se termine par 4.
- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n$ ne se termine jamais par 5.

Exercice 3.22. Pour chacune des affirmations suivantes : identifier l'hypothèse et la conclusion, l'écrire sous la forme « si..., alors... », puis donner sa réciproque et sa contraposée. On ne demande pas de démontrer les affirmations elles-mêmes.

- a) Tous les félins sont carnivores.
- b) S'il gèle, les routes sont glissantes.

Exercice 3.23. On suppose vraie l'implication : «s'il neige quand je sors, alors je mets mes gants».

- a) Tu constates que je n'ai pas mes gants. Tu en déduis qu'il ne neigeait pas quand je suis sorti(e).
- b) Tu constates que j'ai mes gants. Tu en déduis qu'il neigeait quand je suis sorti(e).

Dans chacun des deux cas, s'agit-il d'un raisonnement basé sur la **contraposée** (donc valide) ou sur la **réciproque** (donc non valide en général) ?

Exercice 3.24. Démontrer la conjecture suivante : le produit d'un multiple de 8 et d'un nombre entier se terminant par 5 est toujours un multiple de 10.

Exercice 3.25. On admet le critère suivant : un entier $n = 10k + m$ (où m est le chiffre des unités et k le nombre de dizaines) est divisible par 7 si et seulement si $k + 5m$ est divisible par 7.

- a) Vérifier ce critère sur $n = 658$ ($658 = 65 \cdot 10 + 8$).
- b) Démontrer ce critère dans le cas général. *Indication : on pourra utiliser que $50 \equiv 1 \pmod{7}$, c'est-à-dire que $50 - 1 = 49$ est un multiple de 7.*

3.6 Résumé du chapitre

Vocabulaire de la démonstration

- **Axiome** : vérité admise sans démonstration
- **Conjecture** : supposition non (encore) démontrée — soit vraie, soit fausse (tiers exclu)
- **Théorème** : conjecture qui a été démontrée
- **Démonstration** : raisonnement établissant la véracité d'une conjecture à partir d'axiomes et de résultats déjà démontrés
- n se termine par le chiffre $i \iff n = 10k + i, k \in \mathbb{N}$

Implication et équivalence

- $P \Rightarrow Q$: fausse uniquement si P vraie et Q fausse
- Contraposée de $P \Rightarrow Q$: $\neg Q \Rightarrow \neg P$ — **toujours équivalente**
- Réciproque de $P \Rightarrow Q$: $Q \Rightarrow P$ — **indépendante**
- $P \iff Q$: $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

Quantificateurs

- $\forall x \in E, P(x)$ — vrai pour *tous* les x
- $\exists x \in E, P(x)$ — vrai pour *au moins un* x
- Négation : $\neg(\forall x, P) \iff \exists x, \neg P$
- Négation : $\neg(\exists x, P) \iff \forall x, \neg P$

Modes de raisonnement

- **Direct** : chaîne d'implications $P \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$
 - **Contraposée** : démontrer $\neg Q \Rightarrow \neg P$
 - **Absurde** : supposer $P \wedge \neg Q$ et trouver une contradiction
 - **Contre-exemple** : un seul suffit pour réfuter un $\forall$
-

3.7 QCM — Argumenter et démontrer

Une seule réponse correcte par question.

1. Quelle est la contraposée de «si n est pair, alors n^2 est pair»?
 - a) Si n^2 est pair, alors n est pair.
 - b) Si n est impair, alors n^2 est impair.
 - c) Si n^2 est impair, alors n est impair.
 - d) Si n est pair, alors n^2 est impair.

2. L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse quand :
 - a) P est fausse et Q est vraie
 - b) P est vraie et Q est vraie
 - c) P est vraie et Q est fausse
 - d) P est fausse et Q est fausse

3. Quelle est la négation de $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$?
 - a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$
 - b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$
 - c) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
 - d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$

4. Pour réfuter l'assertion «tout nombre premier est impair», on peut :
 - a) Montrer que tous les nombres premiers sont impairs.
 - b) Exhiber un nombre premier pair.
 - c) Montrer qu'il existe un nombre impair non premier.
 - d) Utiliser la contraposée.

5. Une implication et sa réciproque sont :
 - a) Toujours toutes deux vraies.
 - b) Toujours simultanément vraies ou fausses.
 - c) Indépendantes — l'une peut être vraie et l'autre fausse.
 - d) Toujours toutes deux fausses.

6. Dans un raisonnement par l'absurde pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on suppose :
 - a) P vraie et Q vraie
 - b) P fausse et Q vraie
 - c) P vraie et Q fausse
 - d) P fausse et Q fausse

7. $P \iff Q$ est équivalent à :

- a) $P \Rightarrow Q$ seulement
- b) $Q \Rightarrow P$ seulement
- c) $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
- d) $\neg P \Rightarrow \neg Q$

8. Laquelle de ces propositions est vraie ?

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- d) $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 < x$

9. Quelle est la différence entre une conjecture et un théorème ?

- a) Aucune, ce sont des synonymes.
- b) Une conjecture est fausse, un théorème est vrai.
- c) Un théorème est une conjecture qui a été démontrée.
- d) Une conjecture concerne les nombres, un théorème la géométrie.

10. D'après la proposition du chiffre des unités, un entier n se termine par 7 si et seulement si :

- a) $n = 7k$, avec $k \in \mathbb{N}$
- b) $n = 10k + 7$, avec $k \in \mathbb{N}$
- c) $n/10 = 7$
- d) $n - 7$ est premier

Réponses : 1-c 2-c 3-b 4-b 5-c 6-c 7-c 8-c 9-c 10-b

3.8 Corrigés

Solution 3.1.

- a) Contraposée : si n est impair, alors n n'est pas divisible par 4. Réciproque : si n est pair, alors n est divisible par 4. **Fausse** ($n = 2$).
- b) Contraposée : si $x^2 \leq 0$, alors $x \leq 0$. Réciproque : si $x^2 > 0$, alors $x > 0$. **Fausse** ($x = -1$).
- c) Contraposée : si f n'est pas continue en a , alors f n'est pas dérivable en a . Réciproque : si f est continue en a , alors f est dérivable en a . **Fausse** ($f(x) = |x|$ en 0).

Solution 3.2.

Supposons n^2 pair et n impair. Alors $n = 2k + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, qui est impair. Contradiction avec n^2 pair. Donc n est pair.

Solution 3.3.

- a) Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$. Prop. **vraie**.
- b) Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$. Prop. **fausse**.
- c) Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$. Prop. **vraie** (prendre $y = -x$).

Solution 3.4.

- a) $n = 4 : 2^4 = 16 = 4^2$. Pas strictement supérieur. (Ou $n = 3 : 8 < 9$.)
- b) $x = -2 : |-2 + 1| = 1$ mais $|-2| + 1 = 3$. Faux.

Solution 3.5.

Soient $m = 2p + 1$ et $n = 2q + 1$ deux entiers impairs. Alors $mn = (2p + 1)(2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1 = 2(2pq + p + q) + 1$, qui est impair.

Solution 3.6.

- a) Contraposée : si les diagonales d'un quadrilatère ne sont pas perpendiculaires, alors ce n'est pas un carré. Réciproque : si les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires, alors c'est un carré. **Fausse** (un losange non carré convient).
- b) Contraposée : si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $ab \neq 0$. Réciproque : si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$. **Vraie**.
- c) Contraposée : si n est pair, alors n n'est pas premier ou $n \leq 2$. Réciproque : si n est impair, alors n est premier et $n > 2$. **Fausse** ($n = 9$).

Solution 3.7.

Supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. On peut alors écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, et p/q irréductible (fraction déjà simplifiée). En élevant au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc p est pair (exercice 3.2). On écrit $p = 2k$, d'où $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q est pair aussi. Mais alors p et q sont tous deux pairs, ce qui contredit le fait que p/q était irréductible. Contradiction, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solution 3.8.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$. **Vrai.**
- b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \geq m$. **Faux** ($\mathbb{N}$ n'est pas majoré : pour tout n , $n + 1$ est encore plus grand).
- c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p$ premier, $p \mid n$. **Vrai.**

Solution 3.9.

- a) $a = 2, b = -2 : a^2 = b^2 = 4$ mais $a \neq b$.
- b) $n = 11 : 11^2 - 11 + 11 = 121$, non premier ($121 = 11^2$).
- c) $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont irrationnels, mais $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$.

Solution 3.10.

- a) Soient $m = 2p$ et $n = 2q$ deux entiers pairs. Alors $m + n = 2p + 2q = 2(p + q)$, qui est pair.
- b) Si n est multiple de 6, alors $n = 6k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Donc $n = 3(2k)$, qui est bien un multiple de 3.

Solution 3.11.

- a) **Vraie.** 3 et 4 sont premiers entre eux, donc si $3 \mid n$ et $4 \mid n$, alors $12 \mid n$.
- b) **Fausse.** $x = y = 1 : (1 + 1)^2 = 4$ mais $1^2 + 1^2 = 2$.
- c) **Vraie.** Deux entiers consécutifs ont toujours des parités différentes (l'un est pair, l'autre impair).

Solution 3.12.

- a) Être multiple de 10 est une condition **suffisante** pour être multiple de 5 (mais pas nécessaire : 15 est multiple de 5 sans être multiple de 10).
- b) Si l'on vote, alors on est majeur : « si p , alors q » avec p = « on vote », q = « on est majeur ».
- c) Si l'on habite à Genève, alors on habite en Suisse : « si p , alors q ».

Solution 3.13.

- a) Il existe (au moins) un élève de la classe qui n'a **pas** réussi le test. (« Aucun élève n'a réussi » est une affirmation bien plus forte, non équivalente à la négation.)
- b) Il existe (au moins) un triangle de cette figure qui est isocèle.
- c) Aucun nombre premier n'est pair. (Cette négation est en réalité **fausse** : 2 est un nombre premier pair — donc l'affirmation de départ est **vraie**.)

Solution 3.14.

- a) **Équivalentes** (l'une est la contraposée de l'autre : nier « n premier et $n > 2$ » donne, par De Morgan, « n n'est pas premier ou $n \leq 2$ », ce qui, pour $n > 2$, revient à « n n'est pas premier »).
- b) **Indépendantes** : ce sont réciproques l'une de l'autre. La première est vraie, la seconde **fausse** ($x = -3$ vérifie $x^2 = 9$ mais $x \neq 3$).

Solution 3.15.

- a) Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \leq x$. L'affirmation de départ est **vraie** (prendre $y = x + 1$, qui est toujours strictement plus grand que x).
- b) Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy \neq y$. L'affirmation de départ est **vraie** (prendre $x = 1$: alors $1 \cdot y = y$ pour tout y).

Solution 3.16.

- a) **Fausse**. $n = 6$: multiple de 2 et de 3, mais pas de 5.
- b) **Fausse**. $a = -3, b = 1$: $a < b$, mais $a^2 = 9 > 1 = b^2$.

Solution 3.17.

Supposons qu'il existe un plus grand entier naturel N , c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq N$. Or $N + 1 \in \mathbb{N}$ et $N + 1 > N$, ce qui contredit l'hypothèse que N est le plus grand. Contradiction, donc un tel N n'existe pas.

Solution 3.18.

Parmi deux entiers consécutifs n et $n + 1$, l'un est pair et l'autre impair (exercice 3.11c). Le produit d'un entier par un nombre pair est pair : si n est pair, $n = 2k$ et $n(n + 1) = 2k(n + 1)$; si $n + 1$ est pair, $n + 1 = 2k$ et $n(n + 1) = 2kn$. Dans les deux cas, $n(n + 1)$ est un multiple de 2, donc pair.

Solution 3.19.

Initialisation : $n = 1 : 1^2 = 1$ et $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. ✓

Hérédité : on suppose la formule vraie pour un n quelconque. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) = (n+1) \cdot \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}.$$

Or $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

qui est bien la formule au rang $n + 1$. ✓ Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Solution 3.20.

- a) $A = 481, B = 184. C = 481 - 184 = 297. D = 792. C + D = 297 + 792 = 1089$.
- b) Conjecture : le résultat final est toujours 1089 (lorsque $a \neq c$).
- c) Notons $A = 100a + 10b + c$ et $B = 100c + 10b + a$, avec $a > c$ (le cas $a < c$ est symétrique, et $a = c$ donne $C = 0$). Alors $C = A - B = 100(a - c) - (a - c) = 99(a - c)$. Comme $1 \leq a - c \leq 9$, on peut écrire $a - c$ sous la forme d'un chiffre unique, et $C = 99(a - c)$ a pour chiffre des centaines $(a - c - 1)$, des dizaines 9, et des unités $(10 - (a - c))$. En échangeant centaines et unités, D a pour chiffre des centaines $(10 - (a - c))$, des dizaines 9, et des unités $(a - c - 1)$. En additionnant $C + D$: les unités $(10 - (a - c)) + (a - c - 1) = 9$, les dizaines $9 + 9 = 18$ (on retient 1), les centaines $(a - c - 1) + (10 - (a - c)) + 1 = 10$ (on retient 1). On obtient bien 1089.

Solution 3.21.

- a) «Si $n \in \mathbb{N}$, alors $3n + 3$ se termine par 3». **Fausse** : $3n + 3$ se termine par 3 seulement quand n est un multiple de 10 (par exemple $n = 1$ donne $3 \cdot 1 + 3 = 6$, qui ne se termine pas par 3).
- b) «Si $n \in \mathbb{N}$, alors $10n + 4$ se termine par 4». **Vraie** : $10n + 4 = 10 \cdot n + 4$ est bien de la forme $10k + 4$ avec $k = n$.
- c) «Si $n \in \mathbb{N}$, alors $2n$ ne se termine pas par 5». **Vraie** : $2n$ est toujours pair, donc son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8, jamais 5.

Solution 3.22.

- a) Hypothèse : « être un félin » ; conclusion : « être carnivore ». Forme : « si un animal est un félin, alors il est carnivore ». Réciproque : « si un animal est carnivore, alors c'est un félin » (fausse : un loup est carnivore mais n'est pas un félin). Contraposée : « si un animal n'est pas carnivore, alors ce n'est pas un félin ».
- b) Hypothèse : « il gèle » ; conclusion : « les routes sont glissantes ». Forme : déjà sous cette forme. Réciproque : « si les routes sont glissantes, alors il gèle » (les routes peuvent être glissantes pour d'autres raisons, par ex. la pluie ou l'huile). Contraposée : « si les routes ne sont pas glissantes, alors il ne gèle pas ».

Solution 3.23.

- a) C'est la **contraposée** : « pas de gants $\Rightarrow$ pas neigé » est équivalente à l'implication de départ. Raisonement **valide**.
- b) C'est la **réciproque** : « gants $\Rightarrow$ neige ». Ce raisonnement n'est **pas valide** : je peux avoir mes gants pour une autre raison (il fait juste froid, par exemple).

Solution 3.24.

Soit a un multiple de 8 : $a = 8k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit b un entier se terminant par 5 : $b = 10m + 5$ avec $m \in \mathbb{N}$ (proposition sur le chiffre des unités). Alors

$$ab = 8k(10m + 5) = 80km + 40k = 10(8km + 4k),$$

qui est bien un multiple de 10 (car $8km + 4k \in \mathbb{Z}$).

Solution 3.25.

- a) $k + 5m = 65 + 5 \cdot 8 = 65 + 40 = 105 = 7 \cdot 15$, multiple de 7. Et $658 = 7 \cdot 94$, multiple de 7 aussi. ✓
- b) Supposons $k + 5m = 7p$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $m = 7p - k$ (en divisant par 5... plus simplement, exprimons k : $k = 7p - 5m$). Alors

$$n = 10k + m = 10(7p - 5m) + m = 70p - 50m + m = 70p - 49m = 7(10p - 7m),$$

qui est bien un multiple de 7. (La réciproque se démontre de façon analogue.)

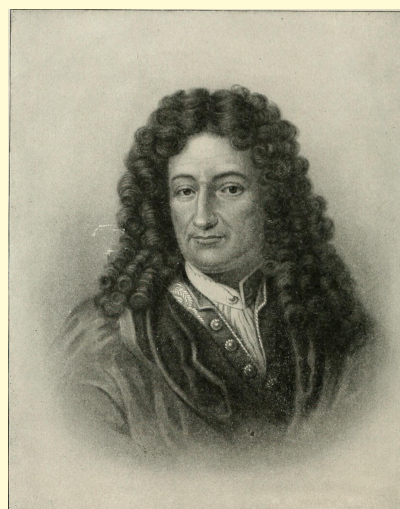
Chapitre 4

Introduction aux fonctions

Leibniz, à la fin du XVII^e siècle, cherche un mot pour désigner une idée simple et puissante : la dépendance entre deux grandeurs.

Quand la température change, la pression change. Quand le temps passe, la position change. Quand le revenu augmente, la consommation augmente.

Il invente le mot fonction — du latin *functio*, accomplissement. Une fonction accomplit quelque chose : elle transforme une entrée en une sortie. Toute la mathématique moderne repose sur cette idée.¹



4.1 Définition et vocabulaire

Définition 4.1 — fonction.

Une **fonction** f de A vers B est une règle qui associe à chaque élément $x \in A$ **exactement un** élément $f(x) \in B$. On note $f : A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$.

- A est le **domaine** (ou ensemble de départ)
- B est le **codomaine** (ou ensemble d'arrivée)
- $f(x)$ est l'**image** de x par f
- x est un **antécédent** de $f(x)$

Remarque 4.1. Chaque $x \in A$ a exactement une image. En revanche, un même $y \in B$ peut avoir plusieurs antécédents, ou aucun.

Exemple 4.1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. L'image de 3 est $f(3) = 9$. Les antécédents de 9 sont 3 et -3 . Le nombre -1 n'a pas d'antécédent.

¹**Les faits** : Leibniz est le premier à employer le mot “functio” en 1673 (usage restreint, lié aux courbes), puis à l'utiliser de façon plus explicite dès 1692.

4.2 Domaine de définition

Définition 4.2 — domaine de définition.

Le **domaine de définition** D_f d'une fonction f est l'ensemble de toutes les valeurs x pour lesquelles $f(x)$ est bien définie.

Exemple 4.2.

- $f(x) = \frac{1}{x-2} : D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $g(x) = \sqrt{x-1} : D_g = [1, +\infty)$
- $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-3} : D_h = [0, +\infty) \setminus \{3\} = [0, 3) \cup (3, +\infty)$

4.3 Représentation graphique

Définition 4.3 — graphe.

Le **graphe** de $f : A \rightarrow B$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$:

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Proposition 4.4 — test de la droite verticale.

Une courbe du plan est le graphe d'une fonction si et seulement si toute droite verticale la coupe en **au plus un point**.

4.4 Monotonie

Définition 4.5 — fonction croissante / décroissante.

Soit f définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f est **décroissante** sur I si : $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- f est **strictement croissante** (resp. décroissante) si les inégalités sont strictes.

4.5 Extrema

Définition 4.6 — *maximum et minimum.*

- f admet un **maximum global** en x_0 si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- f admet un **minimum global** en x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- On parle d'**extremum local** si l'inégalité ne vaut que sur un voisinage de x_0 .

Exemple 4.3. $f(x) = x^2$ admet un minimum global en $x_0 = 0$ avec $f(0) = 0$. Elle n'a pas de maximum.

4.6 Ordonnée à l'origine, zéros, tableau de signes

Définition 4.7 — *ordonnée à l'origine, ensemble des zéros.*

Soit f une fonction.

- L'**ordonnée à l'origine** de f est $f(0)$ (quand elle existe) — c'est l'ordonnée du point où le graphe de f coupe l'axe des ordonnées.
- L'**ensemble des zéros** de f , noté Z_f , est l'ensemble des antécédents de 0 — ce sont les abscisses des points où le graphe coupe l'axe des abscisses : $Z_f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in D_f \mid f(x) = 0\}$.

Définition 4.8 — *tableau de signes.*

Le **tableau de signes** de f indique, pour chaque intervalle de D_f , si $f(x)$ est positive, négative ou nulle. On le construit en plaçant d'abord les éléments de Z_f (où $f(x) = 0$), puis en déterminant le signe de f entre deux zéros consécutifs (par exemple en évaluant f en un point de l'intervalle).

Exemple 4.4. Soit $f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. L'ordonnée à l'origine est $f(0) = -6$. Les zéros sont solutions de $(x+2)(x-3) = 0$, donc $Z_f = \{-2, 3\}$. Le tableau de signes est :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Ainsi f est négative (ou nulle) sur $[-2, 3]$, et positive (ou nulle) sur $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.

4.7 Quelques fonctions élémentaires

Définition 4.9 — fonctions élémentaires.

Voici quelques fonctions de référence, à connaître pour la suite du cours :

Nom	Expression	Domaine	Parité / monotonie
identité	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	impaire, croissante
carré	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	paire
cube	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	impaire, croissante
racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	croissante
inverse	$f(x) = 1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	impaire
valeur absolue	$f(x) = x $	$\mathbb{R}$	paire

Ces fonctions serviront de briques de base : la plupart des fonctions étudiées dans ce cours s'obtiennent en les combinant ou en les transformant.

4.8 Image et préimage

Définition 4.10 — image d'un ensemble.

L'**image** de $A' \subseteq D_f$ par f est :

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}.$$

L'**image totale** de f est $f(D_f)$, notée aussi $\text{Im}(f)$.

Définition 4.11 — préimage.

La **préimage** (ou image réciproque) de $B' \subseteq B$ est :

$$f^{-1}(B') = \{x \in D_f \mid f(x) \in B'\}.$$

Exemple 4.5. Pour $f(x) = x^2 : f(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\}$. $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$. $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$.

4.9 Variation directe et inverse

Définition 4.12 — *variation directe.*

y varie **directement** (ou proportionnellement) par rapport à x s'il existe une constante réelle k , appelée **constante de proportionnalité**, telle que

$$y = kx.$$

Plus généralement, y varie directement comme x^n s'il existe k tel que $y = kx^n$.

Exemple 4.6. La distance parcourue à vitesse constante varie directement comme le temps : $d = kt$. Si une voiture parcourt 180 km en 2 h, alors $k = 90$ et $d = 90t$. En 3,5 h, elle parcourt $d = 90 \times 3,5 = 315$ km.

Définition 4.13 — *variation inverse.*

y varie **inversement** par rapport à x s'il existe une constante k telle que

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0.$$

Plus généralement, y varie inversement comme x^n si $y = k/x^n$.

Exemple 4.7. Pour un travail donné, le temps nécessaire varie inversement comme le nombre d'ouvriers : $t = k/n$. Si 4 ouvriers terminent le travail en 15 jours, alors $k = 15 \times 4 = 60$, donc $t = 60/n$. Avec 6 ouvriers, $t = 60/6 = 10$ jours.

Remarque 4.2. Méthode générale pour un problème de variation : **1)** écrire l'équation de variation; **2)** substituer les valeurs initiales pour trouver k ; **3)** réécrire l'équation avec la valeur de k ; **4)** substituer les valeurs demandées pour répondre à la question.

Variation conjointe et combinée.

y varie **conjointement** comme x et z s'il existe k tel que $y = kxz$ (ici, le mot « et » se traduit par un *produit*, et non une somme). On peut aussi combiner variation directe et inverse dans une même formule, comme $y = \frac{kx}{z^2}$.

Exemple. Les intérêts simples I sur un capital p (fixé) varient conjointement comme le taux d'intérêt r et la durée t : $I = prt$, où p joue ici le rôle de constante de proportionnalité.

MA2 — Approfondissement

Parité et périodicité.

f est **paire** si D_f est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = f(x)$ pour tout x — graphe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ — graphe symétrique par rapport à l'origine.

f est **périodique de période** $T > 0$ si $f(x + T) = f(x)$ pour tout x — le graphe se répète tous les T unités.

Exemples. $x \mapsto x^2$ est paire. $x \mapsto x^3$ est impaire. $x \mapsto \sin x$ est impaire et périodique de période 2π .

4.10 Exercices

Exercice 4.1. Déterminer le domaine de définition de chaque fonction :

a) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

b) $g(x) = \sqrt{2x-6}$

c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

d) $k(x) = \sqrt{x^2-4}$

Exercice 4.2. Soit $f(x) = 2x^2 - 3$.

a) Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{3})$.

b) Trouver les antécédents de 5.

c) Quel est l'ensemble image $\text{Im}(f)$?

Exercice 4.3. Soit $f(x) = -x^2 + 4x$.

a) Montrer que f est croissante sur $(-\infty, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty)$.

b) Quel est le maximum de f ?

Exercice 4.4. Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont des graphes de fonctions? Justifier avec le test de la droite verticale.

a) Un cercle de rayon 1 centré à l'origine.

b) La parabole $y = x^2 - 1$.

c) La courbe définie par $x = y^2$.

Exercice 4.5. Soit $f(x) = |x| - 1$.

a) Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

- b) Calculer $f^{-1}([-1, 1])$.
- c) f admet-elle un minimum ? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 4.6. On donne le tableau de valeurs suivant d'une fonction f (dont on ne connaît pas l'expression algébrique) :

x	-3	-1	0	1	2	4	5
$f(x)$	12	0	-3	-4	-3	5	12

- a) Donner l'image de 2 par f .
- b) Donner un antécédent de 12 par f . Y en a-t-il d'autres, d'après ce tableau ?
- c) Donner l'ordonnée à l'origine de f .
- d) D'après ce tableau, f semble-t-elle admettre un minimum ? Si oui, lequel, et en quel point ?

Exercice 4.7. Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

- a) Déterminer l'ordonnée à l'origine de f .
- b) Déterminer l'ensemble des zéros Z_f de f (*indication : factoriser, ou chercher deux nombres dont le produit fait -5 et la somme 4*).
- c) Dresser le tableau de signes de f .
- d) En déduire l'ensemble des x pour lesquels $f(x) \geq 0$.

Exercice 4.8. Parmi les fonctions élémentaires du cours : laquelle (ou lesquelles)...

- a) ...est strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$?
- b) ...est paire ?
- c) ...n'est pas définie en $x = 0$?
- d) ...est impaire mais pas définie sur tout $\mathbb{R}$?

Exercice 4.9. Le prix d'un diamant (à qualité égale) varie directement comme le carré de son poids en carats. Un diamant de 2 carats vaut 800 CHF.

- a) Trouver la constante de proportionnalité k .
- b) Quel est le prix d'un diamant de 3 carats, de même qualité ?

Exercice 4.10. L'intensité sonore perçue (en unités arbitraires) varie inversement comme le carré de la distance à la source. À 10 m d'un haut-parleur, l'intensité est de 80 unités.

- a) Trouver la constante de proportionnalité k .
- b) Quelle est l'intensité perçue à 20 m ?

Exercice 4.11. Les intérêts simples I sur un capital p placé au taux r pendant une durée t (en années) vérifient $I = prt$. Un certain capital placé à un taux de 3 % pendant 4 ans rapporte 180 CHF d'intérêts.

- Trouver ce capital p .
- Quel intérêt ce même capital rapporterait-il s'il était placé à 5 % pendant 6 ans ?

Exercice 4.12. Pour chacun des ensembles de couples suivants, dire s'il définit une fonction, puis donner son domaine et son image.

- $F = \{(2, 5), (3, 5), (4, 7)\}$
- $G = \{(1, 2), (1, -2), (3, 4)\}$
- $H = \{(-2, 0), (0, 3), (2, 0), (5, -1)\}$

Exercice 4.13. Le diagramme sagittal ci-dessous associe à chaque élément du domaine $\{1, 3, 5, 7\}$ l'élément correspondant : $1 \mapsto 4$, $3 \mapsto 4$, $5 \mapsto 9$, $7 \mapsto 12$.

- Cette correspondance définit-elle une fonction ? Justifier.
- Donner le domaine et l'image de cette relation.

Exercice 4.14. On considère les nuages de points suivants.

- $(2, 1), (2, 4), (5, 3)$
- $(1, 3), (2, 5), (4, 3), (6, -1)$

Pour chacun, dire si l'ensemble de points peut représenter le graphe d'une fonction, en appliquant le test de la droite verticale.

Exercice 4.15. Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

- Calculer $f(3)$ et $f(-1)$.
- Calculer et simplifier $f(a + 1)$.

Exercice 4.16. On donne l'équation $3x - 2y = 8$, qui définit y comme fonction de x .

- Résoudre cette équation pour y , puis remplacer y par la notation $f(x)$.
- Calculer $f(-2)$ et $f(a)$.

Exercice 4.17. Un fermier dispose de 40 mètres de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire, en utilisant un mur déjà existant comme l'un des côtés (donc pas besoin de clôture de ce côté-là). On note x la longueur (en mètres) de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

- a) Exprimer la longueur du côté parallèle au mur en fonction de x , puis exprimer l'aire A de l'enclos en fonction de x .
- b) Quel est le domaine des valeurs de x qui ont un sens pour ce problème?
- c) Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale? Quelle est alors cette aire? *Indication : $A(x)$ est de la forme $-2x^2 + 40x = -2(x - 10)^2 + 200$.*

4.11 Résumé du chapitre

Vocabulaire

- $f : A \rightarrow B, x \mapsto f(x)$ — un x a exactement une image
- D_f — domaine de définition (là où f est bien définie)
- $f(x)$ — image de x | x — antécédent de $f(x)$
- $\text{Im}(f)$ — ensemble de toutes les images

Relation vs fonction

- Une fonction : chaque élément du domaine a *exactement une* image
- Deux couples de même première composante et d'images différentes $\Rightarrow$ pas une fonction
- Test de la droite verticale : toute verticale coupe le graphe en au plus un point

Domaines courants

- $\frac{1}{g(x)}$: exclure les zéros de g
- $\sqrt{g(x)}$: résoudre $g(x) \geq 0$
- Combinaison : intersecter les contraintes

Ordonnée à l'origine, zéros, signe

- Ordonnée à l'origine : $f(0)$
- Ensemble des zéros Z_f : antécédents de 0, c'est-à-dire $\{x \mid f(x) = 0\}$
- Tableau de signes : signe de $f(x)$ entre deux zéros consécutifs

Fonctions élémentaires

- identité x , carré x^2 , cube x^3 : définies sur $\mathbb{R}$
- racine carrée $\sqrt{x}$: définie sur $[0, +\infty)$
- inverse $1/x$: définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, impaire
- valeur absolue $|x|$: définie sur $\mathbb{R}$, paire

Variation directe et inverse

- Directe : $y = kx$ (ou $y = kx^n$) — y et x augmentent/diminuent ensemble
- Inverse : $y = k/x$ (ou $y = k/x^n$) — x augmente $\Rightarrow y$ diminue
- Conjointe : $y = kxz$ | Méthode : trouver k avec les valeurs initiales, puis l'appliquer

Monotonie et extrema

- Croissante sur I : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
 - Décroissante sur I : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
 - Maximum global en x_0 : $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout x
 - Test graphique : droite verticale coupe le graphe en au plus un point
-

4.12 QCM — Introduction aux fonctions

Une seule réponse correcte par question.

1. Quel est le domaine de définition de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$?
 - a) $[3, +\infty)$
 - b) $(3, +\infty)$
 - c) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
 - d) $(-\infty, 3)$

2. Soit $f(x) = x^2 - 1$. Quels sont les antécédents de 3 ?
 - a) $x = 2$ seulement
 - b) $x = \pm\sqrt{2}$
 - c) $x = \pm 2$
 - d) Pas d'antécédent

3. Laquelle de ces courbes n'est **pas** le graphe d'une fonction ?
 - a) $y = x^3$
 - b) $y = \sqrt{x}$
 - c) $x^2 + y^2 = 1$
 - d) $y = |x|$

4. $f(x) = -x + 2$ est :
 - a) Croissante sur $\mathbb{R}$
 - b) Décroissante sur $\mathbb{R}$
 - c) Croissante sur $(0, +\infty)$ et décroissante sur $(-\infty, 0)$
 - d) Ni croissante ni décroissante

5. Quel est l'ensemble image de $f(x) = x^2 + 1$?
 - a) $\mathbb{R}$
 - b) $[0, +\infty)$
 - c) $[1, +\infty)$
 - d) $(1, +\infty)$

6. Soit $f(x) = 2x - 4$. Quel est $f^{-1}(\{0\})$?
 - a) $\{0\}$
 - b) $\{-4\}$
 - c) $\{2\}$
 - d) $\{4\}$

7. Quelle affirmation est vraie pour toute fonction f ?
 - a) $f \circ f = \text{id}$
 - b) $f \circ f = f$
 - c) $f \circ f = f \circ \text{id}$
 - d) $f \circ f = f \circ f \circ f$

- a) Tout élément du codomaine a un antécédent.
- b) Tout élément du domaine a exactement une image.
- c) Une image ne peut avoir qu'un seul antécédent.
- d) Le domaine et le codomaine sont toujours égaux.

8. $f(x) = |x|$ admet :

- a) Un maximum en $x = 0$
- b) Un minimum en $x = 0$
- c) Aucun extremum
- d) Un minimum en $x = 1$

9. L'ordonnée à l'origine d'une fonction f est :

- a) $f^{-1}(\{0\})$
- b) l'ensemble des zéros de f
- c) $f(0)$
- d) la pente du graphe de f

10. Parmi les fonctions élémentaires du cours, laquelle est impaire mais n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$?

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = |x|$
- c) $f(x) = 1/x$
- d) $f(x) = x^3$

11. Si y varie inversement comme x , et que $y = 6$ quand $x = 2$, combien vaut y quand $x = 4$?

- a) 3
- b) 12
- c) 24
- d) 1,5

Réponses : 1-b 2-c 3-c 4-b 5-c 6-c 7-b 8-b 9-c 10-c 11-a

4.13 Corrigés

Solution 4.1.

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
- b) $2x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3; D_g = [3, +\infty)$
- c) $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1; D_h = (1, +\infty)$
- d) $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 2; D_k = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Solution 4.2.

- a) $f(0) = -3, f(2) = 5, f(-2) = 5, f(\sqrt{3}) = 3.$
- b) $2x^2 - 3 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$
- c) $f(x) = 2x^2 - 3 \geq -3$ pour tout x , et prend toutes les valeurs ≥ -3 . $\text{Im}(f) = [-3, +\infty).$

Solution 4.3.

- a) Soient $x_1 < x_2 \leq 2$. $f(x_2) - f(x_1) = -(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(4 - x_1 - x_2)$.
Comme $x_2 > x_1$ et $x_1 + x_2 \leq 4$, on a $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$: f croissante.
✓ Raisonement analogue pour la décroissance.
- b) Maximum en $x_0 = 2$: $f(2) = -4 + 8 = 4.$

Solution 4.4.

- a) Non — la droite $x = 0$ coupe le cercle en $(0, 1)$ et $(0, -1)$: deux points.
- b) Oui — toute droite verticale coupe la parabole en exactement un point.
- c) Non — la droite $x = 1$ coupe en $(1, 1)$ et $(1, -1)$.

Solution 4.5.

- a) $|x| - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. $f^{-1}(\{0\}) = \{-1, 1\}.$
- b) $-1 \leq |x| - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$. $f^{-1}([-1, 1]) = [-2, 2].$
- c) Oui, minimum global en $x_0 = 0$: $f(0) = -1.$

Solution 4.6.

- a) $f(2) = -3$.
- b) $f(-3) = 12$, donc -3 est un antécédent de 12. D'après le tableau, $f(5) = 12$ aussi : 5 est un autre antécédent.
- c) $f(0) = -3$.
- d) Le tableau suggère un minimum de -4 en $x = 1$ (mais on ne peut pas être totalement certain sans connaître f entre les valeurs données).

Solution 4.7.

- a) $f(0) = 5$.
- b) $-x^2 + 4x + 5 = -(x^2 - 4x - 5) = -(x - 5)(x + 1)$. $Z_f = \{-1, 5\}$.
- c) Comme le coefficient dominant est négatif, f est négative à l'extérieur des zéros et positive entre eux :

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- d) $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-1, 5]$.

Solution 4.8.

- a) L'identité ($f(x) = x$) et le cube ($f(x) = x^3$).
- b) Le carré ($f(x) = x^2$) et la valeur absolue ($f(x) = |x|$).
- c) L'inverse ($f(x) = 1/x$).
- d) L'inverse ($f(x) = 1/x$) : impaire, mais $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}$.

Solution 4.9.

- a) $P = kc^2$, donc $800 = k \cdot 2^2 = 4k$, d'où $k = 200$.
- b) $P(3) = 200 \cdot 3^2 = 200 \cdot 9 = 1800$ CHF.

Solution 4.10.

- a) $I = \frac{k}{d^2}$, donc $80 = \frac{k}{10^2}$, d'où $k = 80 \cdot 100 = 8000$.
- b) $I(20) = \frac{8000}{20^2} = \frac{8000}{400} = 20$ unités.

Solution 4.11.

a) $180 = p \cdot 0,03 \cdot 4 = 0,12 p$, d'où $p = \frac{180}{0,12} = 1500$ CHF.

b) $I = 1500 \cdot 0,05 \cdot 6 = 450$ CHF.

Solution 4.12.

a) Fonction (chaque première composante distincte a une seule image, même si 2 et 3 partagent l'image 5). Domaine $\{2, 3, 4\}$, image $\{5, 7\}$.

b) Pas une fonction : 1 a deux images distinctes, 2 et -2 .

c) Fonction. Domaine $\{-2, 0, 2, 5\}$, image $\{-1, 0, 3\}$ (0 compté une seule fois bien qu'il soit atteint deux fois).

Solution 4.13.

a) Oui : chaque élément du domaine a exactement une image (même si 1 et 3 ont la même image 4, ce qui est autorisé).

b) Domaine $\{1, 3, 5, 7\}$; image $\{4, 9, 12\}$.

Solution 4.14.

a) Non : la droite verticale $x = 2$ passe par les deux points $(2, 1)$ et $(2, 4)$.

b) Oui : chaque valeur de x apparaît une seule fois (aucune droite verticale ne coupe le nuage en plus d'un point).

Solution 4.15.

a) $f(3) = 2 \cdot 9 - 9 + 1 = 10$; $f(-1) = 2 \cdot 1 + 3 + 1 = 6$.

b) $f(a+1) = 2(a+1)^2 - 3(a+1) + 1 = 2a^2 + 4a + 2 - 3a - 3 + 1 = 2a^2 + a$.

Solution 4.16.

a) $-2y = 8 - 3x \Rightarrow y = \frac{3x-8}{2} = \frac{3}{2}x - 4$, donc $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$.

b) $f(-2) = \frac{3}{2}(-2) - 4 = -3 - 4 = -7$; $f(a) = \frac{3}{2}a - 4$.

Solution 4.17.

- a) Le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$ (ce qui reste de clôture).
L'aire est $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.
- b) Il faut $x > 0$ et $40 - 2x > 0$, donc $x \in (0, 20)$.
- c) En écrivant $A(x) = -2(x - 10)^2 + 200$, on voit que $A(x) \leq 200$ pour tout x , avec égalité si et seulement si $x = 10$. L'aire est donc maximale pour $x = 10$ m, et vaut alors 200 m^2 .

Chapitre 5

Fonctions affines et linéaires

En 1637, René Descartes publie un essai intitulé *La Géométrie*, annexe à son *Discours de la méthode*.

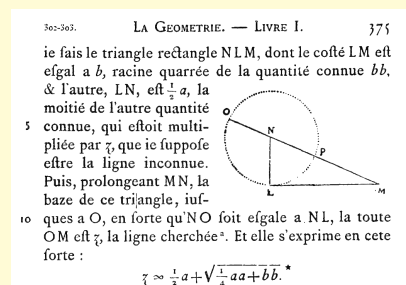
Il y propose quelque chose de révolutionnaire : représenter une courbe par une équation, et une équation par une courbe.

La droite — objet géométrique connu depuis Euclide — devient soudain une équation du premier degré.

Et une équation du premier degré devient une droite.

Ce mariage de l'algèbre et de la géométrie est à l'origine de toute la physique moderne.

La pente d'une droite, c'est déjà la vitesse, le taux de change, le gradient.¹



¹**Les faits** : “*La Géométrie*”, 1637, publiée en annexe du “*Discours de la méthode*”, sont deux publications majeurs de René Descartes.

5.1 Résoudre une équation du premier degré

Définition 5.1 — équation, solution, ensemble des solutions.

Une **équation à une inconnue** x est une égalité entre deux expressions algébriques dépendant de x . Une **solution** de cette équation est un nombre qui, une fois substitué à x , rend l'égalité vraie. **Résoudre** l'équation, c'est déterminer l'ensemble S de toutes ses solutions. Si aucun nombre ne convient, on note $S = \emptyset$.

Exemple 5.1. 4 est solution de $2x - 3 = 5$, car $2 \cdot 4 - 3 = 5$ est vrai. En revanche, 0 n'est pas solution de cette même équation.

Définition 5.2 — équations équivalentes.

Deux équations sont **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions S . On note $\Leftrightarrow$ entre deux équations équivalentes.

Proposition 5.3 — principes d'équivalence.

On obtient une équation équivalente à une équation donnée :

- en ajoutant ou en soustrayant un même nombre aux deux membres ;
- en multipliant ou en divisant les deux membres par un même nombre *non nul*.

Définition 5.4 — équation du premier degré.

Une **équation du premier degré** (à l'inconnue x) est une équation équivalente à une équation de la forme

$$ax + b = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}.$$

Résoudre une telle équation revient à isoler x en appliquant successivement les principes d'équivalence.

Exemple 5.2. Résolvons $5x - 7 = 2x + 8$.

$$5x - 7 = 2x + 8 \xrightarrow{-2x} 3x - 7 = 8 \xrightarrow{+7} 3x = 15 \xrightarrow{\div 3} x = 5.$$

On vérifie : $5 \cdot 5 - 7 = 18$ et $2 \cdot 5 + 8 = 18$. Donc $S = \{5\}$.

Remarque 5.1. Lorsqu'une équation contient des parenthèses ou des fractions, on commence par développer et réduire chaque membre, puis on met éventuellement au même dénominateur avant d'isoler x .

5.2 Fonction linéaire

Définition 5.5 — fonction linéaire.

Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est appelé le **coefficient directeur**. Son graphe est une droite passant par l'origine.

Exemple 5.3. $f(x) = 3x$: pour chaque unité gagnée en x , on gagne 3 unités en y .
 $f(x) = -2x$: fonction décroissante, pente -2 .

5.3 Fonction constante

Définition 5.6 — fonction constante.

Une **fonction constante** (ou **fonction de degré 0**) est une fonction de la forme

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est fixé : la sortie ne dépend pas de l'entrée. Son graphe est une droite **horizontale** passant par $(0, c)$.

Exemple 5.4. $f(x) = -3$: quel que soit x , $f(x)$ vaut toujours -3 . Réciproquement, toute droite horizontale passant par $(0, -3)$ représente cette fonction.

Remarque 5.2. Une fonction constante n'a pas de zéro lorsque $c \neq 0$ (l'équation $c = 0$ est alors impossible), et une infinité de zéros lorsque $c = 0$ (tout $x \in \mathbb{R}$ convient).

5.4 Fonction affine

Définition 5.7 — fonction affine.

Une **fonction affine** est une fonction de la forme

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est le **coefficient directeur** (ou **pente**) et $b \in \mathbb{R}$ est l'**ordonnée à l'origine**. Son graphe est une droite.

Remarque 5.3. Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine avec $b = 0$. Une fonction constante correspond à $a = 0$.

Le signe de a détermine la monotonie :

- $a > 0$: f strictement croissante
- $a = 0$: f constante
- $a < 0$: f strictement décroissante

Proposition 5.8 — calculer une préimage.

Soit f une fonction affine et $k \in \mathbb{R}$. Calculer l'ensemble des préimages de k par f revient à résoudre l'équation $f(x) = k$.

Exemple 5.5. Soit $f(x) = -5x + 3$. Cherchons la préimage de -7 :

$$-5x + 3 = -7 \iff -5x = -10 \iff x = 2.$$

Donc $f^{-1}(-7) = \{2\}$, ce qu'on vérifie : $f(2) = -10 + 3 = -7$.

5.5 Équation d'une droite**Définition 5.9 — formes d'une équation de droite.**

Soit une droite $\mathcal{D}$ du plan.

- **Forme pente-ordonnée à l'origine** : $y = ax + b$
- **Forme générale** : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

Une droite verticale $x = k$ n'est pas le graphe d'une fonction.

Proposition 5.10 — droite par deux points.

La droite passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_1 \neq x_2$ a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Exemple 5.6. Droite passant par $A(1, 2)$ et $B(3, 8)$:

$$a = \frac{8 - 2}{3 - 1} = 3.$$

Équation : $y = 3x + b$. En substituant A : $2 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$. Donc $y = 3x - 1$.

Proposition 5.11 — parallélisme et perpendicularité.

Soient deux droites de pentes a_1 et a_2 .

- Parallèles $\iff a_1 = a_2$
- Perpendiculaires $\iff a_1 \cdot a_2 = -1$

5.6 Systèmes d'équations linéaires**Définition 5.12 — système linéaire 2×2 .**

Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** est de la forme :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Géométriquement, résoudre ce système revient à trouver l'**intersection** de deux droites. Trois cas sont possibles :

- **Une solution** : droites sécantes (pentes différentes)
- **Aucune solution** : droites parallèles distinctes
- **Infinité de solutions** : droites confondues

Théorème 5.13 — méthode de substitution / comparaison / combinaison.

On résout un système 2×2 par :

- **Substitution** : exprimer une inconnue en fonction de l'autre et substituer.
- **Comparaison** : si les deux équations expriment la même inconnue en fonction de l'autre (par exemple $y = \dots$ dans les deux cas), on égalise les deux expressions.
- **Combinaison linéaire** : multiplier les équations par des scalaires et les additionner (ou soustraire) pour éliminer une inconnue.

Exemple 5.7.
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Combinaison : addition des deux équations : $3x = 6 \Rightarrow x = 2$. Substitution : $y = 5 - 2 \cdot 2 = 1$. Solution : $(x, y) = (2, 1)$.

Exemple 5.8. Résolvons par comparaison
$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x + 10 \end{cases}$$

Les deux équations expriment y en fonction de x ; on égalise :

$$2x - 5 = -3x + 10 \iff 5x = 15 \iff x = 3.$$

En substituant dans la première équation : $y = 2 \cdot 3 - 5 = 1$. Solution : $(x, y) = (3, 1)$.

Remarque 5.4. cas particuliers Un système 2×2 peut aussi n'avoir **aucune solution** (droites parallèles distinctes, la combinaison aboutit à une égalité fausse comme $0 = 17$) ou une **infinité de solutions** (droites confondues, la combinaison aboutit à une égalité toujours vraie comme $0 = 0$).

Exemple 5.9.
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = 5 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 3 : $6x - 3y = 12$. En additionnant à la seconde équation : $0 = 17$, ce qui est faux. Le système n'a donc **aucune solution** : $S = \emptyset$ (les deux droites sont parallèles).

Exemple 5.10.
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

La seconde équation est le double de la première : les deux droites sont **confondues**. Tout couple vérifiant $x + 2y = 6$ est solution : $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 6\}$.

Théorème 5.14 — résoudre un problème à deux inconnues.

Pour résoudre un problème concret à l'aide d'un système : choisir les deux inconnues; traduire chaque information de l'énoncé par une équation; résoudre le système obtenu; vérifier la solution dans l'énoncé; conclure avec une phrase.

Exemple 5.11. Un cinéma vend des places adultes à 14 CHF et des places enfants à 8 CHF. Un jour donné, 130 billets ont été vendus pour une recette totale de 1'424 CHF. Combien de billets adultes et enfants ont été vendus ?

Soit x le nombre de billets adultes et y le nombre de billets enfants :

$$\begin{cases} x + y = 130 \\ 14x + 8y = 1'424 \end{cases}$$

De la première équation : $x = 130 - y$. En substituant :

$$14(130 - y) + 8y = 1'424 \iff 1'820 - 6y = 1'424 \iff y = 66,$$

d'où $x = 64$. Vérification : $64 + 66 = 130$ et $14 \cdot 64 + 8 \cdot 66 = 896 + 528 = 1'424$. Il y a donc eu 64 billets adultes et 66 billets enfants.

Interprétation matricielle. Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ s'écrit $M\mathbf{v} = \mathbf{w}$ avec

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $\det(M) = ad - bc$ détermine la nature des solutions :
 $\det(M) \neq 0 \Rightarrow$ solution unique; $\det(M) = 0 \Rightarrow$ aucune solution ou infinité.

Systèmes 3×3 . On peut, avec les mêmes outils, résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues : on élimine une même inconnue à partir de deux paires d'équations distinctes, ce qui ramène le problème à un système 2×2 .

Réolvons :

$$\begin{cases} x + y + z = 12 & \textcircled{1} \\ 2x - y + z = 8 & \textcircled{2} \\ x + 2y - z = 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

En additionnant $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ (élimination de y) : $3x + 2z = 20$ $\textcircled{4}$

En calculant $(-2) \cdot \textcircled{1} + \textcircled{3}$ (élimination de y) : $-x - 3z = -23$, soit $x + 3z = 23$ $\textcircled{5}$

Le système $\textcircled{4}$ – $\textcircled{5}$ se résout par substitution : $x = 23 - 3z$ dans $\textcircled{4}$ donne $3(23 - 3z) + 2z = 20 \Rightarrow -7z = -49 \Rightarrow z = 7$, d'où $x = 23 - 21 = 2$, puis, dans $\textcircled{1}$, $y = 12 - 2 - 7 = 3$.

La solution est le triplet $S = \{(2, 3, 7)\}$.

5.7 Exercices

Exercice 5.1. Déterminer l'équation de la droite :

- a) passant par $A(0, 3)$ et $B(2, 7)$
- b) passant par $C(-1, 4)$ et parallèle à $y = 2x - 1$
- c) passant par $D(2, 5)$ et perpendiculaire à $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Exercice 5.2. Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement :

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

Exercice 5.3. Un plombier facture un déplacement fixe de 60 CHF plus 80 CHF par heure de travail.

- a) Écrire la fonction $f(t)$ donnant la facture en fonction du nombre d'heures t .
- b) Combien coûte une intervention de 2,5 heures ?
- c) Au bout de combien d'heures la facture atteint-elle 300 CHF ?

Exercice 5.4. Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites $d_1 : y = \frac{1}{2}x + 3$ et $d_2 : y = -x + 6$.

Exercice 5.5. Soit $\mathcal{D} : 2x - 3y + 6 = 0$.

- a) Mettre $\mathcal{D}$ sous la forme $y = ax + b$.
- b) Écrire l'équation de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $P(4, 1)$.

Exercice 5.6. Résoudre les équations suivantes :

- a) $6x - 7 = 3x + 8$
- b) $5(x - 2) = 3(x + 4)$
- c) $\frac{x + 3}{2} - \frac{x - 1}{3} = 1$

Exercice 5.7. Soit $f(x) = -4x + 9$.

- a) Déterminer $f^{-1}(5)$.
- b) Déterminer $f^{-1}(0)$.

Exercice 5.8.

- a) Représenter graphiquement la fonction $f(x) = -2$.
- b) Donner un exemple concret (autre que celui du cours) où une grandeur est modélisée par une fonction constante.

Exercice 5.9. Un club de sport facture une inscription annuelle de 45 CHF plus 6 CHF par séance. Un adhérent a payé 129 CHF pour l'année. Combien de séances a-t-il faites ?

Exercice 5.10. Résoudre par comparaison :
$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x + 10 \end{cases}$$

Exercice 5.11. Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement :

- a)
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = 5 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$$

Exercice 5.12. Un cinéma vend des places adultes à 14 CHF et des places enfants à 8 CHF. Un jour donné, 130 billets ont été vendus pour une recette totale de 1'424 CHF. Combien de billets adultes et combien de billets enfants ont été vendus ?

Exercice 5.13. Calculer la pente de la droite passant par les deux points donnés, lorsqu'elle existe.

- a) $A(2, -1)$ et $B(6, 7)$
- b) $C(-3, 4)$ et $D(1, -4)$
- c) $E(5, 3)$ et $F(5, -2)$

Exercice 5.14. Pour chaque équation, l'écrire sous la forme $y = ax + b$ et donner la pente et l'ordonnée à l'origine.

- a) $4x + 2y = 10$
- b) $3x - 5y = 15$
- c) $x - y = 0$

Exercice 5.15.

- a) Écrire l'équation de la droite horizontale passant par $(3, -4)$. Quelle est sa pente?
- b) Écrire l'équation de la droite verticale passant par $(5, 2)$. Quelle est sa pente?

Exercice 5.16. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de chaque droite avec les axes.

- a) $3x + 4y = 12$
- b) $2x - 5y = -10$

Exercice 5.17. Écrire l'équation, sous forme $y = ax + b$, de la droite passant par $(-2, 5)$ et de pente 3.

Exercice 5.18. Pour chaque paire de droites, dire si elles sont parallèles, perpendiculaires, ou ni l'un ni l'autre.

- a) $y = 2x - 3$ et $y = 2x + 7$
- b) $y = \frac{1}{4}x - 1$ et $y = -4x + 5$
- c) $y = 3x - 2$ et $y = 2x + 4$

Exercice 5.19. En 2015, une ville comptait 42 000 habitants; en 2023, elle en comptait 58 800.

- a) Calculer le taux de variation moyen de la population, en habitants par an.
- b) Interpréter ce résultat dans le contexte de la ville.

Exercice 5.20. Une agence facture la location d'une voiture 45 CHF de forfait fixe, plus 0,25 CHF par kilomètre parcouru.

- a) Écrire la fonction $f(x)$ donnant le prix pour x kilomètres parcourus.
- b) Calculer le prix d'un trajet de 120 km.
- c) Pour quel kilométrage la facture s'élève-t-elle à 105 CHF?

Exercice 5.21. Un chimiste dispose d'une solution acide à 20 % et d'une autre à 50 %. Combien de litres de chaque doit-il mélanger pour obtenir 12 litres d'une solution à 30 %?

Exercice 5.22. Un bateau parcourt 36 km en aval (dans le sens du courant) en 2 heures, puis revient sur cette même distance en 3 heures (contre le courant). Déterminer la vitesse du bateau en eau calme et la vitesse du courant.

Exercice 5.23. On sait que la relation entre la température en degrés Celsius (C) et en degrés Fahrenheit (F) est affine. On observe que $C = 0$ correspond à $F = 32$ (congélation de l'eau), et $C = 100$ correspond à $F = 212$ (ébullition de l'eau).

- En considérant F comme fonction affine de C , déterminer sa pente à partir de ces deux points.
- En déduire l'équation donnant F en fonction de C .
- La température normale du corps humain est $F = 98,6$ °F. Quelle est cette température en degrés Celsius?

Exercice 5.24. (MA2) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 8 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

5.8 Résumé du chapitre

Équations du premier degré

- Forme : $ax + b = 0$, $a \neq 0$ — isoler x à l'aide des principes d'équivalence (ajouter/soustraire, multiplier/ diviser par un nombre non nul)
- Prémimage de k par f : résoudre $f(x) = k$

Fonctions

- Constante : $f(x) = c$ — droite horizontale
- Linéaire : $f(x) = ax$ — droite par l'origine
- Affine : $f(x) = ax + b$ — droite quelconque
- $a > 0$: croissante $a = 0$: constante $a < 0$: décroissante

Droites

- Pente par deux points : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Droite horizontale $y = k$: pente 0 | droite verticale $x = k$: pente non définie, pas une fonction
- Forme point-pente : $y - y_1 = a(x - x_1)$
- Abscisse à l'origine : poser $y = 0$ | ordonnée à l'origine : poser $x = 0$
- Parallèles $\iff$ mêmes pentes : $a_1 = a_2$
- Perpendiculaires $\iff a_1 \cdot a_2 = -1$
- Taux de variation moyen entre (x_1, y_1) et (x_2, y_2) : $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (c'est la pente de la droite qui les relie)

Systèmes 2×2

- Méthodes : substitution, comparaison ou combinaison linéaire
- Une solution : droites sécantes
- Aucune solution : droites parallèles distinctes (combinaison $\rightarrow$ égalité fausse)
- Infinité : droites confondues (combinaison $\rightarrow$ égalité toujours vraie)
- Problème à deux inconnues : choisir les inconnues, traduire l'énoncé en système, résoudre, vérifier, conclure

MA2 — Systèmes 3×3

- Éliminer une même inconnue à partir de deux paires d'équations $\rightarrow$ système 2×2
-

5.9 QCM — Fonctions affines et linéaires

Une seule réponse correcte par question.

1. La pente de la droite passant par $A(1, 3)$ et $B(4, 9)$ est :
 - a) $\frac{1}{2}$
 - b) $\frac{2}{3}$
 - c) 3
 - d) 6

2. Quelle droite est parallèle à $y = 3x - 1$?
 - a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$
 - b) $y = 3x + 5$
 - c) $y = -3x - 1$
 - d) $3y = x - 1$

3. La droite perpendiculaire à $y = 2x + 1$ passant par l'origine a pour équation :
 - a) $y = 2x$
 - b) $y = -2x$
 - c) $y = \frac{1}{2}x$
 - d) $y = -\frac{1}{2}x$

4. Le système $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 9 \end{cases}$ a :
 - a) Une solution unique
 - b) Une infinité de solutions
 - c) Aucune solution
 - d) Deux solutions

5. L'ordonnée à l'origine de la droite $3x - 2y + 8 = 0$ est :
 - a) -4
 - b) 3
 - c) 4
 - d) 8

6. Un taxi facture 3 CHF de prise en charge plus 2 CHF par kilomètre. Pour 12 CHF, on peut parcourir :
 - a) 4 km
 - b) 4,5 km
 - c) 6 km
 - d) 7,5 km

7. Quel est le point d'intersection de $y = x + 1$ et $y = -x + 5$?
- a) (1, 2)
 - b) (2, 3)
 - c) (3, 2)
 - d) (4, 1)
8. La fonction $f(x) = -4x + 7$ est :
- a) Croissante sur $\mathbb{R}$
 - b) Décroissante sur $\mathbb{R}$
 - c) Croissante sur $(0, +\infty)$
 - d) Ni croissante ni décroissante
9. La solution de l'équation $4x - 5 = 2x + 9$ est :
- a) $x = 2$
 - b) $x = 5$
 - c) $x = 7$
 - d) $x = 9$
10. Soit $f(x) = -3x + 10$. La préimage de 1 par f est :
- a) -3
 - b) 3
 - c) 9
 - d) -9
11. La fonction constante $f(x) = 5$ est représentée par :
- a) la droite verticale $x = 5$
 - b) la droite horizontale $y = 5$
 - c) une droite oblique passant par (0, 5)
 - d) une parabole
12. Le système $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$ a :
- a) Une solution unique
 - b) Une infinité de solutions
 - c) Aucune solution
 - d) Deux solutions
13. La pente de la droite verticale $x = 7$ est :
- a) 0
 - b) non définie
 - c) 1
 - d) 7

14. En 2010, une entreprise comptait 80 employés; en 2020, elle en comptait 140.
Le taux de variation moyen est :
- a) 3 employés par an
 - b) 6 employés par an
 - c) 60 employés par an
 - d) 600 employés par an

Réponses : 1-b 2-b 3-d 4-c 5-c 6-b 7-b 8-b 9-c 10-b 11-b 12-b 13-b
14-b

5.10 Corrigés

Solution 5.1.

- a) $a = \frac{7-3}{2-0} = 2, b = 3 : y = 2x + 3.$
- b) Parallèle à $y = 2x - 1 : a = 2. 4 = 2(-1) + b \Rightarrow b = 6 : y = 2x + 6.$
- c) Perpendiculaire à pente $-\frac{1}{3} : a = 3. 5 = 3(2) + b \Rightarrow b = -1 : y = 3x - 1.$

Solution 5.2.

- a) De la 2e : $x = y + 1$. Substitution : $3(y + 1) + 2y = 12 \Rightarrow 5y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{5},$
 $x = \frac{14}{5}$. Droites sécantes.
- b) $2 \times \text{éq. 1} : 4x - 2y = 6$; addition avec éq. 2 : $0 = 11$. Contradiction — droites parallèles, aucune solution.
- c) Éq. 2 = $2 \times \text{éq. 1}$ — droites confondues, infinité de solutions : $\{(x, y) \mid x + 2y = 4\}.$

Solution 5.3.

- a) $f(t) = 80t + 60.$
- b) $f(2,5) = 200 + 60 = 260$ CHF.
- c) $80t + 60 = 300 \Rightarrow t = 3$ heures.

Solution 5.4.

$$\frac{1}{2}x + 3 = -x + 6 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2, y = 4. \text{ Point d'intersection : } (2, 4).$$

Solution 5.5.

- a) $3y = 2x + 6 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2.$
- b) Pente perpendiculaire : $a = -\frac{3}{2}. 1 = -\frac{3}{2}(4) + b \Rightarrow b = 7. \text{ Équation : } y = -\frac{3}{2}x + 7.$

Solution 5.6.

- a) $6x - 7 = 3x + 8 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5 : S = \{5\}.$
- b) $5x - 10 = 3x + 12 \Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11 : S = \{11\}.$
- c) En multipliant par 6 : $3(x + 3) - 2(x - 1) = 6 \Leftrightarrow x + 11 = 6 \Leftrightarrow x = -5 : S = \{-5\}.$

Solution 5.7.

$$\text{a) } -4x + 9 = 5 \iff -4x = -4 \iff x = 1 : f^{-1}(5) = \{1\}.$$

$$\text{b) } -4x + 9 = 0 \iff x = \frac{9}{4} : f^{-1}(0) = \left\{\frac{9}{4}\right\}.$$

Solution 5.8.

a) Droite horizontale passant par $(0, -2)$.

b) Par exemple : le prix d'un trajet en bus avec abonnement illimité est constant, quel que soit le nombre de trajets effectués.

Solution 5.9.

Soit x le nombre de séances : $45 + 6x = 129 \iff 6x = 84 \iff x = 14$. L'adhérent a fait 14 séances.

Solution 5.10.

$$2x - 5 = -3x + 10 \iff 5x = 15 \iff x = 3, \text{ puis } y = 2 \cdot 3 - 5 = 1. S = \{(3, 1)\}.$$

Solution 5.11.

a) $3 \times \text{éq. 1} : 6x - 3y = 12$; addition avec éq. 2 : $0 = 17$, faux. $S = \emptyset$ (droites parallèles).

b) Éq. 2 = $2 \times$ éq. 1 : droites confondues. $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 6\}$.

Solution 5.12.

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants : $\begin{cases} x + y = 130 \\ 14x + 8y = 1'424 \end{cases}$. De

la première : $x = 130 - y$; substitution : $14(130 - y) + 8y = 1'424 \iff -6y = -396 \iff y = 66$, d'où $x = 64$. Il y a eu 64 billets adultes et 66 billets enfants.

Solution 5.13.

$$\text{a) } a = \frac{7 - (-1)}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2.$$

$$\text{b) } a = \frac{-4 - 4}{1 - (-3)} = \frac{-8}{4} = -2.$$

c) Les deux points ont la même abscisse : la droite est verticale, sa pente n'est pas définie.

Solution 5.14.

a) $2y = -4x + 10 \Rightarrow y = -2x + 5$: pente -2 , ordonnée à l'origine $(0, 5)$.

b) $-5y = -3x + 15 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x - 3$: pente $\frac{3}{5}$, ordonnée à l'origine $(0, -3)$.

c) $y = x$: pente 1, ordonnée à l'origine $(0, 0)$.

Solution 5.15.

- a) $y = -4$; pente 0.
 b) $x = 5$; pente non définie.

Solution 5.16.

- a) En posant $y = 0 : x = 4$: abscisse à l'origine (4, 0). En posant $x = 0 : y = 3$: ordonnée à l'origine (0, 3).
 b) En posant $y = 0 : x = -5$: (-5, 0). En posant $x = 0 : y = 2$: (0, 2).

Solution 5.17.

$y - 5 = 3(x - (-2)) = 3(x + 2) \Rightarrow y = 3x + 6 + 5 = 3x + 11$. Vérification : en $x = -2$, $y = 3(-2) + 11 = 5$. ✓

Solution 5.18.

- a) Mêmes pentes ($a = 2$) : parallèles.
 b) Produit des pentes : $\frac{1}{4} \times (-4) = -1$: perpendiculaires.
 c) Pentés différentes ($3 \neq 2$) et produit $3 \times 2 = 6 \neq -1$: ni l'un ni l'autre.

Solution 5.19.

- a) $\frac{58\,800 - 42\,000}{2023 - 2015} = \frac{16\,800}{8} = 2100$ habitants par an.
 b) En moyenne, la population de la ville a augmenté d'environ 2100 habitants chaque année entre 2015 et 2023.

Solution 5.20.

- a) $f(x) = 0,25x + 45$.
 b) $f(120) = 0,25 \cdot 120 + 45 = 30 + 45 = 75$ CHF.
 c) $0,25x + 45 = 105 \Rightarrow 0,25x = 60 \Rightarrow x = 240$ km.

Solution 5.21.

Soit x le nombre de litres à 20 % et y celui à 50 % :

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 0,20x + 0,50y = 0,30 \cdot 12 = 3,6 \end{cases}$$

De la première équation : $x = 12 - y$. Substitution : $0,20(12 - y) + 0,50y = 3,6 \Leftrightarrow 2,4 + 0,30y = 3,6 \Leftrightarrow y = 4$, d'où $x = 8$. Il faut 8 litres de solution à 20 % et 4 litres à 50 %.

Solution 5.22.

Soit b la vitesse du bateau en eau calme et c celle du courant :

$$\begin{cases} b + c = \frac{36}{2} = 18 \\ b - c = \frac{36}{3} = 12 \end{cases}$$

En additionnant : $2b = 30 \Rightarrow b = 15$, puis $c = 18 - 15 = 3$. Le bateau avance à 15 km/h en eau calme, et le courant est à 3 km/h.

Solution 5.23.

a) $a = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$.

b) $F - 32 = \frac{9}{5}(C - 0) \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32$.

c) $98,6 = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow 66,6 = \frac{9}{5}C \Rightarrow C = 66,6 \times \frac{5}{9} = 37$. La température du corps humain est 37 °C.

Solution 5.24.

En additionnant les deux premières équations : $3x + 2z = 20$. En calculant $(-2) \times$ éq. 1 + éq. 3 : $x + 3z = 23$. En résolvant ce système 2×2 : $z = 7$, $x = 2$, puis (dans l'équation 1) $y = 3$. $S = \{(2, 3, 7)\}$.

Chapitre 6

Calcul littéral

Bagdad, IX^e siècle. Un savant persan nommé Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi rédige un traité intitulé *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala* — « Le livre abrégé sur le calcul par la complétion et la balance ».

Le mot *al-jabr* donnera algèbre.

Al-Khwarizmi n'utilise pas de lettres : il écrit tout en mots.

Mais l'idée est là : manipuler des quantités inconnues comme si elles étaient connues, et trouver leur valeur par le raisonnement.

Trois siècles plus tard, les lettres feront leur apparition.

L'algèbre moderne était née.¹



6.1 Expressions algébriques

Définition 6.1 — *expression algébrique*.

Une **expression algébrique** est une combinaison de nombres, de variables et d'opérations (+, −, ×, ÷, puissances, racines). Une **variable** est une lettre représentant une quantité indéterminée.

¹**Les faits** : “Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala” (“Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison”), Bagdad, vers 820–830.

Définition 6.2 — monôme et polynôme.

Un **monôme** est un produit d'un nombre (le **coefficient**) et de puissances de variables : $3x^2y$, $-5x$, 7 .

Un **polynôme** est une somme de monômes. Le **degré** d'un polynôme en x est l'exposant le plus élevé.

Exemple 6.1. $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 7$ est un polynôme de degré 3. Ses **termes semblables** sont des monômes de même degré : $3x^2 + 5x^2 = 8x^2$.

6.2 Développement**Théorème 6.3 — distributivité.**

Pour tous réels a, b, c :

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Plus généralement :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Définition 6.4 — identités remarquables.

Pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Et, pour tout réel x :

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Exemple 6.2. $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

$$(x - 5)(x + 5) = x^2 - 25.$$

$$(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1.$$

$$(x + 7)(x - 2) = x^2 + 5x - 14.$$

Remarque 6.1. astuce de calcul mental Les identités remarquables permettent des calculs mentaux rapides. Par exemple, $(x + 10)^2 - (x - 10)^2 = 40x$ (à vérifier en développant), ce qui donne un moyen rapide de calculer des différences de carrés comme $1210^2 - 1190^2$ sans poser l'opération : il suffit de prendre $x = 1200$, d'où $40 \cdot 1200 = 48\,000$.

6.3 Factorisation

Définition 6.5 — factorisation.

Factoriser une expression, c'est l'écrire comme un **produit** de facteurs plus simples. C'est l'opération inverse du développement.

Remarque 6.2. pourquoi factoriser ? Une forme factorisée est précieuse pour deux raisons :

- connaissant les signes de deux facteurs, la règle des signes donne directement le signe de leur *produit* — ce qui n'est pas le cas pour une somme ;
- un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, ce qui permet de résoudre facilement des équations de degré supérieur à 1.

Exemple 6.3. Résoudre $x^2 + 3x - 10 = 0$ directement est difficile. Mais en factorisant : $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$, l'équation devient $(x + 5)(x - 2) = 0$, donc $x = -5$ ou $x = 2$.

Les techniques principales sont, dans cet ordre de priorité :

- **Facteur commun (mise en évidence)** : $6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$. On peut aussi mettre en évidence une expression entière, pas seulement un monôme :

$$(4x - 3)(2x + 5) - (4x - 3)(x - 1) = (4x - 3)[(2x + 5) - (x - 1)] = (4x - 3)(x + 6).$$

- **Identités remarquables à l'envers** :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- **Regroupement** : $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$

Exemple 6.4. Factoriser $4x^2 - 9$: $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$.

Factoriser $x^2 - 6x + 9$: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Remarque 6.3. regroupements plus subtils Certaines expressions demandent de repérer une identité remarquable « cachée », ou de déplacer des termes avant de mettre en évidence.

Exemple 6.5. Factoriser $x^2 + 8x + 16 - y^2$: on repère d'abord l'identité cachée $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$, puis une différence de carrés :

$$x^2 + 8x + 16 - y^2 = (x + 4)^2 - y^2 = (x + 4 + y)(x + 4 - y).$$

Exemple 6.6. Factoriser $5ac + 5bc - 2ad - 2bd$: on regroupe les termes deux par deux pour faire apparaître un facteur commun :

$$5ac + 5bc - 2ad - 2bd = 5c(a + b) - 2d(a + b) = (a + b)(5c - 2d).$$

6.4 Fractions algébriques

Définition 6.6 — *fraction algébrique.*

Une **fraction algébrique** est un quotient de deux polynômes : $\frac{P(x)}{Q(x)}$, définie pour $Q(x) \neq 0$.

Les règles sont les mêmes que pour les fractions numériques :

Proposition 6.7 — *opérations sur les fractions algébriques.*

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$

$$\frac{A/B}{C/D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Exemple 6.7. Simplifier $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2}, \quad x \neq 2.$$

Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Comme pour les entiers, on peut diviser un polynôme A par B :

$$A = B \cdot Q + R,$$

où $\deg R < \deg B$. Q est le **quotient**, R le **reste**.

Exemple. Diviser $A(x) = x^3 - 2x + 1$ par $B(x) = x - 1$:

$$x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1) + 0.$$

Reste nul : $x = 1$ est racine de A .

MA2 — Approfondissement

Identités remarquables de degré 3. Pour tous réels a, b :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Les deux dernières se vérifient en développant le membre de droite.

Exemple. Factoriser $x^3 - 27$: on reconnaît $x^3 - 3^3$, donc $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$. Factoriser $8x^3 + 1$: on reconnaît $(2x)^3 + 1^3$, donc $8x^3 + 1 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$.

6.5 Exercices

Exercice 6.1. Développer et simplifier :

- a) $(3x - 2)(x + 5)$
- b) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2$
- c) $(x + 3)(x - 3) + x^2$
- d) $(a + b + c)^2$ (développer en regroupant $(a + b) + c$)

Exercice 6.2. Factoriser complètement :

- a) $12x^3 - 8x^2 + 4x$
- b) $9x^2 - 25$
- c) $x^2 + 10x + 25$
- d) $2x^2 - 8$
- e) $x^3 - x$

Exercice 6.3. Simplifier les fractions algébriques (préciser les restrictions) :

- a) $\frac{3x^2 - 12}{x - 2}$
- b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

Exercice 6.4. Calculer et simplifier :

- a) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1}$
- b) $\frac{x^2 - 9}{x+3} \cdot \frac{x+1}{x-3}$

Exercice 6.5. Résoudre les équations suivantes :

- a) $(x + 2)(x - 3) = (x + 1)(x - 1)$

b) $\frac{2x+1}{x-1} = 3$

Exercice 6.6.

- a) Développer et réduire $(x+10)^2 - (x-10)^2$.
- b) En déduire, sans poser l'opération, $1210^2 - 1190^2$.
- c) Calculer mentalement 998^2 (indication : $998 = 1000 - 2$).
- d) Calculer mentalement $997 \cdot 1003$.

Exercice 6.7. Factoriser en mettant en évidence une expression entière :

- a) $(4x-3)(2x+5) - (4x-3)(x-1)$
- b) $(x+6)(3x-2) + (x+6)^2$

Exercice 6.8.

- a) Factoriser $x^2 + 3x - 10$.
- b) En déduire les solutions de l'équation $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Exercice 6.9. Factoriser en regroupant les termes :

- a) $5ac + 5bc - 2ad - 2bd$
- b) $x^2 + 8x + 16 - y^2$

Exercice 6.10. Développer et réduire :

- a) $(x-1)(x+2)(x-3)$
- b) $(2x+1)(x-4) - 3(x-2)$

Exercice 6.11. Factoriser complètement, en combinant plusieurs techniques si nécessaire :

- a) $3x^3 - 12x$
- b) $2x^2 + 8x + 8$
- c) $x^4 - 16$

Exercice 6.12. Un rectangle a pour longueur $(x+5)$ et largeur $(x-2)$, avec $x > 2$.

- a) Exprimer et développer l'aire $A(x)$ de ce rectangle.

- b) On découpe, dans un coin du rectangle, un carré de côté x . Exprimer et simplifier l'aire restante $R(x)$.
- c) Calculer cette aire restante pour $x = 10$.

Exercice 6.13. Calculer et simplifier :

$$\frac{3}{x^2 - 1} + \frac{2}{x + 1}.$$

Exercice 6.14. Résoudre :

$$\frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} = \frac{8}{x^2 - 4}.$$

Exercice 6.15. Isoler la variable indiquée dans chaque formule :

- a) Isoler h dans $V = \pi r^2 h$ (volume d'un cylindre).
- b) Isoler b dans $A = \frac{1}{2}(a + b)h$ (aire d'un trapèze).
- c) Isoler x dans $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$.

Exercice 6.16. Démontrer, en développant les deux membres, que pour tout réel x :

$$(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 6x^2 + 2.$$

Exercice 6.17. (MA2) Factoriser à l'aide des identités de degré 3 :

- a) $x^3 - 27$
- b) $8x^3 + 1$

Exercice 6.18. Effectuer la division euclidienne de $A(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ par $B(x) = x - 2$.

- a) Donner le quotient $Q(x)$ et le reste R .
- b) Calculer $A(2)$, et comparer au reste R . Que remarque-t-on ? (Ce phénomène s'appelle le *théorème du reste* : le reste de la division de $A(x)$ par $x - k$ vaut toujours $A(k)$.)

6.6 Résumé du chapitre

Développement

- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Factorisation

- Pourquoi : le signe d'un produit se lit facilement, et un produit nul donne un facteur nul (utile pour résoudre des équations)
- Ordre à privilégier : facteur commun (mise en évidence, éventuellement d'une expression entière), puis identités remarquables, puis regroupement (identité cachée, déplacement de termes)
- Facteur commun : $ka + kb = k(a + b)$
- Carré parfait : $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
- Différence de carrés : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- Regroupement par paires si nécessaire
- MA2 : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Fractions algébriques

- Simplifier : factoriser numérateur et dénominateur, puis éliminer les facteurs communs
- Addition : réduire au même dénominateur (factoriser d'abord si un dénominateur ne l'est pas encore)
- Multiplication : produit des numérateurs sur produit des dénominateurs
- Toujours préciser les valeurs interdites

Isoler une variable, division de polynômes

- Isoler une variable dans une formule : mêmes principes d'équivalence que pour une équation numérique
 - MA2 — Division euclidienne : $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, avec $\deg R < \deg B$
 - MA2 — Théorème du reste : le reste de la division de $A(x)$ par $x - k$ vaut $A(k)$
-

6.7 QCM — Calcul littéral

Une seule réponse correcte par question.

1. $(x + 3)^2$ est égal à :

- a) $x^2 + 9$
- b) $x^2 + 3x + 9$
- c) $x^2 + 6x + 9$
- d) $x^2 + 6x + 6$

2. La factorisation de $x^2 - 16$ est :

- a) $(x - 4)^2$
- b) $(x + 4)^2$
- c) $(x - 4)(x + 4)$
- d) $(x - 2)(x + 8)$

3. Développer $(2x - 1)(3x + 4)$:

- a) $6x^2 + 5x - 4$
- b) $6x^2 - 5x - 4$
- c) $6x^2 + 5x + 4$
- d) $5x^2 + 5x - 4$

4. Factoriser $3x^2 - 12x$:

- a) $3x(x - 4)$
- b) $3(x^2 - 4x)$
- c) $x(3x - 12)$
- d) $3x(x - 4)$ et $x(3x - 12)$ sont équivalents

5. Simplifier $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$ pour $x \neq -2$:

- a) $x - 2$
- b) $x + 2$
- c) $x^2 - 2$
- d) $\frac{x-2}{1}$

6. $(a - b)^2 - (a + b)^2$ est égal à :

- a) 0
- b) $-4ab$
- c) $4ab$
- d) $2a^2 + 2b^2$

7. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}$ est égal à :

- a) $\frac{2}{2x+1}$
- b) $\frac{2x+1}{x(x+1)}$
- c) $\frac{1}{x(x+1)}$
- d) $\frac{x+1+x}{x+x+1}$

8. Quel est le degré du polynôme $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 7$?

- a) 1
- b) 3
- c) 4
- d) 7

9. Développer $(x+4)(x-9)$:

- a) $x^2 - 5x - 36$
- b) $x^2 + 5x - 36$
- c) $x^2 - 5x + 36$
- d) $x^2 - 13x - 36$

10. Les solutions de l'équation $x^2 - 8x + 15 = 0$ sont :

- a) $x = 3$ et $x = 5$
- b) $x = -3$ et $x = -5$
- c) $x = 8$ et $x = 15$
- d) $x = 15$ uniquement

11. $(2x+5)(3x-1) - (2x+5)(x+4)$ se factorise en :

- a) $(2x+5)(2x-5)$
- b) $(2x+5)(4x+3)$
- c) $(2x+5)(3x-1)(x+4)$
- d) Cette expression n'est pas factorisable

12. (MA2) La factorisation de $x^3 + 8$ est :

- a) $(x+2)^3$
- b) $(x+2)(x^2 - 2x + 4)$
- c) $(x+2)(x^2 + 2x + 4)$
- d) $(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

13. Isoler r dans $C = 2\pi r$ donne $r =$:

- a) $2\pi C$
- b) $\frac{C}{2\pi}$
- c) $C - 2\pi$
- d) $\frac{2\pi}{C}$

14. (MA2) D'après le théorème du reste, le reste de la division de $x^3 - 5x + 2$ par $x - 3$ est :

- a) 14
- b) 3
- c) 0
- d) -14

Réponses : 1-c 2-c 3-a 4-a 5-a 6-b 7-b 8-c 9-a 10-a 11-a 12-b 13-b
14-a

6.8 Corrigés

Solution 6.1.

a) $3x^2 + 15x - 2x - 10 = 3x^2 + 13x - 10.$

b) $(4x^2 + 4x + 1) - (4x^2 - 4x + 1) = 8x.$

c) $x^2 - 9 + x^2 = 2x^2 - 9.$

d) $((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$

Solution 6.2.

a) $4x(3x^2 - 2x + 1).$

b) $(3x - 5)(3x + 5).$

c) $(x + 5)^2.$

d) $2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2).$

e) $x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$

Solution 6.3.

a) $\frac{3(x^2-4)}{x-2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{x-2} = 3(x+2), x \neq 2.$

b) $\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x-1}, x \neq \pm 1.$

Solution 6.4.

a) $\frac{2(x-1)+3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{5x+1}{x^2-1}, x \neq \pm 1.$

b) $\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} \cdot \frac{x+1}{x-3} = (x+1), x \neq -3, x \neq 3.$

Solution 6.5.

a) Développement : $x^2 - x - 6 = x^2 - 1 \Rightarrow -x = 5 \Rightarrow x = -5.$

b) $2x + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow 2x + 1 = 3x - 3 \Rightarrow x = 4, x \neq 1. \checkmark$

Solution 6.6.

a) $(x^2 + 20x + 100) - (x^2 - 20x + 100) = 40x.$

b) Avec $x = 1200 : 40 \cdot 1200 = 48\,000.$

c) $(1000 - 2)^2 = 1\,000\,000 - 4\,000 + 4 = 996\,004.$

d) $(1000 - 3)(1000 + 3) = 1\,000\,000 - 9 = 999\,991.$

Solution 6.7.

a) $(4x - 3)[(2x + 5) - (x - 1)] = (4x - 3)(x + 6).$

b) $(x + 6)[(3x - 2) + (x + 6)] = (x + 6)(4x + 4) = 4(x + 6)(x + 1).$

Solution 6.8.

a) $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2).$

b) $(x + 5)(x - 2) = 0 \iff x = -5 \text{ ou } x = 2.$

Solution 6.9.

a) $5c(a + b) - 2d(a + b) = (a + b)(5c - 2d).$

b) $(x + 4)^2 - y^2 = (x + 4 + y)(x + 4 - y).$

Solution 6.10.

a) En développant d'abord les deux premiers facteurs : $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$,
puis $(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$

b) $2x^2 - 8x + x - 4 - 3x + 6 = 2x^2 - 10x + 2.$

Solution 6.11.

a) Facteur commun puis différence de carrés : $3x(x^2 - 4) = 3x(x - 2)(x + 2).$

b) Facteur commun puis carré parfait : $2(x^2 + 4x + 4) = 2(x + 2)^2.$

c) Différence de carrés, deux fois : $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$
(le facteur $x^2 + 4$ ne se factorise plus dans $\mathbb{R}$).

Solution 6.12.

a) $A(x) = (x + 5)(x - 2) = x^2 + 3x - 10.$

b) $R(x) = A(x) - x^2 = x^2 + 3x - 10 - x^2 = 3x - 10.$

c) $R(10) = 3 \cdot 10 - 10 = 20.$

Solution 6.13.

On factorise d'abord le premier dénominateur : $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, dénominateur commun.

$$\frac{3}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x+1} = \frac{3+2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}, \quad x \neq \pm 1.$$

Solution 6.14.

On remarque $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, donc $x \neq \pm 2$. En multipliant chaque membre par $(x - 2)(x + 2)$:

$$3(x + 2) - (x - 2) = 8 \iff 2x + 8 = 8 \iff x = 0.$$

Comme $0 \neq \pm 2$, cette valeur est admissible : $S = \{0\}$.

Solution 6.15.

a) $h = \frac{V}{\pi r^2}.$

b) $2A = (a + b)h \Rightarrow \frac{2A}{h} = a + b \Rightarrow b = \frac{2A}{h} - a = \frac{2A - ah}{h}.$

c) $y(x - 1) = 2x + 3 \Rightarrow yx - y = 2x + 3 \Rightarrow x(y - 2) = y + 3 \Rightarrow x = \frac{y + 3}{y - 2}, y \neq 2.$

Solution 6.16.

$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ et $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. En soustrayant :

$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 6x^2 + 2. \quad \checkmark$$

Solution 6.17.

a) $x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9).$

b) $(2x)^3 + 1^3 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1).$

Solution 6.18.

a) En posant la division (ou par divisions successives) : $x^3 + 2x^2 - 5x + 7 = (x - 2)(x^2 + 4x + 3) + 13$. Donc $Q(x) = x^2 + 4x + 3$ et $R = 13$.

b) $A(2) = 8 + 8 - 10 + 7 = 13$: on retrouve exactement le reste $R = 13$.

Chapitre 7

Fonctions du second degré

Babylone, 2000 avant notre ère.

Un scribe grave sur une tablette d'argile :

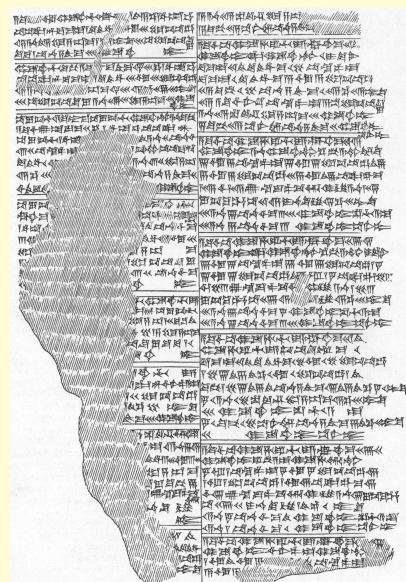
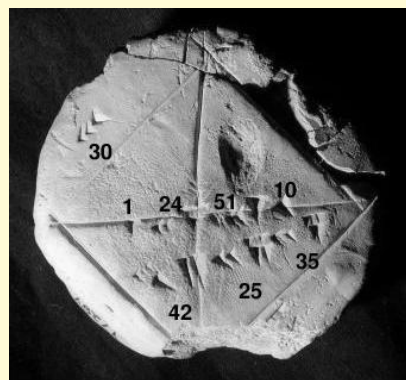
“Quelle est la surface d'un carré dont le côté augmenté de son quart vaut $\frac{3}{4}$?”

Il ne sait pas encore ce qu'est une équation. Il sait seulement qu'il y a une inconnue, et que cette inconnue, au carré, doit satisfaire une certaine relation.

Les Babyloniens résolvait ces problèmes par des recettes géométriques — compléter un carré, littéralement, avec des tuiles d'argile.

Quatre mille ans plus tard, nous faisons la même chose, avec des symboles.

La formule a changé. La question, elle, n'a pas bougé.¹



¹**Les faits** : Résolution géométrique d'équations du second degré (“complétion du carré”) attestée sur des tablettes paléo-babyloniennes (env. 1800–1600 av. J.-C.), par ex. *BM 13901* (British Museum) et *YBC 7289* (Yale Babylonian Collection, approximation de $\sqrt{2}$). Le récit tel qu’écrit (“un scribe grave...”) est une reconstitution narrative plausible mais non une citation littérale d’une tablette précise.

7.1 Forme développée

Définition 7.1 — fonction du second degré.

Une **fonction du second degré** est une fonction de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Son graphe est une **parabole** d'axe de symétrie vertical.

- $a > 0$: parabole ouverte vers le haut (convexe)
- $a < 0$: parabole ouverte vers le bas (concave)

7.2 Forme canonique

Théorème 7.2 — forme canonique.

Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la **forme canonique** :

$$f(x) = a(x - h)^2 + k,$$

où

$$h = -\frac{b}{2a}, \quad k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Le point $S = (h, k)$ est le **sommet** de la parabole. C'est le minimum de f si $a > 0$, le maximum si $a < 0$.

Exemple 7.1. Mettre $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ en forme canonique.

$$h = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2, \quad k = 2(2)^2 - 8(2) + 5 = 8 - 16 + 5 = -3.$$

Donc $f(x) = 2(x - 2)^2 - 3$. Sommet : $S = (2, -3)$.

Remarque 7.1. la complétion du carré, en détail La formule ci-dessus provient d'une technique appelée **complétion du carré** : pour transformer $x^2 + kx$, on ajoute et retranche $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ (le carré de la moitié du coefficient de x), ce qui fait apparaître une identité remarquable.

Exemple 7.2. Mettre $f(x) = x^2 - 6x + 7$ en forme canonique par complétion du carré :

$$f(x) = x^2 - 6x + 7 = (x^2 - 6x + 3^2) - 3^2 + 7 = (x - 3)^2 - 2.$$

Remarque 7.2. transformations du graphe La parabole de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ s'obtient à partir de celle de $g(x) = x^2$ en : la déplaçant horizontalement de h , en la resserrant ou l'élargissant selon $|a|$ (et en la retournant si $a < 0$), puis en la déplaçant verticalement de k .

7.3 Discriminant et racines

Définition 7.3 — *discriminant*.

Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Proposition 7.4 — *cas particulier* $x^2 = d$.

Les solutions de l'équation $x^2 = d$ (pour $d \geq 0$) sont $x_1 = +\sqrt{d}$ et $x_2 = -\sqrt{d}$.
Si $d < 0$, il n'y a pas de solution réelle.

Proposition 7.5 — *théorème du produit nul*.

Si p et q sont deux expressions algébriques, alors

$$p \cdot q = 0 \iff p = 0 \text{ ou } q = 0.$$

Ce théorème permet de résoudre directement une équation dès qu'on en connaît une forme factorisée, à condition qu'un des membres de l'équation soit nul.

Exemple 7.3. Résoudre $(x + 3)(2x - 5) = 0$: par le théorème du produit nul, $x + 3 = 0$ ou $2x - 5 = 0$, donc $x = -3$ ou $x = \frac{5}{2}$.

Théorème 7.6 — *nature des racines*.

- $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$: une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = h$$

- $\Delta < 0$: aucune racine réelle

Exemple 7.4. Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$. $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$.

7.4 Forme factorisée

Théorème 7.7 — forme factorisée.

Si $\Delta \geq 0$, le trinôme se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Exemple 7.5. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.
 $2x^2 - 8x + 8 = 2(x - 2)^2$.

7.5 Signe du trinôme

Proposition 7.8 — signe de $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ a le signe de a pour tout x .
- Si $\Delta = 0$: $f(x) \geq 0$ si $a > 0$ (nul en x_0), $f(x) \leq 0$ si $a < 0$.
- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$: $f(x) < 0$ pour $x \in (x_1, x_2)$, $f(x) > 0$ pour $x \notin [x_1, x_2]$.
- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$: signes inversés.

Exemple 7.6. Résoudre $x^2 - x - 6 \leq 0$. Racines : $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. Comme $a = 1 > 0$: $f(x) \leq 0$ pour $x \in [-2, 3]$.

7.6 Représenter graphiquement une parabole

Proposition 7.9 — méthode des 5 points.

Pour tracer efficacement une parabole, on détermine, lorsque c'est possible : l'ordonnée à l'origine $f(0)$; le sommet et l'axe de symétrie; le symétrique du point $(0, f(0))$ par rapport à cet axe; la convexité ($a > 0$) ou la concavité ($a < 0$); et, si besoin, quelques points supplémentaires (avec leurs symétriques).

Exemple 7.7. Représenter $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ (déjà mise en forme canonique : $f(x) = 2(x - 2)^2 - 3$).

- Ordonnée à l'origine : $f(0) = 5$, point $(0, 5)$.
- Sommet : $S(2, -3)$, axe de symétrie : $x = 2$.
- Symétrique de $(0, 5)$ par rapport à $x = 2$: $(4, 5)$.
- $a = 2 > 0$: parabole convexe.
- Points supplémentaires : $f(1) = -1$ et $f(3) = -1$ (symétriques l'un de l'autre).

On reporte tous ces points dans un repère pour tracer la parabole.

7.7 Résoudre un problème d'optimisation

Définition 7.10 — *problème d'optimisation.*

Un **problème d'optimisation** consiste à déterminer la valeur extrême (maximum ou minimum) d'une grandeur, en la modélisant par une fonction du second degré dont on étudie le sommet.

Exemple 7.8. Un fermier dispose de 80 m de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire le long d'une rivière rectiligne (le côté le long de la rivière n'a pas besoin de clôture). Quelle aire maximale peut-il obtenir ?

Soit x la largeur (les deux côtés perpendiculaires à la rivière) et y la longueur. On a $2x + y = 80$, donc $y = 80 - 2x$, et l'aire est

$$A(x) = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x, \quad x \in]0, 40[.$$

Comme $a = -2 < 0$, la parabole est concave : le sommet est un maximum, atteint en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2 \cdot (-2)} = 20 \in]0, 40[.$$

L'aire maximale est $A(20) = -2 \cdot 20^2 + 80 \cdot 20 = 800 \text{ m}^2$, obtenue pour une largeur de 20 m et une longueur de 40 m.

7.8 Déterminer l'expression d'une parabole à partir d'un graphique

Remarque 7.3. quelle forme utiliser ? Si on connaît le **sommet** $S(h, k)$ et un autre point, on utilise la forme canonique $f(x) = a(x - h)^2 + k$ pour trouver a . Si on connaît les **zéros** x_1 et x_2 et un autre point, on utilise la forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple 7.9. Une parabole a pour sommet $S(-2, 5)$ et passe par $(0, 1)$. On pose $f(x) = a(x + 2)^2 + 5$. Comme $f(0) = 1$:

$$4a + 5 = 1 \iff a = -1.$$

Donc $f(x) = -(x + 2)^2 + 5 = -x^2 - 4x + 1$.

Exemple 7.10. Une parabole a pour zéros -1 et 4 , et passe par $(2, -6)$. On pose $f(x) = a(x + 1)(x - 4)$. Comme $f(2) = -6$:

$$a \cdot 3 \cdot (-2) = -6a = -6 \iff a = 1.$$

Donc $f(x) = (x + 1)(x - 4) = x^2 - 3x - 4$.

7.9 Intersections de deux courbes

Exemple 7.11. Calculer les points d'intersection de $f(x) = x + 1$ (une droite) et $g(x) = x^2 - x - 2$ (une parabole). On résout $f(x) = g(x)$:

$$x + 1 = x^2 - x - 2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$\Delta = 4 + 12 = 16$, donc $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$. En substituant dans f : $f(-1) = 0$ et $f(3) = 4$. Les points d'intersection sont $(-1, 0)$ et $(3, 4)$.

Équations de degré supérieur à 2. Lorsqu'on peut factoriser complètement une équation de degré > 2 , le théorème du produit nul permet d'en trouver toutes les solutions.

Exemple. Résoudre $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$:

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 = x^2(x - 4) - (x - 4) = (x - 4)(x^2 - 1) = (x - 4)(x - 1)(x + 1).$$

Par le théorème du produit nul : $x = 4$, $x = 1$ ou $x = -1$.

Relations de Viète. Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ces relations permettent de construire un trinôme à partir de ses racines sans calculer le discriminant.

Exemple. Un trinôme de coefficient dominant 3 a pour racines -2 et 5 .
 $b = -3(-2 + 5) = -9$ et $c = 3(-2)(5) = -30$: $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$.

7.10 Exercices

Exercice 7.1. Pour chaque trinôme, trouver la forme canonique, le sommet et le(s) racine(s) éventuelle(s) :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 2$

c) $h(x) = x^2 + x + 1$

Exercice 7.2. Résoudre les inéquations :

a) $x^2 - 3x - 10 > 0$

b) $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

c) $2x^2 + x + 1 < 0$

Exercice 7.3. Une balle est lancée vers le haut. Sa hauteur (en mètres) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$.

a) Quelle est la hauteur maximale atteinte ?

b) À quel moment la balle retouche-t-elle le sol ?

Exercice 7.4. Trouver le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ sachant que :

- a) son sommet est $S(1, -4)$ et il passe par $(3, 0)$
- b) ses racines sont -3 et 2 , et $f(0) = 12$

Exercice 7.5. [MA2] Les racines de $2x^2 + bx + c = 0$ vérifient $x_1 + x_2 = 3$ et $x_1 \cdot x_2 = -5$. Trouver b, c et les racines.

Exercice 7.6. Mettre $f(x) = x^2 + 10x + 18$ sous forme canonique par complétion du carré.

Exercice 7.7. Représenter $g(x) = -x^2 + 4x + 1$ en utilisant la méthode des 5 points.

Exercice 7.8. Un fermier dispose de 100 m de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire le long d'une rivière (le côté longeant la rivière n'a pas besoin de clôture). Quelle est l'aire maximale possible ?

Exercice 7.9. Déterminer l'expression algébrique de la parabole dans chaque cas :

- a) sommet $S(3, -2)$, passant par $(5, 6)$
- b) zéros -4 et 1 , passant par $(0, -8)$

Exercice 7.10. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = x^2 + x - 7$.

Exercice 7.11. [MA2] Résoudre $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

Exercice 7.12. Résoudre par la formule du discriminant :

- a) $x^2 - 2x - 8 = 0$
- b) $x^2 - 6x + 9 = 0$
- c) $x^2 + 2x + 5 = 0$

Exercice 7.13. Résoudre directement, en utilisant le théorème du produit nul :

- a) $(2x - 3)(x + 4) = 0$
- b) $x(x - 5) = 0$
- c) $3(x + 1)(2x - 7) = 0$

Exercice 7.14. Étudier le signe de $f(x) = -3x^2 + 12x - 12$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.15. Sans résoudre les équations, donner la somme et le produit des racines (réelles ou complexes) de chaque trinôme :

- a) $x^2 - 7x + 12$
- b) $2x^2 + 5x - 3$
- c) $-x^2 + 4x + 1$

Exercice 7.16. Pour chaque description du graphe d'une fonction du second degré, indiquer le signe du discriminant Δ .

- a) La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points distincts.
- b) La parabole est tangente à l'axe des abscisses (elle le touche en un seul point).
- c) La parabole ne rencontre jamais l'axe des abscisses.

Exercice 7.17. Une entreprise vend x articles au prix unitaire de $\left(50 - \frac{1}{2}x\right)$ CHF.

- a) Exprimer et développer la recette $R(x) = x \cdot \left(50 - \frac{1}{2}x\right)$.
- b) Pour quelle quantité x la recette est-elle maximale? Quelle est cette recette maximale?

Exercice 7.18. Démontrer les relations de Viète : si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. *Indication : partir de la forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$ et l'identifier à $ax^2 + bx + c$.*

Exercice 7.19. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite $y = mx + 1$ est tangente à la parabole $y = x^2 - 3x + 4$ (c'est-à-dire qu'elle la touche en un seul point).

Exercice 7.20. Résoudre l'équation bicarrée $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. *Indication : poser $u = x^2$.*

7.11 Résumé du chapitre

Trois formes

- **Développée** : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **Canonique** : $f(x) = a(x - h)^2 + k$, sommet $S(h, k)$ avec $h = -\frac{b}{2a}$, $k = f(h)$ (obtenue par **complétion du carré**)
- **Factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta \geq 0$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: deux racines $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$: racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: aucune racine réelle
- Cas particulier : $x^2 = d$ ($d \geq 0$) $\Rightarrow x = \pm\sqrt{d}$
- Théorème du produit nul : $p \cdot q = 0 \iff p = 0$ ou $q = 0$

Signe du trinôme ($\Delta > 0$)

- $a > 0$: négatif entre les racines, positif à l'extérieur
- $a < 0$: positif entre les racines, négatif à l'extérieur
- $\Delta < 0$: signe constant égal au signe de a

Représenter et déterminer une parabole

- Méthode des 5 points : ordonnée à l'origine, sommet/axe, point symétrique, convexité, points supplémentaires
- Optimisation : modéliser par $A(x)$, trouver le sommet (max si $a < 0$, min si $a > 0$), vérifier le domaine
- À partir d'un graphique : sommet connu $\rightarrow$ forme canonique ; zéros connus $\rightarrow$ forme factorisée ; puis un point supplémentaire pour trouver a
- Intersections de deux courbes : résoudre $f(x) = g(x)$
- Tangence droite/parabole : le système a une solution double $\iff \Delta = 0$

Relations de Viète

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ (utilisables sans calculer Δ)
- MA2 — preuve : développer $a(x - x_1)(x - x_2)$ et identifier avec $ax^2 + bx + c$

MA2 — Équations de degré > 2

- Factoriser complètement, puis théorème du produit nul
 - Équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$: poser $u = x^2$, résoudre en u , puis revenir à x
-

7.12 QCM — Fonctions du second degré

Une seule réponse correcte par question.

1. Le sommet de $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ est :
 - a) $(2, -5)$
 - b) $(-2, 23)$
 - c) $(4, 3)$
 - d) $(2, 3)$

2. Le discriminant de $x^2 + 4x + 5$ vaut :
 - a) 36
 - b) -4
 - c) 4
 - d) 0

3. Combien de racines réelles a $3x^2 - 6x + 3$?
 - a) Aucune
 - b) Une (double)
 - c) Deux distinctes
 - d) Trois

4. La forme factorisée de $x^2 - x - 6$ est :
 - a) $(x - 2)(x + 3)$
 - b) $(x + 2)(x - 3)$
 - c) $(x - 1)(x + 6)$
 - d) $(x - 6)(x + 1)$

5. L'ensemble des solutions de $x^2 - 4 \leq 0$ est :
 - a) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
 - b) $[-2, 2]$
 - c) $(-2, 2)$
 - d) $\mathbb{R}$

6. Une parabole a son sommet en $(1, -3)$ et son coefficient dominant vaut 2. Son équation est :
 - a) $2(x + 1)^2 - 3$
 - b) $2(x - 1)^2 + 3$
 - c) $2(x - 1)^2 - 3$
 - d) $2(x + 1)^2 + 3$

7. Pour $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, quelle est la valeur maximale ?

- a) 3
- b) 4
- c) -1
- d) 2

8. Les solutions de $2x^2 - 5x + 2 = 0$ sont :

- a) $x = 1$ et $x = 2$
- b) $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$
- c) $x = -\frac{1}{2}$ et $x = -2$
- d) $x = \frac{1}{2}$ et $x = -2$

9. Le sommet de $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ est :

- a) (3, 4)
- b) (3, -4)
- c) (-3, 4)
- d) (6, -5)

10. Les solutions de $(x - 2)(3x + 9) = 0$ sont :

- a) $x = 2$ et $x = -3$
- b) $x = -2$ et $x = 3$
- c) $x = 2$ et $x = 3$
- d) $x = -2$ et $x = -3$

11. Le maximum de $A(x) = -3x^2 + 60x$ vaut :

- a) 100
- b) 600
- c) 300
- d) 10

12. (MA2) Les solutions de $x^3 - 9x = 0$ sont :

- a) $x = 0$, $x = 3$ et $x = -3$
- b) $x = 0$ et $x = 9$
- c) $x = 3$ et $x = -3$ uniquement
- d) $x = 0$ uniquement

13. Sans résoudre l'équation, la somme et le produit des racines de $x^2 - 9x + 20$ sont :

- a) 9 et 20
- b) -9 et 20
- c) 9 et -20
- d) -9 et -20

14. (MA2) Les solutions réelles de l'équation bicarrée $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ sont :

- a) $x \in \{-3, -2, 2, 3\}$
- b) $x \in \{-6, 6\}$
- c) $x \in \{4, 9\}$
- d) $x \in \{-9, -4, 4, 9\}$

Réponses : 1-a 2-b 3-b 4-b 5-b 6-c 7-b 8-b 9-a 10-a 11-c 12-a 13-a
14-a

7.13 Corrigés

Solution 7.1.

- a) $h = 2, k = -1 : f(x) = (x - 2)^2 - 1. \Delta = 4 > 0 : x_1 = 1, x_2 = 3.$
 b) $h = 1, k = 0 : g(x) = -2(x - 1)^2. \Delta = 0 : \text{racine double } x_0 = 1.$
 c) $h = -\frac{1}{2}, k = \frac{3}{4} : h(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}. \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 : \text{aucune racine réelle.}$

Solution 7.2.

- a) $\Delta = 49, x_1 = -2, x_2 = 5, a = 1 > 0 : x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty).$
 b) $\Delta = 4 + 12 = 16, x_1 = -1, x_2 = 3, a = -1 < 0 : f \geq 0 \text{ pour } x \in [-1, 3].$
 c) $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0, a = 2 > 0 : f > 0 \text{ pour tout } x. \text{Aucune solution.}$

Solution 7.3.

- a) Sommet : $t_0 = \frac{-20}{2(-5)} = 2 \text{ s. } h(2) = -20 + 40 + 1 = 21 \text{ m.}$
 b) $-5t^2 + 20t + 1 = 0 : \Delta = 400 + 20 = 420. t = \frac{-20 \pm \sqrt{420}}{-10}. t > 0 : t = \frac{20 + \sqrt{420}}{10} \approx 4,05 \text{ s.}$

Solution 7.4.

- a) $f(x) = a(x - 1)^2 - 4. f(3) = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1. f(x) = (x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3.$
 b) $f(x) = a(x + 3)(x - 2). f(0) = a(3)(-2) = -6a = 12 \Rightarrow a = -2. f(x) = -2(x + 3)(x - 2) = -2x^2 - 2x + 12.$

Solution 7.5.

Relations de Viète : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = -6. x_1 x_2 = \frac{c}{2} = -5 \Rightarrow c = -10.$
 Trinôme : $2x^2 - 6x - 10. \Delta = 36 + 80 = 116 : x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{116}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}.$

Solution 7.6.

$$f(x) = (x^2 + 10x + 5^2) - 5^2 + 18 = (x + 5)^2 - 7.$$

Solution 7.7.

$g(0) = 1 : \text{point } (0, 1). \text{Axe de symétrie : } x = -\frac{4}{-2} = 2. \text{Sommet : } g(2) = 5, \text{ donc } S(2, 5). \text{Symétrique de } (0, 1) : (4, 1). a = -1 < 0 : \text{parabole concave. Points supplémentaires : } g(1) = 4 \text{ et } g(3) = 4.$

Solution 7.8.

Soit x la largeur : $y = 100 - 2x$ et $A(x) = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$, pour $x \in]0, 50[$. Comme $a = -2 < 0$, le maximum est atteint en $x = -\frac{100}{2 \cdot (-2)} = 25 \text{ m,}$ avec $A(25) = -2 \cdot 25^2 + 100 \cdot 25 = 1250 \text{ m}^2.$

Solution 7.9.

$$\text{a) } f(x) = a(x-3)^2 - 2. \quad f(5) = 4a - 2 = 6 \Rightarrow a = 2. \quad f(x) = 2(x-3)^2 - 2 = 2x^2 - 12x + 16.$$

$$\text{b) } f(x) = a(x+4)(x-1). \quad f(0) = -4a = -8 \Rightarrow a = 2. \quad f(x) = 2(x+4)(x-1) = 2x^2 + 6x - 8.$$

Solution 7.10.

$$2x-1 = x^2+x-7 \iff x^2-x-6 = 0. \quad \Delta = 1+24 = 25, \quad x_1 = \frac{1-5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1+5}{2} = 3. \\ f(-2) = -5, \quad f(3) = 5. \quad \text{Points d'intersection : } (-2, -5) \text{ et } (3, 5).$$

Solution 7.11.

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2 - 4) = (x+1)(x-2)(x+2).$$

Par le théorème du produit nul : $x = -1$, $x = 2$ ou $x = -2$.

Solution 7.12.

$$\text{a) } \Delta = 4 + 32 = 36 > 0 : x_1 = \frac{2-6}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

$$\text{b) } \Delta = 36 - 36 = 0 : \text{ racine double } x_0 = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\text{c) } \Delta = 4 - 20 = -16 < 0 : \text{ aucune racine réelle.}$$

Solution 7.13.

$$\text{a) } x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -4.$$

$$\text{b) } x = 0 \text{ ou } x = 5.$$

$$\text{c) } x = -1 \text{ ou } x = \frac{7}{2} \text{ (le facteur 3 ne peut pas être nul).}$$

Solution 7.14.

$\Delta = 144 - 144 = 0$: f possède une racine double. En factorisant : $f(x) = -3(x-2)^2$.
Comme $a = -3 < 0$ et $(x-2)^2 \geq 0$ toujours, on a $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec égalité uniquement en $x = 2$.

Solution 7.15.

$$\text{a) } x_1 + x_2 = 7, \quad x_1 x_2 = 12.$$

$$\text{b) } x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_1 x_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{c) } x_1 + x_2 = \frac{-4}{-1} = 4, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{-1} = -1.$$

Solution 7.16.

- a) $\Delta > 0$ (deux racines réelles distinctes).
 b) $\Delta = 0$ (racine double).
 c) $\Delta < 0$ (aucune racine réelle).

Solution 7.17.

a) $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 50x$.

b) Sommet : $x_0 = -\frac{50}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 50$. $R(50) = -\frac{1}{2}(2500) + 2500 = 1250$ CHF. La recette est maximale (et vaut 1250 CHF) pour $x = 50$ articles vendus.

Solution 7.18.

En développant :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

En identifiant avec $ax^2 + bx + c$: le coefficient de x donne $-a(x_1 + x_2) = b$, donc $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; le terme constant donne $ax_1x_2 = c$, donc $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Solution 7.19.

À l'intersection : $x^2 - 3x + 4 = mx + 1 \iff x^2 - (3+m)x + 3 = 0$. La droite est tangente lorsque cette équation a une racine double, c'est-à-dire $\Delta = 0$:

$$\Delta = (3 + m)^2 - 12 = m^2 + 6m - 3 = 0.$$

$$m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 12}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{48}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{3}.$$

Il y a deux valeurs de m possibles : $m = -3 + 2\sqrt{3}$ ou $m = -3 - 2\sqrt{3}$.

Solution 7.20.

En posant $u = x^2$: $u^2 - 5u + 4 = 0$, qui se factorise : $(u - 1)(u - 4) = 0$, donc $u = 1$ ou $u = 4$.

- $u = x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.
- $u = x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

L'équation a quatre solutions : $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

Chapitre 8

Pythagore et Thalès

Une corde de douze nœuds équidistants, attachée en boucle.

On suppose que les bâtisseurs de l'Égypte ancienne la tendaient en triangle — côtés de 3, 4 et 5 intervalles — pour obtenir un angle droit parfait.

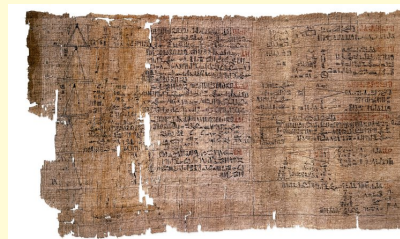
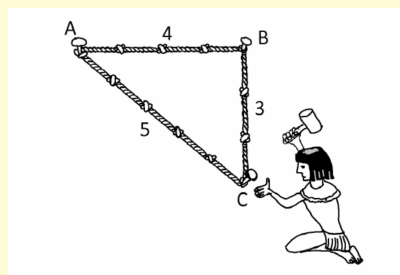
Ils ne savaient pas démontrer pourquoi cela fonctionnait.

Pythagore, six siècles plus tard, le démontra.

Mais la vérité était là, dans la corde, bien avant la preuve.

C'est souvent ainsi en mathématiques : on observe d'abord, on comprend ensuite.

Thalès, lui, mesurait la hauteur des pyramides en comparant les ombres. Deux hommes, deux idées, une leçon : les rapports et les proportions gouvernent la géométrie.¹

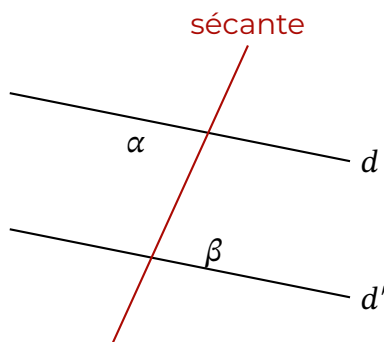


¹**Les faits** : L'idée que les arpenteurs égyptiens ("harpédonaptes") utilisaient une corde à 12 nœuds pour tracer des triangles 3-4-5 est une *conjecture historiographique proposée par l'historien Moritz Cantor en 1882*, largement popularisée depuis. Aucun papyrus égyptien connu (ni le papyrus Rhind, ni aucune inscription) ne décrit explicitement cette méthode. C'est un cas classique de légende méthodologique répétée sans preuve textuelle directe.

8.1 Rappels : angles et droites parallèles

Définition 8.1 — *angles particuliers formés par deux droites.*

Deux droites sécantes forment quatre angles. Deux angles **opposés par le sommet** sont situés de part et d'autre du point d'intersection. Lorsqu'une troisième droite (sécante) coupe deux autres droites, on obtient des paires d'angles **correspondants** (même position relative sur chaque droite), **alternes-internes** (situés entre les deux droites, de part et d'autre de la sécante) et **alternes-externes** (situés à l'extérieur, de part et d'autre de la sécante).



Théorème 8.2 — *angles opposés.*

Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Théorème 8.3 — *angles correspondants.*

Deux droites coupées par une sécante sont **parallèles** si et seulement si les angles correspondants qu'elle forme avec elles sont égaux.

Théorème 8.4 — *angles alternes-internes et alternes-externes.*

Deux droites coupées par une sécante sont parallèles si et seulement si les angles alternes-internes (resp. alternes-externes) qu'elle forme avec elles sont égaux.

Exemple 8.1. Deux droites d_1 et d_2 sont coupées par une sécante. Si l'angle qu'elle forme avec d_1 vaut 32° et l'angle correspondant qu'elle forme avec d_2 vaut aussi 32° , alors $d_1 \parallel d_2$. En revanche, si ces deux angles valaient 59° et 58° , les droites ne seraient pas parallèles.

8.2 Sommes d'angles dans les polygones

Théorème 8.5 — *somme des angles d'un triangle.*

Dans tout triangle, la somme des mesures des trois angles vaut 180° .

Exemple 8.2. Dans un triangle PAF , on a $\widehat{PAF} = 72^\circ$ et $\widehat{FPA} = 51^\circ$. Alors

$$\widehat{PFA} = 180^\circ - 72^\circ - 51^\circ = 57^\circ.$$

Théorème 8.6 — somme des angles d'un quadrilatère.

Dans tout quadrilatère, la somme des mesures des quatre angles vaut 360° .

Théorème 8.7 — triangles isocèle et équilatéral.

Un triangle ABC est **isocèle** avec $AB = AC$ si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$ (les angles à la base sont égaux). Un triangle est **équilatéral** si et seulement si ses trois angles valent chacun 60° .

Exemple 8.3. Un triangle isocèle en A a un angle à la base $\widehat{ABC} = 68^\circ$. Alors $\widehat{BCA} = 68^\circ$ également, et $\widehat{BAC} = 180^\circ - 2 \cdot 68^\circ = 44^\circ$.

8.3 Théorème de Pythagore

Théorème 8.8 — Pythagore.

Dans un triangle rectangle de côtés a , b et d'hypoténuse c :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Théorème 8.9 — réciproque de Pythagore.

Si $a^2 + b^2 = c^2$ dans un triangle de côtés a , b , c , alors ce triangle est rectangle en face de c .

Exemple 8.4. Triangle de côtés 5, 12, 13 : $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. ✓Rectangle.
Calculer la diagonale d'un carré de côté 1 : $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, donc $d = \sqrt{2}$.

Proposition 8.10 — théorèmes de la hauteur et d'Euclide.

Dans un triangle rectangle de côtés a , b , hypoténuse c et hauteur h issue du sommet droit :

$$h^2 = p \cdot q, \quad a^2 = p \cdot c, \quad b^2 = q \cdot c,$$

où p et q sont les projections de a et b sur c .

Exemple 8.5. Un triangle ABC est rectangle en A , avec $BC = 25$ et H le pied de la hauteur issue de A , tel que $BH = 9$. Alors $CH = 25 - 9 = 16$, et :

$$AH^2 = BH \cdot CH = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow AH = 12,$$

$$AB^2 = BH \cdot BC = 9 \cdot 25 = 225 \Rightarrow AB = 15, \quad AC^2 = CH \cdot BC = 16 \cdot 25 = 400 \Rightarrow AC = 20.$$

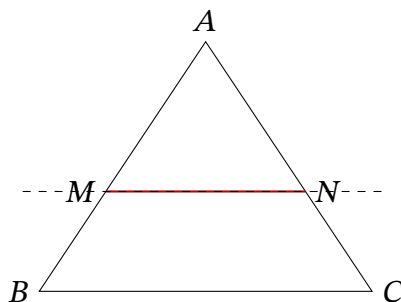
On vérifie : $AB^2 + AC^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2 = BC^2$. ✓

8.4 Théorème de Thalès

Théorème 8.11 — *Thalès*.

Soit un triangle ABC et une droite parallèle à (BC) coupant (AB) en M et (AC) en N . Alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$



Théorème 8.12 — *réciroque de Thalès*.

Si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors $(MN) \parallel (BC)$.

Exemple 8.6. Dans un triangle ABC , $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec $AM = 3$, $AB = 9$, $AN = 4$, $AC = 12$. $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{AN}{AC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. ✓ Donc $(MN) \parallel (BC)$ et $MN = \frac{1}{3}BC$.

Remarque 8.1. second énoncé de Thalès Le théorème de Thalès se reformule aussi à l'aide de deux droites sécantes en un point O , coupées par deux parallèles : si $[AB] \parallel [A'B']$ avec A, A' sur une droite issue de O et B, B' sur une autre, alors

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Cette configuration ("papillon" si A, B et A', B' sont de part et d'autre de O , ou "triangle emboîté" sinon) est équivalente à la formulation en triangle.

Exemple 8.7. O, A, A' sont alignés et O, B, B' sont alignés, avec $[AB] \parallel [A'B']$. On donne $OA = 4$, $OB = 6$, $OA' = 10$. Alors $\frac{OA'}{OA} = \frac{10}{4} = 2,5$, donc $OB' = 2,5 \cdot OB = 15$.

8.5 Triangles semblables

Définition 8.13 — *triangles semblables*.

Deux triangles sont **semblables** si leurs angles sont égaux deux à deux. Dans ce cas, leurs côtés sont **proportionnels** :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

où k est le **rapport de similitude**.

Proposition 8.14 — critères de similitude.

Deux triangles sont semblables si :

- **AA** : deux angles égaux (le troisième l'est aussi)
- **SAS** : deux côtés proportionnels et angle inclus égal
- **SSS** : trois côtés proportionnels

Remarque 8.2. Thalès est un cas particulier de similitude : les triangles AMN et ABC sont semblables (critère AA).

Trois parallèles coupant deux sécantes. Soient trois droites parallèles d, d', d'' coupant une première sécante en A, B, C (dans cet ordre) et une seconde en A', B', C' . En posant $t = \frac{AB}{AC}$, on a :

$$A'B' = t \cdot A'C', \quad BB' = AA' + t \cdot (CC' - AA').$$

Cette propriété généralise le théorème de Thalès : elle ne nécessite pas que les deux sécantes se coupent en un point commun.

Exemple. d, d', d'' sont parallèles, A, B, C alignés avec $AB = 4$, $BC = 8$, et A', B', C' alignés avec $AA' = 6$, $CC' = 10$, $A'C' = 9$. On a $t = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, d'où

$$A'B' = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3, \quad BB' = 6 + \frac{1}{3}(10 - 6) = 6 + \frac{4}{3} = \frac{22}{3}.$$

Démonstrations classiques de Pythagore. Il existe plus de 370 démonstrations connues du théorème de Pythagore. En voici une par les aires : Construire un carré de côté $a + b$. L'intérieur contient quatre triangles rectangles de côtés a, b et un carré central de côté c .

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \implies a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \implies a^2 + b^2 = c^2.$$

8.6 Exercices

Exercice 8.1. Calculer la longueur manquante (arrondir au centième si nécessaire) :

- Triangle rectangle, cathètes 6 et 8.
- Triangle rectangle, hypoténuse 13, cathète 5.
- Triangle rectangle, hypoténuse 7, cathète 4.

Exercice 8.2. Déterminer si chaque triangle est rectangle :

- a) Côtés 7, 24, 25.
- b) Côtés 4, 5, 6.
- c) Côtés $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Exercice 8.3. Dans le triangle ABC , $(MN) \parallel (BC)$, $AM = 4$, $MB = 6$, $AN = 3$.

- a) Calculer NC .
- b) Calculer MN si $BC = 15$.

Exercice 8.4. Deux triangles semblables ont des côtés 3, 4, 5 et 6, x , 10.

- a) Trouver le rapport de similitude.
- b) Calculer x .
- c) Quel est le rapport de leurs aires ?

Exercice 8.5. Un arbre projette une ombre de 8 m. Au même moment, un poteau de 2 m projette une ombre de 1,6 m. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 8.6. Deux droites d_1 et d_2 sont coupées par une sécante.

- a) L'angle formé avec d_1 vaut 55° et l'angle correspondant formé avec d_2 vaut aussi 55° . d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
- b) L'angle formé avec d_1 vaut 40° et l'angle correspondant formé avec d_2 vaut 42° . d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

Exercice 8.7.

- a) Dans un triangle, deux angles valent 48° et 97° . Calculer le troisième.
- b) Un triangle est isocèle en A , avec un angle à la base $\widehat{ABC} = 75^\circ$. Calculer $\widehat{BAC}$.

Exercice 8.8. Un triangle ABC est rectangle en A . La hauteur issue de A a pour pied H , avec $BC = 50$ et $BH = 18$. Calculer AH , AB et AC , puis vérifier avec le théorème de Pythagore.

Exercice 8.9. O, A, A' sont alignés et O, B, B' sont alignés, avec $[AB] \parallel [A'B']$. On donne $OA = 5$, $OB = 7$, $OB' = 21$. Calculer OA' .

Exercice 8.10. Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Son pied est posé au sol à 3 m du mur.

- a) À quelle hauteur l'échelle touche-t-elle le mur ?

- b) Calculer la diagonale d'un rectangle de 5 cm sur 12 cm.

Exercice 8.11. Deux droites parallèles d_1 et d_2 sont coupées par une sécante. L'angle formé avec d_1 vaut 118° .

- Quelle est la mesure de l'angle opposé par le sommet à cet angle (sur d_1) ?
- Quelle est la mesure de l'angle correspondant sur d_2 ?
- Quelle est la mesure de l'angle alterne-interne sur d_2 ?

Exercice 8.12. Un quadrilatère a trois de ses angles qui mesurent 80° , 95° et 110° . Calculer la mesure du quatrième angle.

Exercice 8.13. Pour chaque paire de triangles, dire s'ils sont semblables (en citant le critère utilisé) :

- Côtés 4, 6, 8 et côtés 6, 9, 12.
- Côtés 3, 5, 7 et côtés 6, 9, 15.

Exercice 8.14. Une personne de 1,75 m projette une ombre de 2,1 m. Au même moment, un immeuble voisin projette une ombre de 42 m. Quelle est la hauteur de l'immeuble ?

Exercice 8.15. Un triangle ABC est rectangle en A . La hauteur issue de A a pour pied H , avec $BC = 75$ et $BH = 27$. Calculer AH , AB et AC , puis vérifier avec le théorème de Pythagore.

Exercice 8.16. Dans un triangle ABC , $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec $AM = 6$, $AB = 9$, $AN = 8$, $AC = 12$. Montrer, à l'aide de la réciproque de Thalès, que $(MN) \parallel (BC)$.

Exercice 8.17. [MA2] Trois droites parallèles d, d', d'' coupent une première sécante en A, B, C avec $AB = 5$ et $BC = 10$, et une seconde sécante en A', B', C' avec $A'C' = 12$, $AA' = 8$ et $CC' = 14$. Calculer $A'B'$ et BB' .

Exercice 8.18. Démontrer le théorème de la hauteur ($h^2 = p \cdot q$) à l'aide de la similitude des triangles. *Indication : dans un triangle ABC rectangle en A , de hauteur AH (pied H sur BC), montrer que les triangles ABH et CAH sont semblables, puis en déduire une relation entre BH , AH et CH .*

Exercice 8.19. Trois droites parallèles d, d', d'' coupent une première sécante en A, B, C avec $AB = 6$ et $BC = 9$, et une seconde sécante en A', B', C' avec $A'C' = 15$, $AA' = 5$ et $CC' = 11$. Calculer $A'B'$ et BB' .

8.7 Résumé du chapitre

Angles et parallélisme

- Angles opposés par le sommet : toujours égaux
- Deux droites coupées par une sécante sont parallèles $\iff$ angles correspondants égaux $\iff$ angles alternes-internes (ou alternes-externes) égaux

Sommes d'angles

- Triangle : somme des angles = 180°
- Quadrilatère : somme des angles = 360°
- Isocèle en A ($AB = AC$) $\iff \widehat{ABC} = \widehat{BCA}$; équilatéral $\iff$ tous les angles valent 60°

Théorème de Pythagore

- Triangle rectangle : $a^2 + b^2 = c^2$ (c = hypoténuse)
- Réciproque : $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$ triangle rectangle
- Triplets pythagoriciens courants : (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17)
- Théorèmes de la hauteur et d'Euclide : $h^2 = p \cdot q$, $a^2 = p \cdot c$, $b^2 = q \cdot c$ (p, q projections des cathètes sur l'hypoténuse)

Théorème de Thalès

- $(MN) \parallel (BC)$ dans le triangle $ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
- Réciproque : rapports égaux $\Rightarrow$ droites parallèles
- Second énoncé (point O) : $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$
- MA2 : trois parallèles coupant deux sécantes : $A'B' = t \cdot A'C'$, $BB' = AA' + t(CC' - AA')$ avec $t = AB/AC$
- Application directe : calculer une longueur inconnue par proportionnalité

Triangles semblables

- Critères AA, SAS, SSS : un seul suffit à conclure à la similitude
 - Rapport de similitude k : côtés dans le rapport k , aires dans le rapport k^2
 - MA2 : le théorème de la hauteur ($h^2 = p \cdot q$) se démontre par similitude des triangles ABH et CAH (critère AA)
-

8.8 QCM — Pythagore et Thalès

Une seule réponse correcte par question.

1. Dans un triangle rectangle, les cathètes mesurent 9 et 12. L'hypoténuse mesure :
 - a) $\sqrt{225}$
 - b) 21
 - c) 15
 - d) $\sqrt{63}$

2. Un triangle de côtés 6, 8, 11 est-il rectangle ?
 - a) Oui, car $6 + 8 > 11$
 - b) Oui, car $6^2 + 8^2 = 100 = 11^2$
 - c) Non, car $6^2 + 8^2 = 100 \neq 121$
 - d) On ne peut pas savoir sans les angles

3. Dans un triangle ABC , $(MN) \parallel (BC)$, $AM = 5$, $AB = 20$, $BC = 16$. La longueur MN vaut :
 - a) 4
 - b) 6
 - c) 8
 - d) 64

4. Si deux triangles ont un rapport de similitude $k = 3$, le rapport de leurs aires est :
 - a) 3
 - b) 6
 - c) 9
 - d) $\sqrt{3}$

5. La diagonale d'un rectangle de dimensions 5×12 mesure :
 - a) 13
 - b) 17
 - c) $\sqrt{17}$
 - d) $\sqrt{119}$

6. Dans un triangle ABC , $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ avec $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{5}$. Quelle affirmation est vraie ?
 - a) $(MN) \perp (BC)$
 - b) $(MN) \parallel (BC)$ et $MN = \frac{2}{5}BC$

- c) $MN = BC$
- d) $(MN) \parallel (BC)$ et $MN = \frac{5}{2}BC$

7. Un escalier a des marches de 20 cm de hauteur et 25 cm de profondeur. La longueur de la rampe par marche est :

- a) 30 cm
- b) $\sqrt{1025} \approx 32$ cm
- c) 45 cm
- d) $\sqrt{625} = 25$ cm

8. Critère de similitude AA signifie :

- a) Deux côtés égaux suffisent
- b) Deux angles égaux suffisent
- c) Tous les côtés sont proportionnels
- d) Un angle et un côté égaux suffisent

9. Deux droites d_1 et d_2 sont coupées par une sécante. L'angle correspondant vaut 47° des deux côtés. On peut affirmer que :

- a) d_1 et d_2 sont parallèles
- b) d_1 et d_2 ne sont pas parallèles
- c) d_1 et d_2 sont perpendiculaires
- d) On ne peut rien affirmer

10. Dans un triangle, deux angles valent 55° et 65° . Le troisième angle vaut :

- a) 60°
- b) 70°
- c) 50°
- d) 120°

11. Un triangle est rectangle en A . La hauteur issue de A a pour pied H , avec $BC = 20$ et $BH = 5$. La longueur AH vaut :

- a) $5\sqrt{3}$
- b) 10
- c) 15
- d) $\sqrt{20}$

12. O, A, A' alignés et O, B, B' alignés, avec $[AB] \parallel [A'B']$. On donne $OA = 6, OB = 9, OA' = 18$. OB' vaut :

- a) 27
- b) 3
- c) 13,5
- d) On ne peut pas déterminer OB'

13. Un quadrilatère a trois angles qui mesurent 70° , 100° et 95° . Le quatrième angle vaut :
- a) 95°
 - b) 85°
 - c) 105°
 - d) 75°
14. Deux triangles ont pour côtés 4, 6, 8 et 6, 9, 12. Sont-ils semblables ?
- a) Oui, critère SSS (rapport $\frac{3}{2}$)
 - b) Non, les côtés ne sont pas proportionnels
 - c) Oui, mais uniquement par le critère AA
 - d) Impossible à déterminer sans les angles

Réponses : 1-c 2-c 3-a 4-c 5-a 6-b 7-b 8-b 9-a 10-a 11-a 12-a 13-a
14-a

8.9 Corrigés

Solution 8.1.

a) $c = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$

b) $a = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$

c) $b = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33} \approx 5,74.$

Solution 8.2.

a) $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. ✓Rectangle.

b) $4^2 + 5^2 = 41 \neq 36$. Non rectangle.

c) $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 = 2 + 3 = 5 = (\sqrt{5})^2$. ✓Rectangle.

Solution 8.3.

a) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} : \frac{4}{10} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = \frac{30}{4} = 7,5. NC = 7,5 - 3 = 4,5.$

b) $MN = \frac{AM}{AB} \cdot BC = \frac{4}{10} \cdot 15 = 6.$

Solution 8.4.

a) $k = \frac{10}{5} = 2.$

b) $x = 4k = 8.$

c) Le rapport des aires est $k^2 = 4.$

Solution 8.5.

Par similitude (même angle d'incidence du soleil) : $\frac{h}{8} = \frac{2}{1,6} \Rightarrow h = \frac{8 \times 2}{1,6} = 10 \text{ m}.$

Solution 8.6.

a) Oui, par le théorème des angles correspondants (les angles sont égaux).

b) Non : les angles correspondants ne sont pas égaux ($40^\circ \neq 42^\circ$).

Solution 8.7.

a) $180^\circ - 48^\circ - 97^\circ = 35^\circ.$

b) $\widehat{BCA} = 75^\circ$ aussi (isocèle), donc $\widehat{BAC} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$

Solution 8.8.

$CH = 50 - 18 = 32$. $AH^2 = 18 \cdot 32 = 576 \Rightarrow AH = 24$. $AB^2 = 18 \cdot 50 = 900 \Rightarrow AB = 30$.
 $AC^2 = 32 \cdot 50 = 1600 \Rightarrow AC = 40$. Vérification : $AB^2 + AC^2 = 900 + 1600 = 2500 = 50^2 = BC^2$. ✓

Solution 8.9.

$\frac{OB'}{OB} = \frac{21}{7} = 3$, donc $OA' = 3 \cdot OA = 15$.

Solution 8.10.

a) $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ m.

b) $d = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ cm.

Solution 8.11.

- a) 118° (angles opposés par le sommet égaux).
- b) 118° (angles correspondants égaux, car $d_1 \parallel d_2$).
- c) 118° (angles alternes-internes égaux, car $d_1 \parallel d_2$).

Solution 8.12.

$$360^\circ - 80^\circ - 95^\circ - 110^\circ = 75^\circ.$$

Solution 8.13.

- a) $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$: les trois rapports sont égaux, donc les triangles sont semblables (critère SSS).
- b) $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{9}{5} = 1,8$, $\frac{15}{7} \approx 2,14$: les rapports ne sont pas tous égaux, donc les triangles ne sont **pas** semblables.

Solution 8.14.

Par similitude (même angle d'incidence du soleil) :

$$\frac{h}{42} = \frac{1,75}{2,1} \Rightarrow h = \frac{1,75 \times 42}{2,1} = 35 \text{ m.}$$

Solution 8.15.

$CH = 75 - 27 = 48$. $AH^2 = 27 \cdot 48 = 1296 \Rightarrow AH = 36$. $AB^2 = 27 \cdot 75 = 2025 \Rightarrow AB = 45$. $AC^2 = 48 \cdot 75 = 3600 \Rightarrow AC = 60$. Vérification : $AB^2 + AC^2 = 2025 + 3600 = 5625 = 75^2 = BC^2$. ✓

Solution 8.16.

$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AN}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$. Les deux rapports sont égaux, donc par la réciproque de Thalès, $(MN) \parallel (BC)$.

Solution 8.17.

$$t = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}. A'B' = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4. BB' = 8 + \frac{1}{3}(14 - 8) = 8 + 2 = 10.$$

Solution 8.18.

Dans les triangles ABH et CAH :

- $\widehat{AHB} = \widehat{CHA} = 90^\circ$ (hauteur);
- $\widehat{ABH} = \widehat{CAH}$, car ce sont deux angles complémentaires à $\widehat{BAH}$ dans le triangle ABH d'une part, et $\widehat{HAC}$ est complémentaire à $\widehat{BAH}$ dans l'angle droit $\widehat{BAC}$ d'autre part — les deux angles sont donc égaux.

Par le critère AA, $ABH \sim CAH$. Les côtés homologues sont donc proportionnels :

$$\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH} \implies AH^2 = BH \cdot CH,$$

c'est-à-dire $h^2 = p \cdot q$ en posant $p = BH$, $q = CH$.

Solution 8.19.

$$t = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

$$A'B' = \frac{2}{5} \cdot 15 = 6, \quad BB' = 5 + \frac{2}{5}(11 - 5) = 5 + \frac{12}{5} = \frac{37}{5}.$$

Chapitre 9

Cercles et angles inscrits

Le cercle fascine depuis toujours.

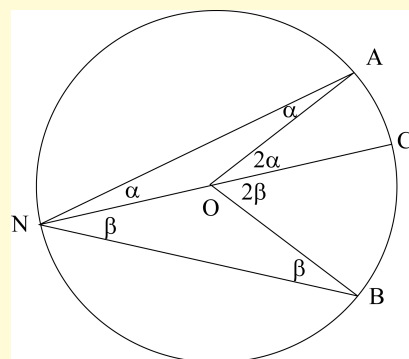
Pour les Grecs, c'était la forme parfaite : sans début ni fin, sans angle, sans défaut.

Aristote pensait que les astres se déplaçaient en cercles parce que le cercle était la seule figure digne du ciel.

Il avait tort sur les astres, mais les mathématiques lui donnent raison sur l'élégance : peu de figures géométriques recèlent autant de propriétés surprenantes.

Un angle inscrit qui vaut toujours la moitié de l'angle au centre. Un angle dans un demi-cercle qui est toujours droit. Des cordes qui se coupent selon des proportions fixes.

Le cercle est généreux en théorèmes.¹



¹**Les faits** : La conception aristotélicienne du cercle comme forme parfaite associée aux mouvements célestes est bien attestée dans les écrits aristotéliens (voir "Du ciel", "De Caelo").

9.1 Vocabulaire du cercle

Définition 9.1 — cercle et disque.

Le **cercle** de centre O et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points du plan à distance r de O :

$$\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid OM = r\}.$$

Le **disque** est l'intérieur du cercle : $\{M \mid OM \leq r\}$.

Définition 9.2 — éléments d'un cercle.

- **Corde** : segment joignant deux points du cercle
- **Diamètre** : corde passant par le centre ($d = 2r$)
- **Arc** : portion du cercle entre deux points
- **Secteur** : région délimitée par deux rayons et un arc
- **Tangente** : droite touchant le cercle en un seul point

Proposition 9.3 — tangente et rayon.

La tangente en un point T d'un cercle est perpendiculaire au rayon OT .

9.2 Périmètre, aire, arcs et secteurs

Définition 9.4 — π , périmètre et aire du disque.

Le nombre π est le rapport constant entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. Pour un cercle (ou un disque) de rayon r :

$$\text{périmètre } P = 2\pi r, \quad \text{aire } A = \pi r^2.$$

Proposition 9.5 — longueur d'un arc et aire d'un secteur.

Un **arc de cercle** est la portion de cercle interceptée par un angle au centre ; un **secteur** est la portion de disque correspondante. Si l'angle au centre mesure α° et le rayon vaut r , alors la longueur L de l'arc et l'aire A du secteur vérifient :

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi r} = \frac{A}{\pi r^2}.$$

(Ces proportions traduisent le fait que L et A sont proportionnels à α .)

Exemple 9.1. Un secteur a un rayon de 12 cm et un angle au centre de 75° .

$$L = 2\pi \cdot 12 \cdot \frac{75}{360} \approx 15,71 \text{ cm}, \quad A = \pi \cdot 12^2 \cdot \frac{75}{360} \approx 94,25 \text{ cm}^2.$$

9.3 Angle au centre et angle inscrit

Définition 9.6 — *angle au centre*.

Un **angle au centre** est un angle dont le sommet est le centre O du cercle. Il intercepte un arc.

Définition 9.7 — *angle inscrit*.

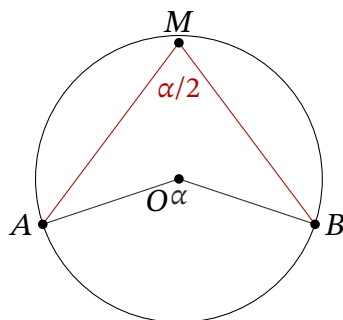
Un **angle inscrit** est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux autres points. Il intercepte le même arc que l'angle au centre correspondant.

Théorème 9.8 — *angle inscrit et angle au centre*.

L'angle inscrit est égal à la **moitié** de l'angle au centre qui intercepte le même arc :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB},$$

où O est le centre et A, B, M sont sur le cercle.



Corollaire 9.9 — *angles inscrits sur le même arc*.

Tous les angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.

9.4 Angle dans un demi-cercle

Théorème 9.10 — *angle de Thalès*.

Tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit. Autrement dit, si $[AB]$ est un diamètre et M un point du cercle distinct de A et B , alors $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Théorème 9.11 — *réciproque*.

Si $\widehat{AMB} = 90^\circ$ et M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, alors $[AB]$ est un diamètre.

Exemple 9.2. Pour trouver le centre d'un cercle passant par A, M, B avec $\widehat{AMB} = 90^\circ$: le centre est le milieu de $[AB]$.

9.5 Quadrilatère inscriptible

Définition 9.12 — quadrilatère inscriptible.

Un **quadrilatère inscriptible** (ou cyclique) est un quadrilatère dont les quatre sommets appartiennent à un même cercle.

Théorème 9.13 — angles opposés d'un quadrilatère inscriptible.

Dans un quadrilatère inscriptible $ABCD$, les angles opposés sont supplémentaires :

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ, \quad \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ.$$

Remarque 9.1. justification Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont des angles inscrits qui interceptent, à eux deux, tout le cercle : les angles au centre correspondants totalisent donc 360° , si bien que $\widehat{A} + \widehat{C} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$.

Exemple 9.3. Dans un cercle de centre O , A, B, C sont trois points du cercle tels que l'angle au centre interceptant le même arc que $\widehat{ABC}$ mesure 130° . Alors $\widehat{ABC} = 65^\circ$. Si D est un quatrième point du cercle tel que $ABCD$ soit un quadrilatère inscriptible convexe, alors $\widehat{ADC} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

9.6 Puissance d'un point

Théorème 9.14 — cordes sécantes.

Si deux cordes $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en P à l'intérieur d'un cercle :

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD.$$

Théorème 9.15 — sécantes depuis l'extérieur.

Si deux sécantes issues d'un point extérieur P coupent le cercle en A, C et B, D respectivement :

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD.$$

Ce produit commun est la **puissance** de P par rapport au cercle : $\pi(P) = PO^2 - r^2$.

MA2 — Approfondissement

Cercles orthogonaux. Deux cercles sont **orthogonaux** s'ils se coupent à angle droit, c'est-à-dire si les tangentes en chaque point d'intersection sont perpendiculaires.

Condition analytique : si les cercles ont centres O_1, O_2 et rayons r_1, r_2 :

$$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

La puissance d'un centre par rapport à l'autre cercle est alors r_1^2 (resp. r_2^2).

9.7 Exercices

Exercice 9.1. Un secteur de disque a un rayon de 9 cm et un angle au centre de 110° . Calculer, arrondies au centième, la longueur de l'arc et l'aire du secteur.

Exercice 9.2. L'extrémité d'un pendule de 45 cm de long décrit un arc de cercle lorsqu'il oscille d'un angle de 50° . Calculer la longueur de cet arc (arrondie au centième).

Exercice 9.3. Calculer le périmètre et l'aire d'un disque de rayon 9 cm (arrondis au centième).

Exercice 9.4. Dans un cercle de centre O , l'angle au centre $\widehat{AOB} = 80^\circ$.

- Quel est l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ si M est sur le grand arc ?
- Quel est l'angle inscrit $\widehat{ANB}$ si N est sur le petit arc ?

Exercice 9.5. $[AB]$ est un diamètre de cercle, M est un point du cercle. On sait que $AM = 6$ et $AB = 10$.

- Justifier que $\widehat{AMB} = 90^\circ$.
- Calculer BM .
- Calculer l'aire du triangle AMB .

Exercice 9.6. $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle (quadrilatère cyclique). On sait que $\widehat{A} = 75^\circ$.

- Calculer $\widehat{C}$.
- Si de plus $\widehat{B} = 110^\circ$, calculer $\widehat{D}$.

Exercice 9.7. Dans un cercle de centre O , A, B, C sont trois points du cercle tels que l'angle au centre interceptant le même arc que l'angle inscrit $\widehat{ABC}$ mesure 130° .

- Calculer $\widehat{ABC}$.

- b) D est un quatrième point du cercle tel que $ABCD$ soit un quadrilatère inscriptible convexe. Calculer $\widehat{ADC}$.

Exercice 9.8. Deux cordes $[AC]$ et $[BD]$ d'un cercle se coupent en P . On sait que $PA = 3$, $PC = 8$, $PB = 4$. Calculer PD .

Exercice 9.9. Un point P est à distance 10 du centre O d'un cercle de rayon 6. Une tangente issue de P touche le cercle en T . Calculer PT .

Exercice 9.10. Dans un cercle de centre O , identifier le terme correspondant à chaque description :

- Un segment qui joint deux points du cercle.
- Une corde qui passe par le centre O .
- Une droite qui touche le cercle en un seul point.
- La région délimitée par deux rayons et l'arc qu'ils interceptent.

Exercice 9.11. Calculer le périmètre et l'aire d'un disque de rayon 6,5 cm (arrondis au centième).

Exercice 9.12. Un secteur de disque a un rayon de 15 cm et un angle au centre de 140° . Calculer, arrondies au centième, la longueur de l'arc et l'aire du secteur.

Exercice 9.13. Dans un cercle, l'angle inscrit $\widehat{AMB} = 35^\circ$, où M est sur le grand arc.

- Calculer l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptant le même arc que $\widehat{AMB}$.
- Un point N se trouve sur le petit arc ; calculer $\widehat{ANB}$.

Exercice 9.14. Dans un cercle, M et N sont deux points du grand arc délimité par A et B , avec $\widehat{AMB} = 42^\circ$. Que vaut $\widehat{ANB}$? Justifier.

Exercice 9.15. $[AB]$ est un diamètre de cercle, M un point du cercle, avec $BM = 9$ et $AB = 15$.

- Calculer AM .
- Calculer l'aire du triangle AMB .

Exercice 9.16. Depuis un point P , une tangente touche un cercle de rayon 8 en un point T , avec $PT = 15$. Calculer la distance PO entre P et le centre O du cercle.

Exercice 9.17. Depuis un point P extérieur à un cercle, une première sécante coupe le cercle en A (le plus proche) puis C , avec $PA = 4$ et $PC = 10$. Une seconde sécante coupe le cercle en B (le plus proche) puis D , avec $PB = 5$. Calculer PD .

Exercice 9.18. Un point P est à distance 13 du centre O d'un cercle de rayon 5.

- a) Calculer la puissance $\pi(P)$ de P par rapport à ce cercle.
- b) Une sécante issue de P coupe le cercle en A puis C , avec $PA = 8$. Calculer PC .

Exercice 9.19. Deux cercles de rayons $r_1 = 3$ et $r_2 = 4$ sont orthogonaux.

- a) Calculer la distance O_1O_2 entre leurs centres.
- b) Calculer la puissance du centre O_1 par rapport au second cercle, et vérifier qu'elle vaut bien r_1^2 .

9.8 Résumé du chapitre

Périmètre, aire, arcs et secteurs

- Cercle/disque de rayon r : périmètre $P = 2\pi r$, aire $A = \pi r^2$
- Arc et secteur d'angle au centre α° : $\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi r} = \frac{A}{\pi r^2}$

Angle au centre et angle inscrit

- Angle inscrit = $\frac{1}{2}$ angle au centre (même arc intercepté)
- Tous les angles inscrits sur le même arc sont égaux
- Angle inscrit dans un demi-cercle = 90°

Quadrilatère inscrit

- Quatre sommets sur un même cercle
- Angles opposés supplémentaires : $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ (justification : les deux angles inscrits se partagent les 360° des angles au centre correspondants)

Tangente

- Tangente $\perp$ rayon au point de contact
- Longueur de tangente depuis P : $PT = \sqrt{PO^2 - r^2}$

Puissance d'un point

- Cordes sécantes intérieures : $PA \cdot PC = PB \cdot PD$
 - Sécantes extérieures : même formule
 - Puissance : $\pi(P) = PO^2 - r^2 = PA \cdot PC$ (pour toute sécante depuis P)
 - MA2 — cercles orthogonaux : $O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2$; la puissance d'un centre par rapport à l'autre cercle vaut alors le carré de son propre rayon
-

9.9 QCM — Cercles et angles inscrits

Une seule réponse correcte par question.

1. Un disque a un rayon de 7 cm. Son aire vaut environ :
 - a) 22 cm^2
 - b) $43,98 \text{ cm}^2$
 - c) $153,9 \text{ cm}^2$
 - d) $307,9 \text{ cm}^2$
2. Un secteur de disque a un rayon de 10 cm et un angle au centre de 90° . La longueur de l'arc vaut environ :
 - a) 5,00 cm
 - b) 7,85 cm
 - c) 15,71 cm
 - d) 31,42 cm
3. Un cercle a un périmètre d'environ 31,4 cm. Son rayon vaut environ :
 - a) 3 cm
 - b) 5 cm
 - c) 10 cm
 - d) 16 cm
4. Dans un quadrilatère inscriptible $ABCD$, $\widehat{B} = 100^\circ$. Alors $\widehat{D}$ vaut :
 - a) 80°
 - b) 100°
 - c) 260°
 - d) On ne peut pas savoir
5. L'angle au centre vaut 120° . L'angle inscrit interceptant le même arc vaut :
 - a) 240°
 - b) 120°
 - c) 60°
 - d) 30°
6. $[AB]$ est un diamètre d'un cercle et M est sur ce cercle. L'angle $\widehat{AMB}$ vaut :
 - a) 45°
 - b) 60°
 - c) 90°
 - d) 180°
7. Deux angles inscrits interceptant le même arc sont :

- a) Supplémentaires
- b) Complémentaires
- c) Égaux
- d) L'un double de l'autre

8. Dans un quadrilatère cyclique $ABCD$, $\hat{A} = 82^\circ$. Alors $\hat{C}$ vaut :

- a) 82°
- b) 98°
- c) 164°
- d) 278°

9. Un point P est à distance 13 du centre d'un cercle de rayon 5. La longueur de la tangente issue de P vaut :

- a) 8
- b) 12
- c) $\sqrt{194}$
- d) 18

10. Deux cordes se coupent en P avec $PA = 4$, $PC = 9$, $PB = 6$. Alors PD vaut :

- a) 4
- b) 6
- c) $\frac{3}{2}$
- d) $\frac{2}{3}$

11. La tangente en T à un cercle de centre O est :

- a) Parallèle au rayon OT
- b) Perpendiculaire au rayon OT
- c) Sécante au cercle en un autre point
- d) Confondue avec le diamètre

12. L'angle au centre vaut 200° . L'angle inscrit du côté du petit arc vaut :

- a) 100°
- b) 80°
- c) 160°
- d) 40°

13. Le segment qui relie deux points d'un cercle, sans nécessairement passer par le centre, s'appelle :

- a) un diamètre
- b) une corde
- c) une tangente
- d) un secteur

14. (MA2) Deux cercles orthogonaux ont pour rayons 3 et 4. La distance entre leurs centres vaut :

- a) 7
- b) 5
- c) 25
- d) 1

Réponses : 1-c 2-c 3-b 4-a 5-c 6-c 7-c 8-b 9-b 10-b 11-b 12-a 13-b
14-b

9.10 Corrigés

Solution 9.1.

$$L = 2\pi \cdot 9 \cdot \frac{110}{360} \approx 17,28 \text{ cm}, \quad A = \pi \cdot 9^2 \cdot \frac{110}{360} \approx 77,75 \text{ cm}^2.$$

Solution 9.2.

$$L = 2\pi \cdot 45 \cdot \frac{50}{360} \approx 39,27 \text{ cm}.$$

Solution 9.3.

Périmètre : $2\pi \cdot 9 \approx 56,55 \text{ cm}$. Aire : $\pi \cdot 9^2 \approx 254,47 \text{ cm}^2$.

Solution 9.4.

a) $\widehat{AMB} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

b) N est sur le petit arc, donc il intercepte le grand arc ($360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$).
 $\widehat{ANB} = \frac{280^\circ}{2} = 140^\circ$.

Solution 9.5.

a) $[AB]$ est un diamètre, donc par le théorème de l'angle dans le demi-cercle :
 $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

b) $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$.

c) Aire = $\frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Solution 9.6.

a) Dans un quadrilatère cyclique, les angles opposés sont supplémentaires :
 $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$, donc $\widehat{C} = 105^\circ$.

b) $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$, donc $\widehat{D} = 70^\circ$.

Solution 9.7.

a) $\widehat{ABC} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$.

b) Comme $ABCD$ est inscriptible : $\widehat{ADC} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

Solution 9.8.

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD : 3 \cdot 8 = 4 \cdot PD \Rightarrow PD = 6.$$

Solution 9.9.

Le triangle OTP est rectangle en T (rayon $\perp$ tangente). $PT = \sqrt{PO^2 - OT^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$.

Solution 9.10.

- a) Une corde.
- b) Un diamètre.
- c) Une tangente.
- d) Un secteur.

Solution 9.11.

Périmètre : $2\pi \cdot 6,5 \approx 40,84$ cm. Aire : $\pi \cdot 6,5^2 \approx 132,73$ cm².

Solution 9.12.

$$L = 2\pi \cdot 15 \cdot \frac{140}{360} \approx 36,65 \text{ cm}, \quad A = \pi \cdot 15^2 \cdot \frac{140}{360} \approx 274,89 \text{ cm}^2.$$

Solution 9.13.

- a) $\widehat{AOB} = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$.
- b) N intercepte le grand arc, qui mesure $360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$, donc $\widehat{ANB} = \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$.

Solution 9.14.

$\widehat{ANB} = 42^\circ$: M et N étant sur le même arc, les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent le même arc et sont donc égaux (corollaire des angles inscrits sur le même arc).

Solution 9.15.

- a) Comme $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (angle dans le demi-cercle) : $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$.
- b) Aire = $\frac{1}{2} \cdot AM \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$.

Solution 9.16.

Le triangle OTP est rectangle en T (rayon $\perp$ tangente) : $PO = \sqrt{PT^2 + OT^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$.

Solution 9.17.

D'après le théorème des sécantes depuis l'extérieur : $PA \cdot PC = PB \cdot PD$:

$$4 \times 10 = 5 \times PD \Rightarrow PD = \frac{40}{5} = 8.$$

Solution 9.18.

- a) $\pi(P) = PO^2 - r^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$.
- b) Puisque $PA \cdot PC = \pi(P)$: $PC = \frac{144}{8} = 18$.

Solution 9.19.

a) $O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow O_1O_2 = 5.$

b) Puissance de O_1 par rapport au cercle 2 : $O_1O_2^2 - r_2^2 = 25 - 16 = 9 = r_1^2.$
✓

Chapitre 10

Trigonométrie dans le triangle rectangle

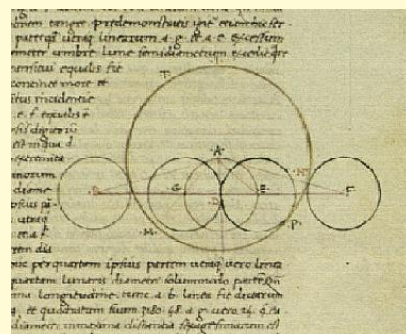
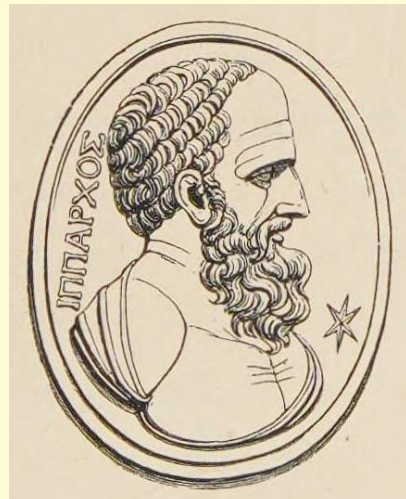
Hipparque de Nicée, astronome grec du II^e siècle avant notre ère, voulait mesurer la distance entre la Terre et la Lune.

Sans télescope, sans satellite, avec seulement des angles et de la géométrie.

Il construisit la première table de cordes — l'ancêtre de nos tables trigonométriques — et obtint une estimation remarquablement précise.

Deux mille ans plus tard, les mêmes rapports entre angles et longueurs permettent à un ingénieur de calculer la hauteur d'un pont, à un navigateur de tracer sa route, à un physicien de décomposer des forces.

La trigonométrie est la géométrie mise en calcul.¹



¹**Les faits** : Hipparque de Nicée (II^e siècle av. J.-C.) est crédité de la première table de cordes trigonométrique, utilisée notamment pour ses travaux astronomiques (distance Terre-Lune). Bien établi comme attribution générale, même si l'essentiel de son œuvre est connu indirectement via Ptolémée (l' "Almageste"), la table originale d'Hipparque n'étant pas conservée telle quelle.

10.1 Les rapports trigonométriques

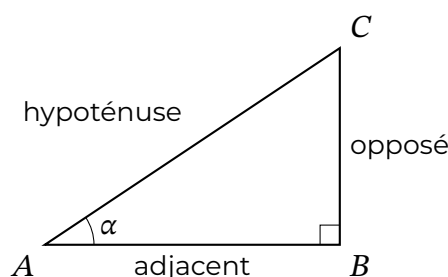
Définition 10.1 — *sinus, cosinus, tangente.*

Dans un triangle rectangle d'angle aigu α , en notant les côtés par rapport à α :

- côté **adjacent** à α : adj
- côté **opposé** à α : opp
- **hypoténuse** : hyp

On définit :

$$\sin \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}.$$



Remarque 10.1. Le moyen mnémotechnique : **SOH-CAH-TOA** (Sinus = Opposé/Hypoténuse, Cosinus = Adjacent/Hypoténuse, Tangente = Opposé/Adjacent).

Remarque 10.2. pourquoi ces rapports sont-ils bien définis ? Le théorème de Thalès garantit que, pour un angle α fixé, les rapports $\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$, $\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ et $\frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ sont les **mêmes** quelle que soit la taille du triangle rectangle choisi : deux triangles rectangles ayant le même angle aigu α sont semblables. On peut donc parler *du* sinus, *du* cosinus et *de la* tangente de α , sans préciser de triangle particulier.

10.2 Angles remarquables

Proposition 10.2 — *valeurs exactes.*

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Exemple 10.1. Triangle équilatéral de côté 2 : la hauteur vaut $h = 2 \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

10.3 Relations fondamentales

Proposition 10.3 — relations trigonométriques de base.

Pour tout angle aigu α :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Théorème 10.4 — angles complémentaires.

Si α et β sont deux angles **complémentaires** ($\alpha + \beta = 90^\circ$), alors :

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}.$$

Remarque 10.3. justification Dans un triangle rectangle en C d'angles aigus α et β (avec $\alpha + \beta = 90^\circ$), le côté opposé à α est le côté adjacent à β , et réciproquement : c'est pourquoi $\sin \alpha = \frac{\text{opp}(\alpha)}{\text{hyp}} = \frac{\text{adj}(\beta)}{\text{hyp}} = \cos \beta$, et de même pour les deux autres relations.

Exemple 10.2. Sachant que $\cos(35^\circ) \approx 0,819$, on obtient directement $\sin(55^\circ) \approx 0,819$, sans calculatrice, car 35° et 55° sont complémentaires.

10.4 Résolution de triangles rectangles

Définition 10.5 — résolution d'un triangle.

Résoudre un triangle, c'est déterminer tous ses côtés et tous ses angles à partir de données suffisantes. Pour un triangle rectangle, deux éléments suffisent (en dehors de l'angle droit) : un angle et un côté, ou deux côtés.

Exemple 10.3. un problème concret Juliette se trouve à 30 m d'un château d'eau et veut connaître sa hauteur. Depuis un appareil placé à 1,70 m du sol, elle mesure un angle d'élévation de 58° vers le sommet.

On note H le pied du château d'eau, I son sommet, et J le point où se trouve l'appareil, à la même hauteur que le sol. Le triangle HIJ est rectangle en H , avec $HJ = 30$ et $\widehat{HJI} = 58^\circ$:

$$\tan(58^\circ) = \frac{HI}{HJ} \implies HI = 30 \cdot \tan(58^\circ) \approx 48,0 \text{ m.}$$

En ajoutant la hauteur de l'appareil : $48,0 + 1,70 \approx 49,7$, donc le château d'eau mesure environ 50 m.

Exemple 10.4. Triangle rectangle en B , $\alpha = 35^\circ$, hypoténuse $c = 10$.

$$a = c \sin \alpha = 10 \sin 35^\circ \approx 5,74$$

$$b = c \cos \alpha = 10 \cos 35^\circ \approx 8,19$$

$$\beta = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

Exemple 10.5. Triangle rectangle en B , $a = 5$, $b = 7$.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{7} \implies \alpha = \arctan\left(\frac{5}{7}\right) \approx 35,5^\circ.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{74} \approx 8,60.$$

Proposition 10.6 — aire d'un triangle.

L'aire d'un triangle de côtés a , b et d'angle inclus γ :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Formule de l'aire généralisée et premières applications. La formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ vaut pour tout triangle, pas seulement les triangles rectangles. Elle relie directement l'aire à deux côtés et l'angle qu'ils forment.

Application. Un parallélogramme de côtés a et b avec angle θ a pour aire $\mathcal{A} = ab \sin \theta$. Pour $\theta = 90^\circ$: on retrouve $\mathcal{A} = ab$.

10.5 Exercices

Exercice 10.1. Dans chaque triangle rectangle en B , calculer les éléments manquants (arrondir au dixième) :

- a) $\alpha = 40^\circ$, $c = 15$ (hypoténuse)
- b) $\alpha = 62^\circ$, $a = 9$ (côté opposé à α)
- c) $a = 6$, $b = 11$ (côtés de l'angle droit)

Exercice 10.2. Sans calculatrice, calculer exactement :

- a) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$
- b) $\tan 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$
- c) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$
- d) $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$

Exercice 10.3. Du haut d'une falaise, on observe un bateau en mer avec un angle de dépression de 18° . La falaise mesure 85 m. Quelle est la distance horizontale entre le pied de la falaise et le bateau ?

Exercice 10.4. Depuis un point situé à 40 m de la base d'un immeuble, l'angle d'élévation du sommet est de 35° . Calculer la hauteur de l'immeuble (arrondie au mètre).

Exercice 10.5. La ficelle tendue d'un cerf-volant mesure 130 m et fait un angle de 42° avec l'horizontale. À quelle hauteur se trouve le cerf-volant (arrondie au mètre) ?

Exercice 10.6. Calculer l'aire d'un triangle isocèle dont les deux côtés égaux mesurent 8 cm et forment un angle de 50° .

Exercice 10.7. En utilisant $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, simplifier les expressions :

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

b) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$ (pour $\sin \alpha \neq 0$)

Exercice 10.8. β est un angle aigu tel que $\cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Calculer les valeurs exactes de $\sin \beta$ et $\tan \beta$.

Exercice 10.9. (MA2) P et Q sont deux points d'un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, tels que $\widehat{AQP} = 35^\circ$. On donne $AB = 5$ cm.

- Justifier que $\widehat{ABP} = 35^\circ$.
- Quelle est la nature du triangle APB ? Justifier.
- Calculer la longueur AP (arrondie au centième).

Exercice 10.10. Dans chaque triangle rectangle en B (angle α en A , β en C), calculer les éléments manquants (arrondir au dixième) :

- $\alpha = 27^\circ$, $b = 14$ (côté adjacent à α)
- $\beta = 48^\circ$, $c = 20$ (hypoténuse)
- $a = 8$, $c = 17$ (côté opposé à α , hypoténuse)

Exercice 10.11. On donne $\sin(23^\circ) \approx 0,391$ et $\cos(23^\circ) \approx 0,921$. Sans calculatrice, à l'aide des relations entre angles complémentaires, donner des valeurs approchées de :

- $\cos(67^\circ)$
- $\sin(67^\circ)$

Exercice 10.12. Du sommet d'un phare haut de 45 m, on observe deux bateaux alignés avec la base du phare, avec des angles de dépression respectifs de 20° (bateau lointain) et 35° (bateau proche). Quelle est la distance entre les deux bateaux (arrondie au dixième de mètre) ?

Exercice 10.13. Un observateur situé à 25 m du pied d'un arbre mesure un angle d'élévation de 32° vers le sommet. Sachant que ses yeux se trouvent à 1,60 m du sol, quelle est la hauteur de l'arbre (arrondie au centième) ?

Exercice 10.14. Un triangle a deux côtés de 9 cm et 13 cm formant un angle de 65° . Calculer son aire (arrondie au dixième).

Exercice 10.15. Un triangle de côtés $a = 10$ cm et b formant un angle de 40° a une aire de 30 cm^2 . Calculer b (arrondi au centième).

Exercice 10.16. Simplifier l'expression $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha)$.

Exercice 10.17. Un parallélogramme a des côtés de 6 cm et 9 cm, formant un angle de 55° . Calculer son aire (arrondie au dixième).

Exercice 10.18. $[AB]$ est un diamètre d'un cercle, P un point du cercle. Q est un autre point du cercle tel que $\widehat{AQP} = 50^\circ$. On donne $AP = 9$ cm.

- Justifier que $\widehat{ABP} = 50^\circ$.
- Calculer le diamètre AB , puis le rayon R du cercle (arrondis au centième).

10.6 Résumé du chapitre

Définitions (SOH-CAH-TOA)

$$\sin \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}, \quad \cos \alpha = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}, \quad \tan \alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Bien définis grâce à Thalès : ces rapports ne dépendent que de l'angle α , pas de la taille du triangle.

Angles remarquables

α	30°	45°	60°
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Relations fondamentales

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Angles complémentaires ($\alpha + \beta = 90^\circ$)

- $\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta$
- $\tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}$

Résolution et aire

- Deux éléments suffisent (hors angle droit)
- Aire d'un triangle : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
- MA2 — aire d'un parallélogramme de côtés a, b et d'angle θ : $\mathcal{A} = ab \sin \theta$
- MA2 — corde vue depuis un point d'un cercle de diamètre $[AB]$: combiner angle inscrit + angle du demi-cercle, puis $\sin \theta = \frac{\text{corde}}{AB}$

10.7 QCM — Trigonométrie dans le triangle rectangle

Une seule réponse correcte par question.

1. α et β sont deux angles complémentaires et $\tan \alpha = 5$. Alors $\tan \beta$ vaut :
 - a) 5
 - b) -5
 - c) $\frac{1}{5}$
 - d) $\sqrt{5}$

2. Depuis un point situé à 40 m de la base d'un immeuble, l'angle d'élévation du sommet est de 35° . La hauteur de l'immeuble vaut environ :
 - a) 23 m
 - b) 28 m
 - c) 33 m
 - d) 40 m

3. La ficelle tendue d'un cerf-volant mesure 130 m et fait un angle de 42° avec l'horizontale. La hauteur du cerf-volant vaut environ :
 - a) 87 m
 - b) 97 m
 - c) 70 m
 - d) 117 m

4. $[AB]$ est un diamètre d'un cercle, P est un point du cercle tel que $\widehat{ABP} = 40^\circ$. L'angle $\widehat{APB}$ vaut :
 - a) 40°
 - b) 50°
 - c) 90°
 - d) 140°

5. Dans un triangle rectangle, $\alpha = 30^\circ$ et l'hypoténuse = 10. Le côté opposé à α vaut :
 - a) $5\sqrt{3}$
 - b) 5
 - c) $10\sqrt{3}$
 - d) $\frac{10}{\sqrt{3}}$

6. $\cos 45^\circ$ vaut exactement :
 - a) $\frac{1}{2}$
 - b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) 1

7. Dans un triangle rectangle en B , $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ et $b = 8$. Le côté a vaut :

- a) 6
- b) $\frac{32}{3}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) 10

8. $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$ vaut :

- a) $\frac{3}{4}$
- b) $\frac{1}{4}$
- c) 1
- d) $\sqrt{3}$

9. Un observateur voit le sommet d'une tour sous un angle d'élévation de 25° , à 60 m de la base. La hauteur de la tour est approximativement :

- a) 25 m
- b) 28 m
- c) 54 m
- d) 66 m

10. $\sin(90^\circ - \alpha)$ est égal à :

- a) $\sin \alpha$
- b) $-\sin \alpha$
- c) $\cos \alpha$
- d) $\tan \alpha$

11. L'aire d'un triangle de côtés 6 et 9 avec angle inclus 60° vaut :

- a) 27
- b) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$
- c) 54
- d) $27\sqrt{3}$

12. Dans un triangle rectangle en B , $\alpha = 50^\circ$ et $a = 7$. L'hypoténuse vaut approximativement :

- a) 5,4
- b) 9,1
- c) 10,9
- d) 8,4

13. (MA2) Un parallélogramme a des côtés de 5 cm et 8 cm formant un angle de 30° . Son aire vaut :
- a) 20 cm^2
 - b) 40 cm^2
 - c) 10 cm^2
 - d) $20\sqrt{3} \text{ cm}^2$
14. L'expression $(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha)$ est égale à :
- a) 1
 - b) $\cos^2 \alpha$
 - c) $\sin^2 \alpha$
 - d) $\tan^2 \alpha$

Réponses : 1-c 2-b 3-a 4-c 5-b 6-c 7-a 8-c 9-b 10-c 11-b 12-b 13-a
14-a

10.8 Corrigés

Solution 10.1.

$$\text{a) } a = 15 \sin 40^\circ \approx 9,6; b = 15 \cos 40^\circ \approx 11,5; \beta = 50^\circ.$$

$$\text{b) } c = \frac{9}{\sin 62^\circ} \approx 10,2; b = \frac{9}{\tan 62^\circ} \approx 4,8; \beta = 28^\circ.$$

$$\text{c) } c = \sqrt{36 + 121} = \sqrt{157} \approx 12,5; \alpha = \arctan \frac{6}{11} \approx 28,6^\circ; \beta \approx 61,4^\circ.$$

Solution 10.2.

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\text{b) } 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{c) } \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} = \tan 60^\circ. \checkmark$$

Solution 10.3.

L'angle de dépression depuis le sommet est l'angle d'élévation depuis le bateau.

$$\tan 18^\circ = \frac{85}{d} \Rightarrow d = \frac{85}{\tan 18^\circ} \approx \frac{85}{0,3249} \approx 261,6 \text{ m.}$$

Solution 10.4.

En notant h la hauteur et $d = 40$ m la distance horizontale :

$$\tan(35^\circ) = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 40 \cdot \tan(35^\circ) \approx 28 \text{ m.}$$

Solution 10.5.

$$h = 130 \cdot \sin(42^\circ) \approx 87 \text{ m.}$$

Solution 10.6.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 50^\circ = 32 \sin 50^\circ \approx 32 \times 0,766 \approx 24,5 \text{ cm}^2.$$

Solution 10.7.

$$\text{a) } \tan^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha. \text{ Donc l'expression vaut } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 + \sin^2 \alpha.$$

$$\text{b) } \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha.$$

Solution 10.8.

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \implies \sin \beta = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad (\sin \beta > 0 \text{ car } \beta \text{ aigu}).$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{2}/3} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Solution 10.9.

- a) Les angles inscrits $\widehat{AQP}$ et $\widehat{ABP}$ interceptent le même arc $\widehat{AP}$, donc ils sont égaux : $\widehat{ABP} = 35^\circ$.
- b) $[AB]$ est un diamètre et P est sur le cercle, donc par le théorème de l'angle dans le demi-cercle : $\widehat{APB} = 90^\circ$. Le triangle APB est rectangle en P .
- c) Dans le triangle rectangle APB , $[AP]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABP} = 35^\circ$ et $[AB]$ est l'hypoténuse :

$$\sin(35^\circ) = \frac{AP}{AB} \implies AP = 5 \sin(35^\circ) \approx 2,87 \text{ cm}.$$

Solution 10.10.

- a) $a = b \tan \alpha = 14 \tan 27^\circ \approx 7,1$; $c = \frac{b}{\cos \alpha} \approx 15,7$; $\beta = 63^\circ$.
- b) $\alpha = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$; $a = c \cos \beta = 20 \cos 48^\circ \approx 13,4$; $b = c \sin \beta = 20 \sin 48^\circ \approx 14,9$.
- c) $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$; $\alpha = \arcsin \frac{8}{17} \approx 28,1^\circ$; $\beta \approx 61,9^\circ$.

Solution 10.11.

Comme $23^\circ + 67^\circ = 90^\circ$, ces deux angles sont complémentaires.

a) $\cos(67^\circ) = \sin(23^\circ) \approx 0,391$.

b) $\sin(67^\circ) = \cos(23^\circ) \approx 0,921$.

Solution 10.12.

Distance horizontale au bateau lointain : $d_1 = \frac{45}{\tan 20^\circ} \approx 123,6 \text{ m}$. Distance horizontale au bateau proche : $d_2 = \frac{45}{\tan 35^\circ} \approx 64,3 \text{ m}$. Distance entre les deux bateaux : $d_1 - d_2 \approx 59,4 \text{ m}$.

Solution 10.13.

$$h = 25 \tan(32^\circ) + 1,60 \approx 15,62 + 1,60 \approx 17,22 \text{ m}.$$

Solution 10.14.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 13 \cdot \sin 65^\circ \approx 53,0 \text{ cm}^2.$$

Solution 10.15.

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot b \cdot \sin 40^\circ \implies b = \frac{30}{5 \sin 40^\circ} \approx 9,33 \text{ cm.}$$

Solution 10.16.

On a $1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, et en divisant $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ par $\cos^2 \alpha$: $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. Donc :

$$(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) = \cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1.$$

Solution 10.17.

Un parallélogramme de côtés a , b et d'angle θ a pour aire $\mathcal{A} = ab \sin \theta$ (deux fois l'aire du triangle qu'il contient) :

$$\mathcal{A} = 6 \times 9 \times \sin 55^\circ \approx 44,2 \text{ cm}^2.$$

Solution 10.18.

- a) Les angles inscrits $\widehat{AQP}$ et $\widehat{ABP}$ interceptent le même arc $\widehat{AP}$, donc ils sont égaux : $\widehat{ABP} = 50^\circ$.
- b) $[AB]$ diamètre et P sur le cercle : $\widehat{APB} = 90^\circ$ (angle dans le demi-cercle). Dans le triangle rectangle APB :

$$\sin(50^\circ) = \frac{AP}{AB} \implies AB = \frac{9}{\sin 50^\circ} \approx 11,75 \text{ cm}, \quad R = \frac{AB}{2} \approx 5,87 \text{ cm.}$$