
Mathématiques

Collège de Genève

MA1 / MA2 — Deuxième année

Table des matières

1	Géométrie analytique	7
1.1	Rappels : distance et milieu	7
1.2	Équation d'une droite	8
1.3	Équation d'un cercle	9
1.4	Intersections et tangentes	10
1.5	Exercices	11
1.6	Résumé du chapitre	15
1.7	QCM — Géométrie analytique	17
1.8	Corrigés	20
2	La géométrie pour démontrer	25
2.1	Congruence des triangles	26
2.2	Similitude des triangles	26
2.3	Quadrilatères remarquables	26
2.4	Lieux géométriques	27
2.5	Droites remarquables du triangle	28
2.6	Constructions à la règle et au compas	29
2.7	Exercices	29
2.8	Résumé du chapitre	33
2.9	QCM — La géométrie pour démontrer	35
2.10	Corrigés	37
3	Fonctions polynomiales	43
3.1	Généralités	44
3.2	Division euclidienne	44
3.3	Théorème du diviseur	44
3.4	Factorisation et signe sur $\mathbb{R}$	46
3.5	Inéquations de degré supérieur à un	46
3.6	Valeur absolue	47
3.7	Exercices	48
3.8	Résumé du chapitre	51
3.9	QCM — Fonctions polynomiales	53
3.10	Corrigés	55

4 Fonctions rationnelles	59
4.1 Fractions rationnelles	59
4.2 Équations rationnelles	60
4.3 Définition et domaine des fonctions rationnelles	61
4.4 Asymptotes	61
4.5 Fonctions homographiques	62
4.6 Étude complète	62
4.7 Inéquations rationnelles	63
4.8 Exercices	64
4.9 Résumé du chapitre	67
4.10 QCM — Fonctions rationnelles	69
4.11 Corrigés	72
5 Fonctions exponentielles	77
5.1 La fonction exponentielle a^x	77
5.2 Équations exponentielles	78
5.3 Le nombre e	78
5.4 Modélisation	79
5.5 Intérêts composés	79
5.6 Exercices	80
5.7 Résumé du chapitre	83
5.8 QCM — Fonctions exponentielles	85
5.9 Corrigés	87
6 Fonctions composées et réciproques	91
6.1 Opérations sur les fonctions	91
6.2 Composition de fonctions	92
6.3 Décomposition de fonctions	92
6.4 Fonction réciproque	93
6.5 Construction de la réciproque	93
6.6 Exercices	94
6.7 Résumé du chapitre	97
6.8 QCM — Fonctions composées et réciproques	99
6.9 Corrigés	101
7 Fonctions logarithmiques	107
7.1 Définition	108
7.2 Propriétés algébriques	108
7.3 Graphe et propriétés	109
7.4 Équations et inéquations	109
7.5 Exercices	110
7.6 Résumé du chapitre	113
7.7 QCM — Fonctions logarithmiques	115
7.8 Corrigés	117
8 Trigonométrie dans le triangle quelconque	121
8.1 Extension du sinus et du cosinus	121
8.2 Loi des sinus	122
8.3 Loi des cosinus	123

8.4	Résolution de triangles	123
8.5	Aire d'un triangle	124
8.6	Exercices	124
8.7	Résumé du chapitre	127
8.8	QCM — Trigonométrie dans le triangle quelconque	129
8.9	Corrigés	131
9	Fonctions trigonométriques	135
9.1	Le cercle trigonométrique	136
9.2	Radian	136
9.3	Fonctions $\sin$, $\cos$, $\tan$	137
9.4	Transformations et graphes	137
9.5	Équations trigonométriques générales	138
9.6	Formules d'addition	138
9.7	Exercices	139
9.8	Résumé du chapitre	143
9.9	QCM — Fonctions trigonométriques	145
9.10	Corrigés	148

Chapitre 1

Géométrie analytique

Paris, 1637. René Descartes, alité par la fièvre, observe une mouche se déplacer au plafond. Il se demande comment décrire sa position avec précision. Deux nombres suffisent : la distance au mur du fond, la distance au mur latéral. L'idée semble triviale.

Elle va pourtant unifier pour toujours la géométrie et l'algèbre. Désormais, une courbe est une équation, et une équation est une courbe.

La droite, le cercle, la parabole — tous deviennent des objets qu'on peut calculer, pas seulement contempler.¹



1.1 Rappels : distance et milieu

Proposition 1.1 — distance entre deux points.

La distance entre $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ est :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Proposition 1.2 — milieu d'un segment.

Le milieu M de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

¹**Les faits** : *La Géométrie*, 1637, en annexe du *Discours de la méthode* — bien établi. L'anecdote de la mouche au plafond est en revanche une légende rapportée seulement après coup : aucune source du XVII^e siècle ne la mentionne. À traiter comme anecdote, pas comme fait attesté.

1.2 Équation d'une droite

Définition 1.3 — formes d'une droite.

- **Forme explicite (ou réduite)** : $y = ax + b$, où a est la **pente** et b l'**ordonnée à l'origine**
- **Forme générale (ou cartésienne)** : $ax + \beta y + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$
- **Forme normale** : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite

Proposition 1.4 — droites verticales, horizontales et obliques.

Soit d une droite d'équation générale $ax + \beta y + \gamma = 0$.

- Si $\beta = 0$ (et $\alpha \neq 0$) : d est **verticale**, d'équation $x = k$. Une droite verticale n'a pas de pente et **ne peut pas** s'écrire sous forme explicite $y = ax + b$.
- Si $\alpha = 0$ (et $\beta \neq 0$) : d est **horizontale**, d'équation $y = n$ (pente nulle).
- Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$: d est **oblique** et s'écrit de façon **unique** sous forme réduite $y = ax + b$, avec $a = -\frac{\alpha}{\beta}$ et $b = -\frac{\gamma}{\beta}$.

Proposition 1.5 — droites parallèles et perpendiculaires.

Soient d_1 et d_2 deux droites obliques de pentes m_1 et m_2 .

- $d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$
- $d_1 \perp d_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1$

(Une droite verticale et une droite horizontale sont toujours perpendiculaires entre elles.)

Exemple 1.1. Déterminer la droite d passant par $A(2, 5)$ et perpendiculaire à $d' : y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$.

Comme $d \perp d'$, sa pente m vérifie $m \cdot (-\frac{1}{3}) = -1$, donc $m = 3$. On a $d : y = 3x + b$; comme $A \in d : 5 = 3(2) + b \Rightarrow b = -1$. Donc $d : y = 3x - 1$.

Proposition 1.6 — distance d'un point à une droite.

La distance du point $P(x_0, y_0)$ à la droite $ax + \beta y + \gamma = 0$ est :

$$d = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Exemple 1.2. Distance du point $P(3, 1)$ à la droite $2x - y + 1 = 0$:

$$d = \frac{|2(3) - 1 + 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

1.3 Équation d'un cercle

Définition 1.7 — équation cartésienne d'un cercle.

Le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Développée : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$.

Proposition 1.8 — forme générale d'un cercle.

Toute équation de la forme $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ représente un cercle de centre $\Omega\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2}{4} - F}$, à condition que $\frac{D^2 + E^2}{4} - F > 0$. (On retrouve cette forme par complétion du carré à partir de la définition ci-dessus.)

Exemple 1.3. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. Centre : $(2, -3)$. Rayon : $r = \sqrt{4 + 9 + 3} = \sqrt{16} = 4$.

Proposition 1.9 — cercle de diamètre $[AB]$.

Le cercle de diamètre $[AB]$ a pour centre le milieu Ω de $[AB]$ et pour rayon $r = \frac{AB}{2}$.

Exemple 1.4. Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-1, 4)$ et $B(5, -2)$.

Centre : $\Omega = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (2, 1)$.

$AB = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$, donc $r = 3\sqrt{2}$ et $r^2 = 18$.

Équation : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$.

Proposition 1.10 — cercle passant par trois points.

On part de la forme générale $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ et on remplace successivement (x, y) par les coordonnées des trois points : on obtient un système de trois équations linéaires en D, E, F .

Exemple 1.5. Déterminer l'équation du cercle Γ passant par $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ et $D(0, 8)$.

En A : $0 + 0 + 0 + 0 + F = 0 \Rightarrow F = 0$.

En B : $36 + 6D + F = 0 \Rightarrow D = -6$.

En D : $64 + 8E + F = 0 \Rightarrow E = -8$.

Donc Γ : $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, de centre $(3, 4)$ et de rayon $r = \sqrt{9 + 16} = 5$.

1.4 Intersections et tangentes

Proposition 1.11 — droite et cercle.

Pour trouver les intersections d'une droite et d'un cercle, on substitue l'équation de la droite dans celle du cercle. On obtient une équation du second degré dont le discriminant Δ indique :

- $\Delta > 0$: deux points d'intersection (sécante)
- $\Delta = 0$: un point (tangente)
- $\Delta < 0$: aucun (extérieure)

Exemple 1.6. Intersection de $y = x + 1$ et $x^2 + y^2 = 5$: $x^2 + (x + 1)^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$. $\Delta = 9 > 0$: $x = 1$ ou $x = -2$. Points : $(1, 2)$ et $(-2, -1)$.

Proposition 1.12 — intersection de deux cercles.

Si $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$, on soustrait les deux équations : les termes x^2 et y^2 s'éliminent et on obtient l'équation d'une **droite** (dite *axe radical*), qui contient les points d'intersection éventuels. On résout ensuite le système formé de cette droite et de l'un des deux cercles.

Exemple 1.7. Intersections de $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 25$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$.
Soustraction : $(x^2 + y^2 - 25) - (x^2 + y^2 - 16x + 39) = 0 \Rightarrow 16x - 64 = 0 \Rightarrow x = 4$.
Dans Γ_1 : $16 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 3$.
Points d'intersection : $(4, 3)$ et $(4, -3)$.

Proposition 1.13 — tangentes à un cercle depuis un point extérieur.

Si P est extérieur au cercle Γ de centre Ω et de rayon r , il existe exactement deux droites tangentes à Γ passant par P . On les cherche sous la forme $y = m(x - x_P) + y_P$ (ou $x = x_P$ si une tangente est verticale) et on impose que la **distance de Ω à la droite vaille r** .

Exemple 1.8. Déterminer les tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 9$ issues de $P(5, 0)$.
Droite : $y = m(x - 5)$, soit $mx - y - 5m = 0$.
Distance de $\Omega(0, 0)$ à cette droite : $\frac{|-5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \iff 25m^2 = 9(m^2 + 1) \iff 16m^2 = 9 \iff m = \pm \frac{3}{4}$.
Tangentes : $y = \frac{3}{4}(x - 5)$ et $y = -\frac{3}{4}(x - 5)$.

MA2 — Approfondissement

Faisceaux de droites. L'ensemble de toutes les droites passant par un point $P(a, b)$ forme un **faisceau**. Si deux droites d_1 et d_2 sont d'équations $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$, toute droite du faisceau passant par leur intersection s'écrit :

$$\lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Ceci permet de trouver élégamment des droites satisfaisant des conditions supplémentaires, **sans calculer explicitement** le point d'intersection de d_1 et d_2 .

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Soit Γ un cercle de centre Ω et de rayon r , et P un point du plan. On définit la **puissance de P par rapport à Γ** :

$$\pi(P) = \Omega P^2 - r^2.$$

- Si $\pi(P) > 0$: P est extérieur à Γ ;
- si $\pi(P) = 0$: $P \in \Gamma$;
- si $\pi(P) < 0$: P est intérieur à Γ .

Si P est extérieur et PT une tangente à Γ en T , alors $PT^2 = \pi(P)$: cela permet d'obtenir la **longueur** d'une tangente sans résoudre de système.

1.5 Exercices

Exercice 1.1. Soient $A(1, 3)$, $B(5, 6)$, $C(-2, 1)$.

- a) Calculer AB , AC , BC .
- b) Trouver le milieu de $[AB]$.
- c) Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 1.2. Trouver l'équation de la droite :

- a) passant par $A(2, 5)$ et $B(-1, 2)$
- b) perpendiculaire à $3x - y + 2 = 0$ passant par $P(1, 4)$
- c) équidistante de $A(0, 0)$ et $B(4, 2)$ (médiatrice de $[AB]$)

Exercice 1.3. On donne les droites :

$$d_1 : y = 2x - 3, \quad d_2 : 4x - 2y + 5 = 0, \quad d_3 : y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad d_4 : x + 2y - 4 = 0.$$

- a) Donner la pente de chaque droite.
- b) Regrouper les droites par paires parallèles.
- c) Montrer que d_1 et d_3 sont perpendiculaires.

Exercice 1.4. Trouver le centre et le rayon :

- a) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$
 b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

Exercice 1.5. Soient $A(-1, 4)$ et $B(5, -2)$.

- a) Établir l'équation de la droite (AB) .
 b) Établir l'équation du cercle Γ dont $[AB]$ est un diamètre.
 c) Établir l'équation de la tangente à Γ au point A .

Exercice 1.6. Déterminer l'équation du cercle Γ passant par $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ et $D(0, 8)$, ainsi que son centre et son rayon.

Exercice 1.7. Trouver les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite $y = 2x$.

Exercice 1.8. Déterminer algébriquement les points d'intersection des cercles $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 25$ et $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$.

Exercice 1.9. Montrer que la droite $y = 2x - 5$ est tangente au cercle $x^2 + y^2 = 5$ et trouver le point de tangence.

Exercice 1.10. Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 9$ issues du point $P(5, 0)$.

Exercice 1.11. Soient $d_1 : x + y - 3 = 0$ et $d_2 : 2x - y = 0$. À l'aide de la méthode des faisceaux, déterminer l'équation de la droite passant par le point d'intersection de d_1 et d_2 et par $P(4, 1)$, sans calculer explicitement ce point d'intersection.

Exercice 1.12. Soit le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 = 9$ et le point $P(5, 0)$.

- a) Calculer la puissance $\pi(P)$ de P par rapport à Γ .
 b) En déduire la longueur d'une tangente issue de P , sans résoudre de système.
 c) Comparer avec les tangentes trouvées à l'exercice 1.10.

Exercice 1.13. Soient $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(6, 5)$ et $D(2, 4)$. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme en utilisant les milieux des diagonales.

Exercice 1.14. Soient $A(1, 2)$, $B(3, 6)$ et $C(-1, -2)$.

- a) Montrer que A, B et C sont alignés.
- b) Déterminer k tel que $D(4, k)$ soit également sur cette droite.

Exercice 1.15. Soit la droite $d : 5x - 2y + 3 = 0$.

- a) Déterminer l'équation de la droite parallèle à d passant par $P(2, -1)$.
- b) Déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à d passant par $Q(-3, 4)$.

Exercice 1.16. Déterminer l'équation du cercle :

- a) de centre $C(4, -3)$ et tangent à l'axe Ox ;
- b) de centre $C(-2, 5)$ et tangent à l'axe Oy .

Exercice 1.17. Si cela est possible, déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation :

- a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

Exercice 1.18. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite $y = mx + 13$ est tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25$.

Exercice 1.19. Déterminer algébriquement les points d'intersection des cercles $\Gamma_1 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ et $\Gamma_2 : (x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Exercice 1.20. Un bateau navigue le long de la droite d'équation $3x - 4y + 20 = 0$ (coordonnées en km). Une bouée se trouve au point $B(5, 2)$. Calculer la distance la plus courte entre la bouée et la trajectoire du bateau.

Exercice 1.21. Soit le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 = 16$. Pour chacun des points $P_1(6, 0)$, $P_2(3, 0)$ et $P_3(4, 3)$:

- a) calculer sa puissance par rapport à Γ ;
- b) préciser s'il est intérieur, extérieur ou sur Γ ;
- c) si le point est extérieur, calculer la longueur d'une tangente issue de ce point.

Exercice 1.22. Soient $d_1 : x - y + 1 = 0$ et $d_2 : x + y - 5 = 0$. À l'aide de la méthode des faisceaux, déterminer l'équation de la droite passant par l'intersection de d_1 et d_2 et parallèle à la droite $3x + y = 0$.

1.6 Résumé du chapitre

Distance et milieu

- $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Milieu : $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

Droites

- Explicite : $y = ax + b$ Générale : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$
- Verticale : $x = k$ (pas de pente) Horizontale : $y = n$
- Parallèles : $m_1 = m_2$ Perpendiculaires : $m_1 \cdot m_2 = -1$
- Distance de $P(x_0, y_0)$ à $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$: $d = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

Cercles

- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — centre $\Omega(a, b)$, rayon r
- Forme générale : $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
- Diamètre $[AB]$: centre = milieu de $[AB]$, rayon = $\frac{AB}{2}$
- Passant par 3 points : substituer dans la forme générale $\rightarrow$ système en D, E, F
- Tangent à Ox : $r = |y_\Omega|$; tangent à Oy : $r = |x_\Omega|$
- Si $\frac{D^2 + E^2}{4} - F < 0$: ce n'est **pas** un cercle

Intersections et tangentes

- Droite/cercle : substituer, analyser Δ
- Cercle/cercle : soustraire les équations $\rightarrow$ axe radical (droite)
- Tangentes depuis un point extérieur : imposer distance(Ω, d) = r

MA2

- Faisceau de droites : $\lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) = 0$
 - Puissance d'un point : $\pi(P) = \Omega P^2 - r^2$; tangente : $PT^2 = \pi(P)$
-

1.7 QCM — Géométrie analytique

Une seule réponse correcte par question.

1. La distance entre $A(1, 2)$ et $B(4, 6)$ est :
 - a) 5
 - b) 7
 - c) $\sqrt{7}$
 - d) 25

2. Le milieu de $[AB]$ avec $A(-2, 4)$ et $B(6, 0)$ est :
 - a) $(4, 2)$
 - b) $(2, 2)$
 - c) $(2, 4)$
 - d) $(4, 4)$

3. Le centre du cercle $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ est :
 - a) $(-2, 1)$
 - b) $(4, -2)$
 - c) $(2, -1)$
 - d) $(-4, 2)$

4. La droite $y = x + 3$ est par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 4$:
 - a) Sécante
 - b) Tangente
 - c) Extérieure
 - d) Confondue

5. La distance du point $P(1, 1)$ à la droite $3x + 4y - 5 = 0$ est :
 - a) $\frac{2}{5}$
 - b) $\frac{2}{5}$
 - c) $\frac{6}{5}$
 - d) $\frac{1}{5}$

6. Quelle équation représente un cercle de rayon 3 centré en $(1, -2)$?
 - a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$
 - b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
 - c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
 - d) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

7. La médiatrice de $[AB]$ avec $A(0, 0)$ et $B(2, 0)$ a pour équation :

- a) $y = 1$
- b) $x = 0$
- c) $x = 1$
- d) $y = x$

8. Combien de points d'intersection ont $y = x$ et $x^2 + y^2 = 1$?

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3

9. Les droites $y = 3x - 1$ et $y = 3x + 7$ sont :

- a) Parallèles
- b) Confondues
- c) Perpendiculaires
- d) Sécantes non perpendiculaires

10. Deux droites de pentes 2 et $-\frac{1}{2}$ sont :

- a) Parallèles
- b) Perpendiculaires
- c) Confondues
- d) Aucune de ces réponses

11. Le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(0, 0)$ et $B(6, 8)$ a pour rayon :

- a) 10
- b) 5
- c) 14
- d) 7

12. Les cercles $x^2 + y^2 = 25$ et $x^2 + y^2 - 16x + 39 = 0$ s'intersectent en :

- a) un seul point
- b) deux points
- c) aucun point
- d) une infinité de points

13. La puissance du point $P(5, 0)$ par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 9$ vaut :

- a) 16
- b) 4
- c) -16
- d) 34

14. Les points $A(1, 2)$, $B(3, 6)$ et $C(-1, -2)$ sont alignés car leurs pentes sont toutes égales à :

- a) 1
- b) 2
- c) -2
- d) 0

15. Le cercle de centre $(4, -3)$ tangent à l'axe Ox a pour rayon :

- a) 4
- b) 3
- c) 5
- d) 7

16. L'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$ représente :

- a) un cercle de rayon $\sqrt{5}$
- b) un cercle de rayon 5
- c) l'ensemble vide
- d) un point

17. La droite $y = mx + 13$ est tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25$ pour :

- a) $m = \pm \frac{5}{12}$
- b) $m = \pm \frac{12}{5}$
- c) $m = \pm 5$
- d) $m = \frac{13}{5}$

18. Les cercles $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ et $(x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 25$ s'intersectent en :

- a) $(5, 4)$ et $(5, -2)$
- b) $(4, 5)$ et $(-2, 5)$
- c) $(1, 4)$ et $(9, -2)$
- d) aucun point

19. La distance de la bouée $B(5, 2)$ à la droite $3x - 4y + 20 = 0$ vaut :

- a) $\frac{27}{5}$
- b) 4
- c) 3
- d) 5

20. Pour le cercle $x^2 + y^2 = 16$, le point $P(3, 0)$ est :

- a) extérieur
- b) intérieur
- c) sur le cercle
- d) indéterminable

Réponses : 1-a 2-b 3-c 4-c 5-a 6-b 7-c 8-c 9-a 10-b 11-b 12-b 13-a
14-b 15-b 16-c 17-b 18-a 19-a 20-b

1.8 Corrigés

Solution 1.1.

a) $AB = \sqrt{16 + 9} = 5$; $AC = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$; $BC = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$.

b) $M = (3, 4, 5)$.

c) $AB^2 + AC^2 = 25 + 13 = 38 \neq 74 = BC^2$. Non rectangle.

Solution 1.2.

a) $a = \frac{5-2}{2-(-1)} = 1$; $y = x + 3$.

b) La droite $3x - y + 2 = 0$ a pente 3; perpendiculaire : pente $-\frac{1}{3}$. $4 = -\frac{1}{3} + b \Rightarrow b = \frac{13}{3}$; $y = -\frac{x}{3} + \frac{13}{3}$.

c) Milieu : $(2, 1)$; direction $[AB]$: pente $\frac{1}{2}$; médiatrice : pente -2 ; $y - 1 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 5$.

Solution 1.3.

a) d_1 : pente 2; d_2 : $y = 2x + \frac{5}{2}$, pente 2; d_3 : pente $-\frac{1}{2}$; d_4 : $y = -\frac{1}{2}x + 2$, pente $-\frac{1}{2}$.

b) $d_1 \parallel d_2$ (pente 2); $d_3 \parallel d_4$ (pente $-\frac{1}{2}$).

c) $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$, donc $d_1 \perp d_3$. ✓

Solution 1.4.

a) Centre $(3, -1)$, rayon 4.

b) Centre $(3, -2)$; $r = \sqrt{9 + 4 - 4} = 3$.

Solution 1.5.

a) Pente : $\frac{-2-4}{5-(-1)} = -1$; $(AB) : y = -x + 3$.

b) Centre $\Omega = (2, 1)$; $AB = 6\sqrt{2}$, $r^2 = 18$; $\Gamma : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 18$.

c) Pente de $[\Omega A] : \frac{4-1}{-1-2} = -1$; la tangente en A est perpendiculaire : pente 1.
 $y - 4 = 1 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = x + 5$.

Solution 1.6.

En A : $F = 0$. En B : $36 + 6D = 0 \Rightarrow D = -6$. En D : $64 + 8E = 0 \Rightarrow E = -8$.

$\Gamma : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$; centre $(3, 4)$, rayon $\sqrt{9 + 16} = 5$.

Solution 1.7.

$x^2 + 4x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$. Points : $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ et $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

Solution 1.8.

Soustraction : $16x - 64 = 0 \Rightarrow x = 4$. Dans Γ_1 : $16 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 3$. Points : $(4, 3)$ et $(4, -3)$.

Solution 1.9.

Distance du centre $(0, 0)$ à $2x - y - 5 = 0$: $d = \frac{|0-0-5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = r$. Tangente.

✓ Point de tangence : substituer $y = 2x - 5$: $x^2 + (2x - 5)^2 = 5 \Rightarrow 5x^2 - 20x + 20 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0$; $x = 2, y = -1$. Point : $(2, -1)$.

Solution 1.10.

Droite $y = m(x - 5)$, soit $mx - y - 5m = 0$; distance de $(0, 0)$ à cette droite égale à 3 : $\frac{|-5m|}{\sqrt{m^2+1}} = 3 \Rightarrow 25m^2 = 9(m^2 + 1) \Rightarrow 16m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm\frac{3}{4}$.

Tangentes : $y = \frac{3}{4}(x - 5)$ et $y = -\frac{3}{4}(x - 5)$.

Solution 1.11.

On cherche $\lambda(x + y - 3) + \mu(2x - y) = 0$ passant par $P(4, 1)$:

$$\lambda(4 + 1 - 3) + \mu(2 \cdot 4 - 1) = 0 \iff 2\lambda + 7\mu = 0 \iff \lambda = -\frac{7}{2}\mu.$$

En prenant $\mu = 2, \lambda = -7$: $-7(x + y - 3) + 2(2x - y) = 0 \iff -3x - 9y + 21 = 0 \iff x + 3y - 7 = 0$.

Vérification : le point d'intersection de d_1, d_2 est $(1, 2)$, et $1 + 3 \cdot 2 - 7 = 0$; de plus $4 + 3 \cdot 1 - 7 = 0$. ✓

Solution 1.12.

a) $\Omega = (0, 0), r = 3; \pi(P) = \Omega P^2 - r^2 = 25 - 9 = 16$.

b) $PT^2 = \pi(P) = 16 \Rightarrow PT = 4$.

c) Les tangentes $y = \pm\frac{3}{4}(x - 5)$ touchent le cercle en des points situés à distance 4 de P — on retrouve bien le même résultat par une méthode différente, beaucoup plus rapide.

Solution 1.13.

Milieu de $[AC]$: $\left(\frac{1+6}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

Milieu de $[BD]$: $\left(\frac{5+2}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme. ✓

Solution 1.14.

a) Pente de (AB) : $\frac{6-2}{3-1} = 2$; pente de (AC) : $\frac{-2-2}{-1-1} = 2$. Les pentes sont égales (et les droites partagent le point A), donc A, B, C sont alignés.

b) La droite est $y = 2x$ (elle passe par l'origine, car $A(1, 2)$ vérifie $2 = 2 \cdot 1$). Pour $D(4, k)$: $k = 2 \cdot 4 = 8$.

Solution 1.15.

La pente de d est $\frac{5}{2}$ (car $d : y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$).

- a) Parallèle, même pente $\frac{5}{2} : y = \frac{5}{2}x - 6$.
- b) Perpendiculaire, pente $-\frac{2}{5} : y = -\frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$.

Solution 1.16.

- a) Tangent à $Ox : r = |-3| = 3 ; (x-4)^2 + (y+3)^2 = 9$.
- b) Tangent à $Oy : r = |-2| = 2 ; (x+2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

Solution 1.17.

- a) $D = -2, E = 4, F = 10 : \frac{D^2+E^2}{4} - F = \frac{4+16}{4} - 10 = -5 < 0$. Ce n'est **pas** un cercle (ensemble vide).
- b) $D = 6, E = -2, F = -6 : \frac{36+4}{4} + 6 = 16 > 0$; centre $(-3, 1)$, rayon $r = \sqrt{16} = 4$.

Solution 1.18.

Droite : $mx - y + 13 = 0$. Distance de $(0, 0)$ à cette droite égale à 5 :

$$\frac{|13|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5 \iff 169 = 25(m^2 + 1) \iff m^2 = \frac{144}{25} \iff m = \pm \frac{12}{5}.$$

Solution 1.19.

Sous forme générale : $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0 ; \Gamma_2 : x^2 + y^2 - 18x - 2y + 57 = 0$.

Soustraction : $16x - 80 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Dans $\Gamma_1 : (5-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow (y-1)^2 = 9 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -2$.

Points : $(5, 4)$ et $(5, -2)$.

Solution 1.20.

$$d = \frac{|3(5) - 4(2) + 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15 - 8 + 20|}{5} = \frac{27}{5} = 5,4 \text{ km.}$$

Solution 1.21.

$\Omega = (0, 0), r = 4$.

- a) $\pi(P_1) = 36 - 16 = 20 ; \pi(P_2) = 9 - 16 = -7 ; \pi(P_3) = 16 + 9 - 16 = 9$.
- b) P_1 extérieur ($\pi > 0$) ; P_2 intérieur ($\pi < 0$) ; P_3 extérieur ($\pi > 0$).
- c) Pour $P_1 : PT = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Pour $P_3 : PT = \sqrt{9} = 3$.

Solution 1.22.

On cherche $\lambda(x-y+1)+\mu(x+y-5)=0$, soit $(\lambda+\mu)x+(\mu-\lambda)y+(\lambda-5\mu)=0$,
de pente $-\frac{\lambda+\mu}{\mu-\lambda}$.

On veut cette pente égale à celle de $3x+y=0$, soit -3 :

$$-\frac{\lambda+\mu}{\mu-\lambda} = -3 \iff \lambda+\mu = 3\mu-3\lambda \iff 4\lambda = 2\mu \iff \mu = 2\lambda.$$

En prenant $\lambda=1, \mu=2$: $(x-y+1)+2(x+y-5)=0 \iff 3x+y-9=0$.

Vérification : l'intersection de d_1, d_2 est $(2, 3)$, et $3(2)+3-9=0$; de plus $3x+y-9=0$ a bien la pente -3 . ✓

Chapitre 2

La géométrie pour démontrer

Les Éléments d'Euclide commencent par cinq postulats. Le cinquième — dit « postulat des parallèles » — a tourmenté les mathématiciens pendant deux mille ans. Il semblait moins évident que les quatre autres. Des générations ont tenté de le démontrer à partir des quatre premiers, en vain.

Au XIX^e siècle, on découvrit qu'on pouvait le nier et obtenir une géométrie cohérente : la géométrie hyperbolique.

La leçon : en géométrie, ce qu'on démontre dépend de ce qu'on admet. Rien n'est gratuit.

Mais dans notre cadre euclidien, les outils sont puissants et les démonstrations, élégantes.¹



¹**Les faits** : bien établi. La géométrie hyperbolique (indépendance du 5^e postulat) a été développée indépendamment par Nikolai Lobachevski (publié 1829) et János Bolyai (publié 1832); Carl Friedrich Gauss l'avait étudiée plus tôt sans jamais publier.

2.1 Congruence des triangles

Définition 2.1 — *triangles congruents.*

Deux triangles sont **congruents** s'ils ont les mêmes angles et les mêmes côtés (ils sont superposables). On note $ABC \equiv DEF$.

Proposition 2.2 — *critères de congruence.*

Deux triangles sont congruents si :

- **CCC** : trois côtés égaux deux à deux
- **CAC** : deux côtés et l'angle inclus égaux
- **ACA** : deux angles et le côté inclus égaux
- **ACC** : angle droit, hypoténuse et un côté égaux

Remarque 2.1. Deux situations **ne suffisent pas** à conclure à la congruence, même si elles semblent proches des critères ci-dessus :

- **AAA** : trois angles égaux ne donnent que des triangles **semblables** (voir section suivante), pas nécessairement congruents;
- **CAC** avec un côté **non adjacent** à l'angle donné (parfois noté « CCA ») ne garantit **pas** la congruence en général.

2.2 Similitude des triangles

Proposition 2.3 — *critères de similitude.*

Deux triangles sont semblables si :

- **AA** : deux angles égaux
- **SAS** : deux côtés proportionnels et angle inclus égal
- **SSS** : trois côtés proportionnels

Remarque 2.2. Congruence $\Rightarrow$ similitude (rapport $k = 1$), mais pas l'inverse.

2.3 Quadrilatères remarquables

Définition 2.4 — *quadrilatères.*

- **Parallélogramme** : côtés opposés parallèles deux à deux
- **Rectangle** : parallélogramme avec un angle droit
- **Losange** : parallélogramme avec quatre côtés égaux
- **Carré** : rectangle et losange
- **Trapeze** : une seule paire de côtés parallèles

Proposition 2.5 — propriétés du parallélogramme.

Dans un parallélogramme $ABCD$:

- Les côtés opposés sont égaux : $AB = CD$, $BC = DA$
- Les diagonales se coupent en leur milieu
- Les angles opposés sont égaux

Exemple 2.1. Démontrer que dans un parallélogramme $ABCD$, $AB = CD$.

La diagonale $[AC]$ partage $ABCD$ en deux triangles ABC et ACD . Comme $(AB) \parallel (DC)$, les angles alternes-internes $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont égaux; de même, $(BC) \parallel (AD)$ donne $\widehat{BCA} = \widehat{DAC}$. Le côté $[AC]$ est commun aux deux triangles. Par le critère **ACA**, $ABC \equiv CDA$, donc $AB = CD$ (et $BC = DA$).

Proposition 2.6 — propriétés du rectangle.

Dans un rectangle, les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu. Réciproque : si les diagonales d'un parallélogramme sont égales, c'est un rectangle.

Proposition 2.7 — propriétés du losange.

Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Réciproque : si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, c'est un losange.

2.4 Lieux géométriques

Définition 2.8 — lieu géométrique.

Un **lieu géométrique** est l'ensemble de tous les points satisfaisant une propriété donnée.

Proposition 2.9 — lieux classiques.

- Points équidistants de deux points A et B : **médiatrice** de $[AB]$
- Points équidistants de deux droites : **bissectrice** de l'angle formé
- Points à distance r d'un point O : **cercle** de centre O et rayon r
- Points voyant $[AB]$ sous angle droit : **cercle** de diamètre $[AB]$

2.5 Droites remarquables du triangle

Définition 2.10 — bissectrice, médiane, médiatrice, hauteur.

Dans un triangle ABC :

- une **bissectrice** partage un angle du triangle en deux angles égaux ;
- une **médiane** relie un sommet au milieu du côté opposé ;
- une **médiatrice** d'un côté est la perpendiculaire à ce côté passant par son milieu ;
- une **hauteur** passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé.

Proposition 2.11 — concours des bissectrices.

Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes : leur point de concours est le centre du **cercle inscrit** (tangent aux trois côtés).

Proposition 2.12 — concours des médianes.

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé **centre de gravité**, noté G . Ce point partage chaque médiane dans le rapport $2 : 1$ à partir du sommet : si M est le milieu de $[BC]$, alors $AG = \frac{2}{3}AM$.

Proposition 2.13 — concours des médiatrices.

Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes : leur point de concours est le centre du **cercle circonscrit** (passant par les trois sommets).

Proposition 2.14 — concours des hauteurs.

Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé **orthocentre**.

Exemple 2.2. Soit ABC rectangle en A , avec $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(0,8)$. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit.

Comme l'angle en A est droit, $[BC]$ est vu sous un angle droit depuis A : par la propriété des lieux géométriques, A appartient au cercle de diamètre $[BC]$. Le centre du cercle circonscrit est donc le milieu de l'hypoténuse : $\Omega = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right) = (3,4)$, et le rayon est $r = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{36+64}}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

MA2 — Approfondissement

Droite d'Euler. Dans un triangle non équilatéral, l'orthocentre H , le centre de gravité G et le centre du cercle circonscrit Ω sont **alignés**, et G divise $[\Omega H]$ dans le rapport $\Omega G : GH = 1 : 2$. Cette droite s'appelle la **droite**

d'Euler du triangle.

Leonhard Euler (1707–1783), mathématicien suisse né à Bâle, a passé l'essentiel de sa carrière à Saint-Petersbourg et à Berlin. Auteur prolifique touchant à presque tous les domaines des mathématiques et de la physique de son temps, il a notamment normalisé une grande partie des notations encore utilisées aujourd'hui (dont la notion moderne de fonction).

2.6 Constructions à la règle et au compas

Les constructions classiques utilisent uniquement :

- La règle non graduée (tracer des droites)
- Le compas (tracer des cercles, reporter des longueurs)

Proposition 2.15 — *constructions fondamentales.*

- Médiatrice d'un segment
- Bissectrice d'un angle
- Perpendiculaire à une droite par un point
- Parallèle à une droite par un point
- Division d'un segment en n parties égales

Problèmes de construction impossibles. Trois problèmes ont occupé les Grecs pendant des siècles :

- **Quadrature du cercle** : construire un carré d'aire égale à un cercle donné
- **Duplication du cube** : construire un cube de volume double d'un cube donné
- **Trisection de l'angle** : diviser un angle quelconque en trois parties égales

Ces trois constructions sont **impossibles** à la règle et au compas seuls — fait démontré au XIX^e siècle grâce à la théorie de Galois.

2.7 Exercices

Exercice 2.1. Dans chaque cas, déterminer si les triangles sont congruents et citer le critère utilisé :

- a) ABC et DEF avec $AB = DE = 5$, $BC = EF = 7$, $AC = DF = 9$

- b) GHI et JKL avec $\hat{G} = \hat{J} = 50^\circ$, $GH = JK = 6$, $\hat{H} = \hat{K} = 70^\circ$
- c) MNP et QRS rectangles en N et R , $MN = QR = 3$, hypoténuses $MP = QS = 5$

Exercice 2.2. Soit $ABCD$ un parallélogramme avec $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(5, 3)$.

- a) Trouver les coordonnées de D .
- b) Vérifier que les diagonales se coupent en leur milieu.
- c) Est-ce un rectangle ? un losange ?

Exercice 2.3. Décrire et construire le lieu géométrique des points M du plan équidistants de $A(1, 0)$ et $B(5, 0)$. Trouver son équation.

Exercice 2.4. Démontrer que les diagonales d'un rectangle sont égales.

Exercice 2.5. Dans le triangle ABC , $\hat{A} = 50^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$. Un triangle DEF a $\hat{D} = 50^\circ$ et $\hat{F} = 60^\circ$. Les triangles sont-ils semblables ?

Exercice 2.6. Donner un exemple de deux triangles semblables mais **non congruents**, pour illustrer que le critère AAA ne garantit pas la congruence.

Exercice 2.7. Soit ABC avec $A(1, 2)$, $B(7, 4)$, $C(4, 10)$.

- a) Calculer les coordonnées du centre de gravité G .
- b) Calculer le milieu M de $[BC]$, puis vérifier que $AG = \frac{2}{3}AM$.

Exercice 2.8. Soit ABC rectangle en A , avec $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 8)$. Déterminer le centre Ω et le rayon r du cercle circonscrit, puis l'aire du disque.

Exercice 2.9. Soit ABC avec $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(1, 3)$.

- a) Établir l'équation de la hauteur issue de A (perpendiculaire à (BC) passant par A).
- b) Établir l'équation de la hauteur issue de B .
- c) En déduire les coordonnées de l'orthocentre.

Exercice 2.10. Soit un angle de sommet A formé par deux demi-droites, b sa bissectrice, et P un point quelconque de b . Soient H_1 et H_2 les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur chacune des deux demi-droites. Démontrer que $PH_1 = PH_2$.

Exercice 2.11. Démontrer, en toute généralité (avec des coordonnées quelconques A, B, C), que le centre de gravité G vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ où M est le milieu de $[BC]$.

Exercice 2.12. Soit ABC avec $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(2, 4)$.

- Calculer le centre de gravité G .
- Calculer le centre du cercle circonscrit Ω (intersection des médianes).
- Calculer l'orthocentre H (intersection des hauteurs).
- Vérifier que Ω, G, H sont alignés et que $\Omega G : GH = 1 : 2$.

Exercice 2.13. On donne $AB = 8$, $\hat{A} = 30^\circ$ et $BC = 5$ (l'angle donné n'est pas inclus entre les deux côtés donnés : c'est le cas «CAC non adjacent», parfois noté SSA).

- En posant $C = t(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)$ avec A à l'origine et $B = (8, 0)$, écrire l'équation $BC = 5$ sous forme d'une équation du second degré en t .
- Résoudre cette équation et en déduire qu'il existe **deux** triangles ABC non congruents satisfaisant les données de l'énoncé.

Exercice 2.14. Démontrer que si les diagonales d'un parallélogramme $ABCD$ sont égales, alors $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 2.15. Démontrer que si les diagonales d'un parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires, alors $ABCD$ est un losange.

Exercice 2.16. Un triangle a pour côtés 5, 12 et 13.

- Vérifier qu'il s'agit d'un triangle rectangle.
- Calculer son aire.
- En déduire le rayon r du cercle inscrit ($r = \frac{\text{aire}}{\text{demi-périmètre}}$).

Exercice 2.17. Un triangle équilatéral a pour côté $a = 6$. Calculer le rayon r de son cercle inscrit.

Exercice 2.18. Décrire, étape par étape, la construction à la règle et au compas de la bissectrice d'un angle $\widehat{XAY}$, en justifiant pourquoi la droite obtenue est bien la bissectrice.

Exercice 2.19. Dans le triangle ABC , $AB = 4$, $AC = 6$, $\hat{A} = 50^\circ$. Dans le triangle DEF , $DE = 6$, $DF = 9$, $\hat{D} = 50^\circ$. Les triangles sont-ils semblables? Justifier.

Exercice 2.20. Dans un triangle ABC , l'angle extérieur en A (formé par le prolongement de $[BA]$ au-delà de A et le côté $[AC]$) vaut 130° , et l'angle en B vaut 40° . Déterminer l'angle en C en justifiant précisément chaque étape.

Exercice 2.21. Soit ABC équilatéral avec $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(2, 2\sqrt{3})$. Calculer le centre de gravité G , le centre du cercle circonscrit Ω et l'orthocentre H , et vérifier qu'ils sont confondus — illustrant pourquoi la droite d'Euler n'est pas définie pour un triangle équilatéral.

2.8 Résumé du chapitre

Congruence (triangles superposables)

- CCC, CAC, ACA, ACC (rectangle)
- AAA et CAC-non-adjacent ne suffisent **pas**

Similitude (triangles proportionnels)

- AA, SAS, SSS
- Rapport k : côtés $\times k$, aires $\times k^2$

Quadrilatères

- Parallélogramme : diagonales se coupent en leur milieu
- Rectangle : diagonales égales
- Losange : diagonales perpendiculaires
- Carré : les deux à la fois

Lieux géométriques classiques

- Équidistant de A et $B \rightarrow$ médiatrice de $[AB]$
- Angle droit sur $[AB] \rightarrow$ cercle de diamètre $[AB]$

Droites remarquables du triangle

- Bissectrices $\rightarrow$ centre du cercle **inscrit**
- Médiannes $\rightarrow$ centre de gravité G ($AG = \frac{2}{3}AM$)
- Médiatrices $\rightarrow$ centre du cercle **circonscrit**
- Hauteurs $\rightarrow$ orthocentre

MA2

- Droite d'Euler : Ω, G, H alignés, $\Omega G : GH = 1 : 2$ (confondus si le triangle est équilatéral)
 - Constructions impossibles : quadrature du cercle, duplication du cube, trisection de l'angle
-

2.9 QCM — La géométrie pour démontrer

Une seule réponse correcte par question.

1. Deux triangles ont trois côtés égaux deux à deux. Ils sont :
 - a) Semblables seulement
 - b) Congruents (critère CCC)
 - c) Ni congruents ni semblables
 - d) Semblables mais pas forcément congruents
2. Critère de similitude AA signifie :
 - a) Deux côtés et un angle égaux
 - b) Deux angles égaux suffisent
 - c) Trois angles égaux nécessaires
 - d) Deux côtés adjacents égaux
3. Dans un parallélogramme, les diagonales :
 - a) Sont perpendiculaires
 - b) Sont égales
 - c) Se coupent en leur milieu
 - d) Forment un angle de 90°
4. Un losange est un parallélogramme dont :
 - a) Les angles sont droits
 - b) Les diagonales sont égales
 - c) Les quatre côtés sont égaux
 - d) Les diagonales se coupent en leur milieu
5. Le lieu des points équidistants de A et B est :
 - a) La droite AB
 - b) Le cercle de diamètre $[AB]$
 - c) La médiatrice de $[AB]$
 - d) La bissectrice de $\widehat{AOB}$
6. Si les diagonales d'un parallélogramme sont égales, c'est :
 - a) Un losange
 - b) Un carré
 - c) Un rectangle
 - d) Un trapèze
7. Deux triangles ont des angles 40° , 60° , 80° et des côtés dans le rapport 2. Ils sont :

- a) Congruents
- b) Semblables mais non congruents
- c) Ni l'un ni l'autre
- d) Congruents et semblables

8. La trisection d'un angle à la règle et au compas :

- a) Est toujours possible
- b) Est possible seulement pour 90°
- c) Est impossible en général
- d) Est possible avec un rapporteur

9. Le point de concours des trois médianes d'un triangle est :

- a) l'orthocentre
- b) le centre de gravité
- c) le centre du cercle circonscrit
- d) le centre du cercle inscrit

10. Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est :

- a) l'orthocentre
- b) le sommet de l'angle droit
- c) le milieu de l'hypoténuse
- d) le centre de gravité

11. Sur la droite d'Euler, le rapport $\Omega G : GH$ vaut :

- a) 1 : 1
- b) 1 : 2
- c) 2 : 1
- d) 1 : 3

12. Deux triangles de côtés (3, 4, 5) et (6, 8, 10) sont :

- a) Congruents
- b) Semblables mais non congruents
- c) Ni l'un ni l'autre
- d) Congruents et semblables

13. Le critère «CAC non adjacent» (angle non inclus entre les deux côtés donnés) :

- a) garantit toujours la congruence
- b) peut correspondre à deux triangles non congruents
- c) n'existe pas en géométrie euclidienne
- d) est un synonyme du critère ACA

14. Si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, c'est :

- a) un rectangle
- b) un losange
- c) un trapèze
- d) impossible à déterminer

15. Un triangle de côtés 5, 12, 13 a pour rayon de cercle inscrit :

- a) 1
- b) 2
- c) 2,5
- d) 6

16. Un triangle équilatéral de côté 6 a pour rayon de cercle inscrit :

- a) $\sqrt{3}$
- b) $2\sqrt{3}$
- c) 3
- d) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

17. Pour un triangle équilatéral, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont :

- a) alignés mais distincts
- b) confondus
- c) jamais définis
- d) alignés uniquement si rectangle

Réponses : 1-b 2-b 3-c 4-c 5-c 6-c 7-b 8-c 9-b 10-c 11-b 12-b 13-b
14-b 15-b 16-a 17-b

2.10 Corrigés

Solution 2.1.

- a) Congruents par CCC.
- b) Congruents par ACA (troisième angle : $180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$).
- c) Congruents par ACC.

Solution 2.2.

- a) $D = C - B + A = (1, 3)$.
- b) Milieu de $[AC]$: $(2,5, 1,5)$. Milieu de $[BD]$: $(\frac{4+1}{2}, \frac{3}{2}) = (2,5, 1,5)$. ✓
- c) $AB = 4$, $BC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$: pas losange. $\vec{AB} = (4, 0)$, $\vec{BC} = (1, 3)$: produit scalaire = $4 \neq 0$: pas rectangle.

Solution 2.3.

Médiatrice de $[AB]$: droite verticale passant par le milieu $(3, 0)$, perpendiculaire à l'axe des x . Équation : $x = 3$.

Vérification : $MA^2 = (x - 1)^2 + y^2$, $MB^2 = (x - 5)^2 + y^2$. $MA = MB \Rightarrow (x - 1)^2 = (x - 5)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow x = 3$. ✓

Solution 2.4.

Soit $ABCD$ un rectangle avec $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, b)$, $D(0, b)$. $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$. $BD = \sqrt{(a - 0)^2 + (0 - b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Donc $AC = BD$. □

Solution 2.5.

$\hat{C} = 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ = 60^\circ$. $\hat{E} = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$. Angles de ABC : 50° , 70° , 60° . Angles de DEF : 50° , 70° , 60° . Deux angles égaux : similaires par AA. ✓

Solution 2.6.

Le triangle de côtés 3, 4, 5 et le triangle de côtés 6, 8, 10 ont les mêmes angles (le second est l'agrandissement du premier avec un rapport $k = 2$) : ils sont semblables. Mais leurs côtés ne sont pas égaux : ils ne sont pas congruents.

Solution 2.7.

$$a) \quad G = \left(\frac{1+7+4}{3}, \frac{2+4+10}{3} \right) = \left(4, \frac{16}{3} \right).$$

$$b) \quad M = \left(\frac{7+4}{2}, \frac{4+10}{2} \right) = \left(\frac{11}{2}, 7 \right).$$

$$\overrightarrow{AG} = \left(3, \frac{10}{3} \right), \overrightarrow{AM} = \left(\frac{9}{2}, 5 \right).$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}, \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \left(3, \frac{10}{3} \right) = \overrightarrow{AG}. \quad \checkmark$$

Solution 2.8.

$BC = \sqrt{36 + 64} = 10$. Comme le triangle est rectangle en A , le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse : $\Omega = (3, 4)$, $r = 5$.

Aire du disque : $\pi r^2 = 25\pi$.

Solution 2.9.

$$a) \quad \text{Pente de } (BC) : \frac{3-0}{1-4} = -1; \text{ la hauteur issue de } A \text{ a pente } 1 : y = x.$$

$$b) \quad \text{Pente de } (AC) : \frac{3-0}{1-0} = 3; \text{ la hauteur issue de } B \text{ a pente } -\frac{1}{3} : y = -\frac{1}{3}(x - 4).$$

$$c) \quad \text{Substituer } y = x : x = -\frac{1}{3}(x - 4) \iff 3x = -x + 4 \iff x = 1. \text{ Orthocentre : } (1, 1).$$

Solution 2.10.

Les triangles APH_1 et APH_2 ont : le côté $[AP]$ commun ; $\widehat{PAH_1} = \widehat{PAH_2}$ (car b est la bissectrice) ; $\widehat{AH_1P} = \widehat{AH_2P} = 90^\circ$ (par construction).

Le troisième angle de chaque triangle vaut donc $180^\circ - 90^\circ - \widehat{PAH_i}$, qui est le même dans les deux triangles. Par le critère **ACA** (côté $[AP]$, deux angles adjacents égaux), $APH_1 \equiv APH_2$, donc $PH_1 = PH_2$. □

Solution 2.11.

Notons $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$.

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right), M = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right).$$

$$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{x_B + x_C - 2x_A}{3}, \frac{y_B + y_C - 2y_A}{3} \right).$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \left(\frac{x_B + x_C}{2} - x_A, \frac{y_B + y_C}{2} - y_A \right) = \left(\frac{x_B + x_C - 2x_A}{3}, \frac{y_B + y_C - 2y_A}{3} \right).$$

Les deux vecteurs sont égaux, quels que soient A, B, C . $\square$

Solution 2.12.

a) $G = \left(\frac{0+6+2}{3}, \frac{0+0+4}{3} \right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right).$

b) Médiatrice de $[AB]$: $x = 3$. Médiatrice de $[AC]$: passe par $(1, 2)$, perpendiculaire à (AC) de pente 2, donc de pente $-\frac{1}{2}$: $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$. En $x = 3$: $y = 2 - 1 = 1$. $\Omega = (3, 1)$.

c) Hauteur issue de A : perpendiculaire à (BC) (pente $\frac{4-0}{2-6} = -1$), donc pente 1 : $y = x$. Hauteur issue de B : perpendiculaire à (AC) (pente 2), donc pente $-\frac{1}{2}$, passant par $B(6, 0)$: $y = -\frac{1}{2}(x - 6)$. Intersection avec $y = x$: $x = -\frac{1}{2}(x - 6) \iff 2x = -x + 6 \iff x = 2$. $H = (2, 2)$.

d) $\overrightarrow{\Omega G} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$, $\overrightarrow{GH} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) = 2\overrightarrow{\Omega G}$: les trois points sont alignés et $\Omega G : GH = 1 : 2$. $\checkmark$

Solution 2.13.

a) $C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{1}{2}t \right)$; $BC^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 8 \right)^2 + \left(\frac{1}{2}t \right)^2 = 25$, ce qui se développe en $t^2 - 8\sqrt{3}t + 39 = 0$.

b) $\Delta = (8\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 39 = 192 - 156 = 36 > 0$; $t = \frac{8\sqrt{3} \pm 6}{2} = 4\sqrt{3} \pm 3$. Les deux solutions $t_1 = 4\sqrt{3} - 3 \approx 3,93$ et $t_2 = 4\sqrt{3} + 3 \approx 9,93$ sont positives : il existe bien deux longueurs AC différentes, donc deux triangles non congruents. Le cas CAC non adjacent ne garantit donc pas la congruence.

Solution 2.14.

Posons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme : $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$.

$$AC = BD \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \iff \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} \iff 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Donc l'angle en A est droit : $ABCD$ est un rectangle. $\square$

Solution 2.15.

Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ comme ci-dessus : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2$.

Diagonales perpendiculaires $\iff$ ce produit scalaire est nul $\iff \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \iff AB = AD$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $AB = CD$ et $AD = BC$; avec $AB = AD$, les quatre côtés sont égaux : $ABCD$ est un losange. $\square$

Solution 2.16.

a) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$: rectangle (réciproque de Pythagore).

b) Aire = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

c) Demi-périmètre $s = \frac{5+12+13}{2} = 15$; $r = \frac{30}{15} = 2$.

Solution 2.17.

Aire = $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3}$.

Demi-périmètre $s = \frac{3a}{2} = 9$.

$r = \frac{9\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3}$.

Solution 2.18.

1) Tracer un cercle de centre A et rayon quelconque : il coupe AX en P et AY en Q , avec $AP = AQ$.

2) Tracer deux cercles de même rayon (supérieur à $\frac{1}{2}PQ$), centrés en P et en Q : ils se recoupent en un point S (distinct de A).

3) La droite (AS) est la bissectrice cherchée.

Justification : par construction, $SP = SQ$ (même rayon) et $AP = AQ$, et $[AS]$ est commun : par CCC, $\triangle APS \equiv \triangle AQS$, donc $\widehat{PAS} = \widehat{QAS}$: (AS) partage bien $\widehat{XAY}$ en deux angles égaux.

Solution 2.19.

$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AC}{DF} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$: les côtés adjacents à l'angle donné sont proportionnels (même rapport $k = \frac{2}{3}$), et $\hat{A} = \hat{D} = 50^\circ$ est l'angle inclus. Par le critère **SAS** de similitude, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. $\checkmark$

Solution 2.20.

L'angle intérieur en A et l'angle extérieur en A sont supplémentaires (ils forment un angle plat) : $\hat{A} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Par le théorème de la somme des angles d'un triangle : $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$.

Solution 2.21.

$$G = \left(\frac{0+4+2}{3}, \frac{0+0+2\sqrt{3}}{3} \right) = \left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right).$$

Médiatrice de $[AB]$: $x = 2$. Médiatrice de $[AC]$: passe par le milieu $(1, \sqrt{3})$, perpendiculaire à (AC) de pente $\sqrt{3}$, donc de pente $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. En $x = 2$: $y =$

$$\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}(2 - 1) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Donc } \Omega = \left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) = G.$$

Hauteur issue de A : perpendiculaire à (BC) (pente $-\sqrt{3}$), donc pente $\frac{1}{\sqrt{3}}$,

passant par l'origine : $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$. En $x = 2$: $y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc $H = \left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) =$

$G = \Omega$.

Les trois points sont confondus. ✓

Chapitre 3

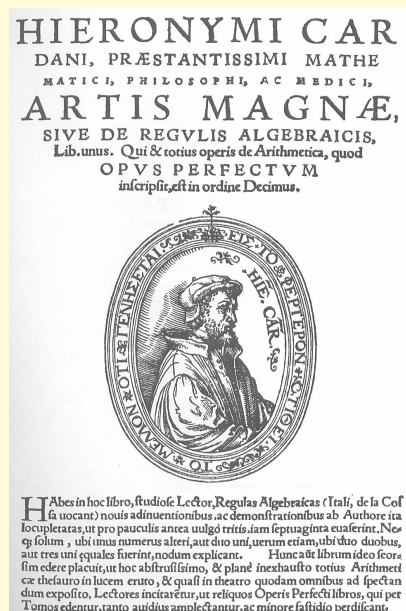
Fonctions polynomiales

Au XVI^e siècle, les algébristes italiens se lançaient des défis publics : résoudre des équations cubiques en moins de temps que l'adversaire.

Tartaglia découvrit une méthode pour le degré 3, la confia sous serment à Cardan, qui la publia quand même. Un scandale mathématique.

Mais derrière la dispute, une vérité profonde : les polynômes de degré 3 et 4 ont des formules de résolution. Degré 5 ? Abel démontra en 1824 qu'il n'y en a pas. Pas de formule. Jamais.

Les polynômes, simples en apparence, cachent des abîmes.¹



¹**Les faits** : globalement établi, détails disputés dans les sources d'époque elles-mêmes. Tartaglia a transmis sa méthode à Cardan en 1539 sous serment de secret selon lui — que Ferrari, témoin, a toujours nié. Cardan l'a publiée dans l'*Ars Magna* (1545) après avoir découvert que Scipione del Ferro l'avait trouvée des décennies plus tôt. La preuve d'Abel date de 1824 (version complète 1826).

3.1 Généralités

Définition 3.1 — *polynôme*.

Un **polynôme** de degré n est une fonction :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

avec $a_n \neq 0$. Le coefficient a_n est le **coefficient dominant**, a_0 le **terme constant**.

Proposition 3.2 — *allure générale*.

Pour $|x| \rightarrow +\infty$, $P(x)$ se comporte comme $a_n x^n$:

- n pair, $a_n > 0$: $P(x) \rightarrow +\infty$ des deux côtés
- n impair, $a_n > 0$: $P(x) \rightarrow -\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite
- Signes inversés si $a_n < 0$

Exemple 3.1. Pour $P(x) = -2x^5 + 3x^2 - 1$: degré 5 (impair), coefficient dominant $-2 < 0$. Donc $P(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$ et $P(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ (signes inversés par rapport au cas $a_n > 0$, n impair).

3.2 Division euclidienne

Théorème 3.3 — *division euclidienne des polynômes*.

Pour tout polynôme A et tout polynôme $B \neq 0$, il existe des polynômes Q (quotient) et R (reste) uniques tels que :

$$A = B \cdot Q + R, \quad \deg R < \deg B.$$

Exemple 3.2. Diviser $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ par $B(x) = x - 2$:

$$2x^3 - 3x^2 + x - 5 = (x - 2)(2x^2 + x + 3) + 1.$$

Reste : $R = 1$.

3.3 Théorème du diviseur

Théorème 3.4 — *du reste*.

Le reste de la division de $P(x)$ par $(x - a)$ est $P(a)$.

Théorème 3.5 — du diviseur.

Soit $P(x)$ un polynôme et a un nombre réel. Alors :

$$(x - a) \text{ divise } P(x) \iff P(a) = 0.$$

(C'est une équivalence : le théorème direct — « si $P(a) = 0$ alors $(x - a)$ divise P » — et sa réciproque sont tous deux vrais.)

Remarque 3.1. Par contraposition : $(x - a)$ **ne divise pas** $P(x)$ si et seulement si $P(a) \neq 0$. C'est souvent ainsi qu'on **élimine** rapidement des candidats racines, sans effectuer aucune division.

Exemple 3.3. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$: donc $(x - 1)$ divise P . Division : $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Proposition 3.6 — zéros entiers d'un polynôme à coefficients entiers.

Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients **entiers**, avec $a_n \neq 0$. Si c est un zéro entier **non nul** de P , alors c est un **diviseur** de a_0 .

Remarque 3.2. On utilise en pratique la **contraposée** : si c n'est pas un diviseur de a_0 , alors c ne peut pas être un zéro entier de P . Cela réduit fortement le nombre de candidats à tester.

Exemple 3.4. Factoriser $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Zéros entiers possibles : diviseurs de -6 , soit $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$P(1) = 1 + 2 - 5 - 6 = -8 \neq 0$; $P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$: -1 est un zéro.

$P(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$: 2 est un zéro. $P(3) = 27 + 18 - 15 - 6 = 24 \neq 0$. $P(-2) = -8 + 8 + 10 - 6 = 4 \neq 0$. $P(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 = 0$: -3 est un zéro.

P est de degré 3, on a trouvé 3 zéros : c'est fini. $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$.

Zéros rationnels. Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ à coefficients **entiers**. Si $\frac{c}{d}$ (fraction irréductible) est un zéro rationnel non nul de P , alors :

- c divise a_0 ;
- d divise a_n .

Ce théorème (comme celui sur les zéros entiers, dont il est une généralisation) ne dit **rien** sur d'éventuels zéros **irrationnels**.

Exemple. $h(x) = 4x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x - 3$. Diviseurs de $a_0 = -3$: $\pm 1, \pm 3$; diviseurs de $a_4 = 4$: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Candidats rationnels : $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}$.

On vérifie $h(\frac{3}{2}) = 0$ et $h(-\frac{1}{2}) = 0$; division par $(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2}) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ donne $h(x) = (2x - 3)(2x + 1)(x^2 + 1)$ (avec $x^2 + 1$ irréductible sur $\mathbb{R}$).

3.4 Factorisation et signe sur $\mathbb{R}$

Proposition 3.7 — *factorisation complète.*

Tout polynôme à coefficients réels se factorise sur $\mathbb{R}$ en un produit de facteurs linéaires $(x - a)$ et de trinômes irréductibles $(x^2 + bx + c)$ avec $\Delta < 0$.

Multiplicité des racines. Si $(x - a)^k$ divise P mais pas $(x - a)^{k+1}$, on dit que a est une racine de **multiplicité** k . Géométriquement : la courbe est tangente à l'axe des x en a si $k \geq 2$ (elle ne le traverse pas si k est pair, elle le traverse si k est impair — même à partir de $k = 3$).

Exemple. $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)$: racine double en 1 (tangence), racine simple en -2 (traversée).

Exemple 3.5. Étudier le signe et esquisser $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2(x - 3)$.

Zéros : -1 (simple), 2 (double), 3 (simple).

x	-1	2	3
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

(En 2 , multiplicité paire : f ne change pas de signe. En -1 et 3 , multiplicité impaire : f change de signe.)

Avec $f(0) = 1 \cdot 4 \cdot (-3) = -12$ et $f(4) = 5 \cdot 4 \cdot 1 = 20$ comme points supplémentaires, on peut esquisser la courbe : elle vient de $-\infty$, traverse en -1 , reste positive jusqu'à toucher l'axe en 2 (tangence) sans le traverser, redevient positive un instant, puis traverse en 3 vers $-\infty$.

3.5 Inéquations de degré supérieur à un

Définition 3.8 — *inéquation de degré > 1 .*

Une inéquation de degré supérieur à un est une inéquation équivalente à $P(x) < 0$, $P(x) > 0$, $P(x) \leq 0$ ou $P(x) \geq 0$, où $P(x)$ est un polynôme de degré ≥ 2 .

Proposition 3.9 — *méthode de résolution.*

1. Ramener l'inéquation à la forme « expression ≥ 0 » (tout d'un côté).
2. Factoriser **complètement** l'expression.
3. Construire un **tableau de signes** et conclure.

(Un produit se prête à la règle des signes; une somme non factorisée ne le permet pas.)

Exemple 3.6. Résoudre $(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0$ (déjà factorisée).

x	-1		2		4	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
produit	$-$	0	$+$	0	$-$	0

$$S =]-1, 2[\cup]4, +\infty[.$$

Exemple 3.7. Résoudre $3x^2 + 2x > 5$.

$3x^2 + 2x - 5 > 0 \iff (x-1)(3x+5) > 0$ (racines 1 et $-\frac{5}{3}$, produit $a = 3 > 0$: positif à l'extérieur des racines).

$$S =]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]1, +\infty[.$$

Remarque 3.3. Si $\Delta < 0$ pour un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, ce trinôme garde un signe **constant** (celui de a) sur tout $\mathbb{R}$: aucune racine ne vient « casser » le signe. Par exemple, $x^2 - 4x + 5$ a $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ et $a = 1 > 0$, donc $x^2 - 4x + 5 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.6 Valeur absolue

Définition 3.10 — valeur absolue.

La valeur absolue d'un réel x est :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ est la distance de x à 0.

Exemple 3.8. Résoudre $|3 - 2x| = 4$.

Cas 1 : $3 - 2x \geq 0$ (soit $x \leq \frac{3}{2}$) : $3 - 2x = 4 \iff x = -\frac{1}{2}$ (compatible avec $x \leq \frac{3}{2}$).

Cas 2 : $3 - 2x < 0$ (soit $x > \frac{3}{2}$) : $-(3 - 2x) = 4 \iff x = \frac{7}{2}$ (compatible avec $x > \frac{3}{2}$).

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right\}.$$

Proposition 3.11 — inéquations avec valeur absolue.

Soient a une expression réelle et $b > 0$:

- $|a| < b \iff -b < a < b$
- $|a| > b \iff a < -b \text{ ou } a > b$

Exemple 3.9. Résoudre $|3x - 2| < 5$.

$$-5 < 3x - 2 < 5 \iff -3 < 3x < 7 \iff -1 < x < \frac{7}{3}.$$

$$S =]-1, \frac{7}{3}[.$$

Exemple 3.10. Résoudre $|2x + 1| \geq 7$.

$$2x + 1 \leq -7 \text{ ou } 2x + 1 \geq 7 \iff x \leq -4 \text{ ou } x \geq 3.$$

$$S =]-\infty, -4] \cup [3, +\infty[.$$

3.7 Exercices

Exercice 3.1. Effectuer les divisions euclidiennes :

- a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ par $(x + 1)$
- b) $2x^3 - x^2 + 3x - 1$ par $(x^2 + 1)$

Exercice 3.2. Factoriser complètement :

- a) $P(x) = x^3 - 7x + 6$ sachant que 1 est racine
- b) $Q(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Exercice 3.3. Étudier le signe de $P(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x - 3)$.

Exercice 3.4. Trouver un polynôme de degré 3, coefficient dominant 2, avec racines -1 , 0 et 3 .

Exercice 3.5. Sans effectuer la division, trouver le reste de la division de $P(x) = x^{100} - 3x^{50} + 2$ par $(x - 1)$.

Exercice 3.6. Factoriser complètement $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ à l'aide du théorème sur les zéros entiers.

Exercice 3.7. Énoncer la réciproque et la contraposée du théorème du reste nul (« si $P(a) = 0$ alors $(x - a)$ divise $P(x)$ »). Sont-elles vraies ?

Exercice 3.8. Pour $f(x) = (x + 3)(x - 1)^3(x - 4)^2$:

- a) Donner les zéros de f et leur multiplicité.
- b) Pour chaque zéro, préciser si la courbe traverse l'axe Ox ou y est seulement tangente.

Exercice 3.9. Une fonction polynomiale f a un unique zéro en -1 (simple) et un zéro en 2 (multiplicité 2), et sa courbe passe par $(0, -8)$. Déterminer l'expression algébrique de f de plus petit degré possible.

Exercice 3.10. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$:

- a) $f(x) = 3x^4 - x + 1$
- b) $g(x) = -2x^5 + 7x^2$
- c) $h(x) = -x^2 + 4x - 1$

Exercice 3.11. Trouver toutes les racines rationnelles de $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$, puis factoriser complètement.

Exercice 3.12. Démontrer le théorème sur les zéros entiers : si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ est à coefficients entiers et c est un zéro entier non nul de P , alors c divise a_0 .

Exercice 3.13. Résoudre $(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0$.

Exercice 3.14. Résoudre $3x^2 + 2x > 5$.

Exercice 3.15. Résoudre $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Exercice 3.16. Résoudre $(x^2 + 1)(x - 3) \leq 0$.

Exercice 3.17. Un objet est lancé verticalement ; sa hauteur (en mètres) après t secondes est donnée par $h(t) = -5t^2 + 20t$. Pour quelles valeurs de t l'objet est-il à plus de 15 m de hauteur ?

Exercice 3.18. Résoudre $|2x - 3| = 7$.

Exercice 3.19. Résoudre $|x + 1| = 3x - 1$.

Exercice 3.20. Résoudre $|3x - 2| < 5$.

Exercice 3.21. Résoudre $|2x + 1| \geq 7$.

Exercice 3.22. Démontrer que pour $b > 0$: $|a| < b \iff -b < a < b$.

3.8 Résumé du chapitre

Division euclidienne

- $A = B \cdot Q + R$ avec $\deg R < \deg B$
- Reste de P divisé par $(x - a) : R = P(a)$

Théorème du diviseur

- $(x - a)$ divise $P(x) \iff P(a) = 0$ (équivalence : théorème direct et réciproque tous deux vrais)
- Zéros entiers possibles (coefficients entiers) : diviseurs de a_0
- MA2 — zéros rationnels $\frac{c}{d}$: c divise a_0 , d divise a_n

Factorisation et signe

- Trouver une racine a , diviser par $(x - a)$, recommencer
- Facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$: linéaires ou trinômes $\Delta < 0$
- Multiplicité impaire : la courbe traverse l'axe ; multiplicité paire : tangence sans traversée

Inéquations de degré > 1

- Ramener à 0, factoriser, tableau de signes
- Trinôme à $\Delta < 0$: signe constant (celui de a) sur $\mathbb{R}$

Valeur absolue

- $|a| < b \iff -b < a < b$ (pour $b > 0$)
 - $|a| > b \iff a < -b$ ou $a > b$ (pour $b > 0$)
 - Équation/inéquation avec valeur absolue : disjonction de cas selon le signe de l'expression intérieure
-

3.9 QCM — Fonctions polynomiales

Une seule réponse correcte par question.

1. Le reste de la division de $P(x) = x^3 - 2x + 1$ par $(x - 1)$ est :

- a) 0
- b) 1
- c) -2
- d) 2

2. $x = 2$ est racine de $P(x) = x^3 - 8$. Alors :

- a) $(x + 2)$ divise P
- b) $(x - 2)$ divise P
- c) $P(2) = 1$
- d) $(x^2 - 4)$ divise P

3. Le polynôme $P(x) = x^4 + 1$ a :

- a) 4 racines réelles
- b) 2 racines réelles
- c) 1 racine réelle
- d) Aucune racine réelle

4. $(x - 1)(x + 2)^2$ s'annule en :

- a) $x = 1$ seulement
- b) $x = -2$ seulement
- c) $x = 1$ et $x = -2$
- d) $x = -1$ et $x = 2$

5. Pour $x \rightarrow +\infty$, $P(x) = -3x^5 + x^2 - 1$ tend vers :

- a) $+\infty$
- b) $-\infty$
- c) -1
- d) 0

6. Le quotient de $x^3 - 1$ par $(x - 1)$ est :

- a) $x^2 + x + 1$
- b) $x^2 - x + 1$
- c) $x^2 + 1$
- d) $x^2 - 1$

7. Un polynôme de degré 3 peut avoir :

- a) 0 ou 2 racines réelles
- b) 1 ou 3 racines réelles
- c) Exactement 3 racines réelles
- d) Au plus 2 racines réelles

8. $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ change de signe en :

- a) $x = 1$ et $x = -3$
- b) $x = -3$ seulement
- c) $x = 1$ seulement
- d) Ni en 1 ni en -3

9. Le théorème du diviseur affirme que $(x - a)$ divise $P(x)$ si et seulement si :

- a) $P(x) = 0$
- b) $P(a) = 0$
- c) $a = 0$
- d) $x = a$

10. Pour un polynôme à coefficients entiers, un zéro entier non nul doit être :

- a) un diviseur du coefficient dominant
- b) un diviseur du terme constant
- c) un multiple du degré
- d) toujours positif

11. Le nombre 4 peut-il être un zéro entier de $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (terme constant 6) ?

- a) Oui, car 4 divise 6
- b) Non, car 4 ne divise pas 6
- c) Oui, car $4 < 6$
- d) Impossible à savoir sans calculer

12. Pour $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2(x - 4)$, la courbe en $x = 2$:

- a) traverse l'axe Ox
- b) est tangente à l'axe Ox
- c) ne touche pas l'axe Ox
- d) admet une asymptote

13. Le trinôme $x^2 - 4x + 5$ sur $\mathbb{R}$:

- a) change de signe deux fois
- b) est toujours positif
- c) est toujours négatif
- d) s'annule une fois

14. L'ensemble des solutions de $(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0$ est :

- a) $] -1, 2[\cup] 4, +\infty[$
- b) $] -\infty, -1[\cup] 2, 4[$
- c) $[-1, 2] \cup [4, +\infty[$
- d) $] -1, 4[$

15. Pour $b > 0$, $|a| < b$ équivaut à :

- a) $a < b$
- b) $-b < a < b$
- c) $a < -b$ ou $a > b$
- d) $a = \pm b$

16. L'ensemble des solutions de $|2x + 1| \geq 7$ est :

- a) $[-4, 3]$
- b) $] -4, 3[$
- c) $] -\infty, -4] \cup [3, +\infty[$
- d) $] -\infty, -4[\cup] 3, +\infty[$

17. Un polynôme de degré 5 à coefficient dominant négatif tend vers $+\infty$ quand x tend vers :

- a) $+\infty$
- b) $-\infty$
- c) les deux
- d) ni l'un ni l'autre

Réponses : 1-a 2-b 3-d 4-c 5-b 6-a 7-b 8-b 9-b 10-b 11-b 12-b 13-b
14-a 15-b 16-c 17-b

3.10 Corrigés

Solution 3.1.

- a) $P(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$: reste nul. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + x - 6) = (x + 1)(x + 3)(x - 2)$.
- b) $2x^3 - x^2 + 3x - 1 = (x^2 + 1)(2x - 1) + (x)$. Reste : x .

Solution 3.2.

- a) $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.
- b) $Q(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Solution 3.3.

Racines : -2 (simple), 1 (double), 3 (simple). Tableau de signes : $P < 0$ sur $(-\infty, -2)$, $P > 0$ sur $(-2, 1)$, $P > 0$ sur $(1, 3)$, $P < 0$ sur $(3, +\infty)$. (La racine double en 1 ne change pas le signe.)

Solution 3.4.

$$P(x) = 2x(x+1)(x-3) = 2(x^3 - 2x^2 - 3x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x.$$

Solution 3.5.

Par le théorème du reste : $R = P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Donc $(x - 1)$ divise P .

Solution 3.6.

Diviseurs de 6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$: 1 est un zéro. $P(-2) = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$: -2 est un zéro. $P(3) = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$: 3 est un zéro.

P est de degré 3 , on a 3 zéros : c'est complet. $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

Solution 3.7.

Réciproque : «si $(x - a)$ divise $P(x)$, alors $P(a) = 0$ » — vraie (c'est justement l'équivalence du théorème du diviseur).

Contraposée du théorème initial : «si $(x - a)$ ne divise pas $P(x)$, alors $P(a) \neq 0$ » — vraie (toute contraposée d'un théorème vrai est vraie).

Solution 3.8.

- a) -3 (multiplicité 1), 1 (multiplicité 3), 4 (multiplicité 2).
- b) En -3 et 1 : multiplicité impaire, la courbe traverse l'axe. En 4 : multiplicité paire, la courbe est tangente à l'axe sans le traverser.

Solution 3.9.

$$f(x) = a(x+1)(x-2)^2. \text{ Avec } f(0) = -8 : a \cdot 1 \cdot 4 = -8 \iff a = -2.$$

$$f(x) = -2(x+1)(x-2)^2.$$

Solution 3.10.

- a) Degré 4 pair, $a_4 = 3 > 0$: $f \rightarrow +\infty$ des deux côtés.
- b) Degré 5 impair, $a_5 = -2 < 0$: $g \rightarrow +\infty$ en $-\infty$, $g \rightarrow -\infty$ en $+\infty$.
- c) Degré 2 pair, $a_2 = -1 < 0$: $h \rightarrow -\infty$ des deux côtés.

Solution 3.11.

Diviseurs de $a_0 = 6$: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Diviseurs de $a_3 = 2$: $\pm 1, \pm 2$. Candidats rationnels : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$.

$$h(3) = 54 - 27 - 33 + 6 = 0 : 3 \text{ est un zéro.}$$

$$\text{Division par } (x - 3) : h(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2).$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \text{ a pour racines } \frac{1}{2} \text{ et } -2 \text{ (Viète ou formule).}$$

$$h(x) = (x - 3)(2x - 1)(x + 2).$$

Solution 3.12.

$$P(c) = 0 \iff a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 = 0.$$

$$\text{Isolons } a_0 : a_0 = -c(a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \dots + a_1).$$

Le facteur entre parenthèses est un entier (somme de produits d'entiers), donc a_0 s'écrit comme c multiplié par un entier : c divise a_0 . $\square$

Solution 3.13.

Zéros : $-1, 2, 4$ (tous simples).

x	-1	2	4
produit	$-$	$+$	$+$

$$S =]-1, 2[\cup]4, +\infty[.$$

Solution 3.14.

$$3x^2 + 2x - 5 > 0 \iff (x - 1)(3x + 5) > 0.$$

Racines : 1 et $-\frac{5}{3}$; $a = 3 > 0$: positif à l'extérieur.

$$S = \left] -\infty, -\frac{5}{3} \right[\cup]1, +\infty[.$$

Solution 3.15.

$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ et $a = 1 > 0$: le trinôme est toujours strictement positif.

$$S = \mathbb{R}.$$

Solution 3.16.

$x^2 + 1 > 0$ pour tout x (jamais nul, toujours positif) : le signe du produit est donc celui de $(x - 3)$.

$$(x - 3) \leq 0 \iff x \leq 3.$$

$$S =]-\infty, 3].$$

Solution 3.17.

$$-5t^2 + 20t > 15 \iff -5t^2 + 20t - 15 > 0.$$

Diviser par -5 (changer le sens de l'inégalité) : $t^2 - 4t + 3 < 0 \iff (t - 1)(t - 3) < 0$.

$S =]1, 3[$: entre 1 et 3 secondes.

Solution 3.18.

$$\text{Cas 1 : } 2x - 3 \geq 0 : 2x - 3 = 7 \iff x = 5 \text{ (compatible).}$$

$$\text{Cas 2 : } 2x - 3 < 0 : -(2x - 3) = 7 \iff x = -2 \text{ (compatible).}$$

$$S = \{-2, 5\}.$$

Solution 3.19.

Cas 1 : $x + 1 \geq 0$ (soit $x \geq -1$) : $x + 1 = 3x - 1 \iff x = 1$ (compatible avec $x \geq -1$; on vérifie aussi $3 \cdot 1 - 1 = 2 \geq 0$, nécessaire car une valeur absolue est ≥ 0).

Cas 2 : $x + 1 < 0$ (soit $x < -1$) : $-(x + 1) = 3x - 1 \iff x = 0$, mais 0 ne vérifie pas $x < -1$: solution rejetée.

$$S = \{1\}.$$

Solution 3.20.

$$-5 < 3x - 2 < 5 \iff -3 < 3x < 7 \iff -1 < x < \frac{7}{3}.$$

$$S = \left] -1, \frac{7}{3} \right[.$$

Solution 3.21.

$$2x + 1 \leq -7 \text{ ou } 2x + 1 \geq 7 \iff x \leq -4 \text{ ou } x \geq 3.$$

$$S =]-\infty, -4] \cup [3, +\infty[.$$

Solution 3.22.

Cas $a \geq 0$: $|a| = a$, donc $|a| < b \iff a < b$. Comme $a \geq 0 > -b$ (car $b > 0$), la condition $-b < a$ est automatiquement vraie : donc $|a| < b \iff -b < a < b$ dans ce cas.

Cas $a < 0$: $|a| = -a$, donc $|a| < b \iff -a < b \iff a > -b$. Comme $a < 0 < b$, la condition $a < b$ est automatiquement vraie : donc $|a| < b \iff -b < a < b$ dans ce cas aussi.

Dans les deux cas, l'équivalence est établie. $\square$

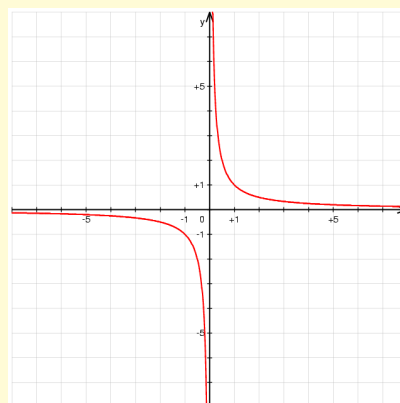
Chapitre 4

Fonctions rationnelles

L'asymptote est une idée étrange : une droite qu'une courbe approche indéfiniment sans jamais la toucher. Le mot vient du grec *asumptotos* — “qui ne tombe pas ensemble”.

Les Grecs connaissaient déjà l'hyperbole et ses asymptotes. Mais c'est avec l'analyse moderne qu'on comprend pourquoi : une fonction rationnelle, quand son dénominateur s'annule, explose vers l'infini.

Quand x part à l'infini, elle s'approche d'une droite. L'infini, en mathématiques, a plusieurs vitesses.¹



4.1 Fractions rationnelles

Définition 4.1 — fraction rationnelle.

Une **fraction rationnelle** est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes. Son **domaine de définition** exclut les valeurs qui annulent le dénominateur.

Proposition 4.2 — ensemble des zéros.

Pour une fraction (ou fonction) rationnelle $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, x est un zéro de f si et seulement si $n(x) = 0$ et $d(x) \neq 0$.

Exemple 4.1. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{x + 2}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Le numérateur s'an-

¹**Les faits** : bien établi. Étymologie grecque confirmée (*asumptōtos*, “qui ne coïncide pas”); les Grecs (notamment Apollonius de Perga, dans son traité sur les coniques) connaissaient déjà l'hyperbole et ses asymptotes.

nule en $x = 3$ et $x = -2$, mais $-2 \notin D_f$: donc $Z_f = \{3\}$ seulement.

Remarque 4.1. [simplification — attention au domaine] Simplifier une fraction rationnelle par un facteur commun ne change **pas** le domaine implicitement : il faut **conserver** l'exclusion d'origine.

Exemple. $f(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{(x^2+1)(x+5)}$ a pour domaine $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ (à cause du facteur $x+5$).

Après simplification, $g(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$ a pour domaine $\mathbb{R}$ tout entier — $g(-5) = -\frac{4}{13}$ existe, alors que $f(-5)$ n'existe pas ! Les fonctions f et g ne sont donc **pas identiques**, seulement égales sur D_f .

Proposition 4.3 — opérations sur les fractions rationnelles.

Les opérations (addition, soustraction, multiplication, division) suivent les mêmes règles que pour les nombres rationnels : dénominateur commun pour additionner/soustraire, produit des numérateurs et des dénominateurs pour multiplier, multiplication par l'inverse pour diviser.

Exemple 4.2. Additionner $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$ ($D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$) :

$$\frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x+4+3x-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}.$$

Exemple 4.3. Diviser $\frac{x+1}{x-3} \div \frac{x-3}{2x}$ ($D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$) :

$$\frac{x+1}{x-3} \cdot \frac{2x}{x-3} = \frac{2x(x+1)}{(x-3)^2}.$$

4.2 Équations rationnelles

Définition 4.4 — équation rationnelle.

Une **équation rationnelle** est une équation comportant des fractions rationnelles.

Proposition 4.5 — méthode de résolution.

1. Déterminer le **domaine** de l'équation (exclure les valeurs annulant un dénominateur).
2. Amener tous les termes d'un même côté et réduire au même dénominateur, pour obtenir une unique fraction $= 0$.
3. Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul (et le dénominateur non nul) : résoudre $n(x) = 0$.
4. **Rejeter** toute solution qui n'appartient pas au domaine.

Exemple 4.4. Résoudre $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

$$\frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1} \iff \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1} \iff 2x = 2 \iff x = 1.$$

Mais $1 \notin D$: la solution est rejetée. $S = \emptyset$.

4.3 Définition et domaine des fonctions rationnelles

Définition 4.6 — fonction rationnelle.

Une **fonction rationnelle** est un quotient de polynômes :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

définie pour $Q(x) \neq 0$. Son domaine est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid Q(x) = 0\}$.

4.4 Asymptotes

Définition 4.7 — asymptote verticale.

La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** de f si $|f(x)| \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow a$. Cela se produit quand $Q(a) = 0$ et $P(a) \neq 0$.

Définition 4.8 — asymptote horizontale.

La droite $y = L$ est une **asymptote horizontale** si $f(x) \rightarrow L$ quand $x \rightarrow \pm\infty$.

- $\deg P < \deg Q$: asymptote $y = 0$
- $\deg P = \deg Q$: asymptote $y = \frac{a_n}{b_n}$ (rapport des coefficients dominants)
- $\deg P > \deg Q$: pas d'asymptote horizontale

Définition 4.9 — asymptote oblique.

Si $\deg P = \deg Q + 1$, la division euclidienne donne :

$$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

et $y = ax + b$ est une **asymptote oblique**.

Exemple 4.5. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. Division : $f(x) = x+1 + \frac{2}{x-1}$. Asymptote verticale : $x = 1$.
Asymptote oblique : $y = x+1$.

4.5 Fonctions homographiques

Définition 4.10 — fonction homographique.

Une **fonction homographique** est une fonction rationnelle particulière de la forme :

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0.$$

(La condition $ad - bc \neq 0$ garantit que f n'est pas simplifiable en une fonction constante.)

Proposition 4.11 — caractéristiques d'une fonction homographique.

Pour $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$
- $Z_f = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ (si $a \neq 0$)
- asymptote verticale : $x = -\frac{d}{c}$
- asymptote horizontale : $y = \frac{a}{c}$

Exemple 4.6. $f(x) = \frac{3x - 6}{x + 2}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $Z_f = \{2\}$, asymptote verticale $x = -2$, asymptote horizontale $y = 3$.

Centre de symétrie. Le graphe d'une fonction homographique $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ admet pour **centre de symétrie** le point d'intersection de ses deux asymptotes, $I = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c} \right)$.

Idée de preuve. En posant $u = x + \frac{d}{c}$ (distance horizontale à l'asymptote verticale), on montre que $f(x) - \frac{a}{c} = \frac{k}{u}$ pour une constante k : c'est une fonction **impaire** de u , donc symétrique par rapport à l'origine du repère (u, v) centré en I .

4.6 Étude complète

Pour étudier une fonction rationnelle :

1. Domaine de définition
2. Asymptotes (verticales, horizontale ou oblique)
3. Signe du numérateur et du dénominateur
4. Tableau de variations (dérivée — au chapitre suivant)

5. Graphe

Exemple 4.7. $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- AV : $x = -1$; AH : $y = 2$ (degrés égaux, $\frac{2}{1} = 2$)
- Zéro : $x = \frac{3}{2}$

Remarque 4.2. Dans un tableau de signes d'une fonction rationnelle, la valeur qui annule le **dénominateur** n'appartient pas au domaine : on l'indique par une case « hachurée » (ou « || »), et la fonction peut **changer de signe** à cet endroit, tout comme à un zéro simple.

4.7 Inéquations rationnelles

Définition 4.12 — inéquation rationnelle.

Une **inéquation rationnelle** est une inéquation équivalente à $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$ ou $f(x) \geq 0$, où $f(x)$ est une fraction rationnelle.

Proposition 4.13 — méthode de résolution.

On amène tous les termes d'un même côté, on réduit en une seule fraction (numérateur et dénominateur **factorisés**), puis on construit un tableau de signes — **jamais** on ne multiplie les deux membres par le dénominateur sans en étudier le signe au préalable.

Exemple 4.8. Résoudre $\frac{1}{x} \geq \frac{2x}{x+1}$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{2x}{x+1} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x+1) - 2x^2}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(2x^2 - x - 1)}{x(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(2x+1)(x-1)}{x(x+1)} \geq 0 \\ 0 &\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-1)}{x(x+1)} \leq 0. \end{aligned}$$

Tableau de signes (zéros $-\frac{1}{2}, 1$; pôles $-1, 0$) : $S =]-1, -\frac{1}{2}] \cup]0, 1]$.

Décomposition en éléments simples. Toute fraction rationnelle avec $\deg P < \deg Q$ se décompose en somme de fractions simples du type :

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}.$$

Exemple. $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}.$

4.8 Exercices

Exercice 4.1. Déterminer le domaine et les asymptotes de :

a) $f(x) = \frac{3}{x-4}$

b) $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

c) $h(x) = \frac{x^2+x}{x-2}$

Exercice 4.2. Étudier le signe de $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x-2}$.

Exercice 4.3. Résoudre :

a) $\frac{x+1}{x-2} = 3$

b) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x} = 2 \quad (x \neq 0, -1)$

Exercice 4.4. Trouver l'asymptote oblique de $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-2}$ et la distance du point $(3, f(3))$ à cette asymptote.

Exercice 4.5. Résoudre $\frac{x+2}{x-1} \leq 2$.

Exercice 4.6. Soit $f(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{(x^2+1)(x+5)}$ et $g(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$.

- a) Donner le domaine de f et celui de g .
- b) Calculer $g(-5)$. La fonction $f(-5)$ existe-t-elle?
- c) f et g sont-elles identiques?

Exercice 4.7. Calculer $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}$ (donner le domaine).

Exercice 4.8. Effectuer, en donnant le domaine :

a) $\frac{x+1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{2x}$

b) $\frac{x+1}{x-3} \div \frac{x-3}{2x}$

Exercice 4.9. Résoudre $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$.

Exercice 4.10. Résoudre $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x-1}{x+3}$.

Exercice 4.11. Soit $f(x) = \frac{3x-6}{x+2}$. Déterminer D_f , Z_f , l'asymptote verticale et l'asymptote horizontale, à l'aide des formules pour une fonction homographique.

Exercice 4.12. Déterminer une fonction homographique f telle que $x = 3$ soit une asymptote verticale, $y = 2$ une asymptote horizontale, et $f(0) = -4$.

Exercice 4.13. Soit $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+1)}$.

a) Donner D_f , Z_f et les asymptotes verticales.

b) Construire le tableau de signes de f .

Exercice 4.14. Résoudre $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$.

Exercice 4.15. Résoudre $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+2}$.

Exercice 4.16. Deux résistances électriques montées en parallèle, l'une valant $x \text{ k}\Omega$, l'autre $x+1 \text{ k}\Omega$, ont pour résistance équivalente $R = \frac{x(x+1)}{2x+1}$. Pour quelles valeurs de $x > 0$ a-t-on $R < 0,4 \text{ k}\Omega$?

Exercice 4.17. Démontrer que le graphe de $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (fonction homographique) admet pour centre de symétrie le point d'intersection de ses asymptotes, $I = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

Exercice 4.18. Reprendre $f(x) = \frac{3x-6}{x+2}$ de l'exercice 4.11 (centre de symétrie $I = (-2, 3)$ d'après la formule). Vérifier numériquement que $f(-1) + f(-3) = 2 \cdot 3$ (propriété caractéristique d'un centre de symétrie : la moyenne des images de deux points symétriques par rapport à -2 vaut l'ordonnée de I).

Exercice 4.19. Simplifier $h(x) = \frac{\frac{2}{x} - 1}{1 + \frac{1}{x}}$ et déterminer son domaine et son (ses) zéro(s).

Exercice 4.20. Soit $f(x) = \frac{x^2 - 9}{(x - 3)(x + 2)}$ et $g(x) = \frac{x + 3}{x + 2}$.

- a) Simplifier $f(x)$ et vérifier qu'on retrouve $g(x)$.
- b) Donner D_f et D_g . f et g sont-elles la même fonction ?
- c) Calculer $g(3)$. Que dire de $f(3)$?

4.9 Résumé du chapitre

Fractions rationnelles

- Zéro de $f = \frac{n}{d} : n(x) = 0$ et $d(x) \neq 0$
- Opérations : mêmes règles que pour les nombres rationnels
- Simplification : le domaine d'origine doit être conservé (une fonction simplifiée peut avoir un domaine plus grand — ce n'est alors plus la même fonction)

Équations rationnelles

- Déterminer le domaine, réduire à une fraction = 0, résoudre le numérateur, **rejeter** les solutions hors domaine

Asymptotes

- **Verticale** $x = a : Q(a) = 0, P(a) \neq 0$
- **Horizontale** : $\deg P \leq \deg Q$ — limite à l'infini
- **Oblique** : $\deg P = \deg Q + 1$ — quotient de la division euclidienne

Fonctions homographiques $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) :

- AV : $x = -\frac{d}{c}$ AH : $y = \frac{a}{c}$ zéro : $x = -\frac{b}{a}$
- MA2 : centre de symétrie du graphe = intersection des asymptotes

Étude du signe

- Factoriser P et Q
- Tableau de signes : zéros de P et pôles de Q (case hachurée, exclue du domaine)
- Le signe change aux zéros/pôles simples, pas aux zéros doubles

Inéquations rationnelles

- Ramener à $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$, jamais multiplier par le dénominateur sans étudier son signe
-

4.10 QCM — Fonctions rationnelles

Une seule réponse correcte par question.

1. L'asymptote horizontale de $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$:

- a) $y = 0$
- b) $y = 1$
- c) $y = 3$
- d) $y = -2$

2. Le domaine de $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ est :

- a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- c) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- d) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

3. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ admet :

- a) Une asymptote horizontale $y = 0$
- b) Une asymptote oblique $y = x - 1$
- c) Une asymptote oblique $y = x + 1$
- d) Aucune asymptote

4. L'équation $\frac{2}{x+1} = 1$ a pour solution :

- a) $x = 1$
- b) $x = 2$
- c) $x = 3$
- d) $x = -1$

5. $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ est positive pour :

- a) $x \in (-2, 3)$
- b) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
- c) $x \in (-\infty, 3)$
- d) $x \in (3, +\infty)$

6. Si $\deg P < \deg Q$, alors $f = P/Q$ admet :

- a) Une asymptote oblique
- b) L'asymptote horizontale $y = 0$
- c) Aucune asymptote
- d) Une asymptote verticale en $x = 0$

7. La solution de $\frac{x+1}{x-1} \leq 0$ est :
- $[-1, 1]$
 - $(-1, 1)$
 - $[-1, 1)$
 - $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
8. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ admet :
- Une AV en $x = 1$
 - Une AH en $y = 0$ et aucune AV
 - Une AH en $y = 1$
 - Deux AV en $x = \pm 1$
9. Pour $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, x est un zéro de f si :
- $n(x) = 0$
 - $d(x) = 0$
 - $n(x) = 0$ et $d(x) \neq 0$
 - $n(x) = d(x)$
10. Soient $f(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{(x^2+1)(x+5)}$ et $g(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$:
- $f = g$ partout
 - $f = g$ sauf en $x = -5$
 - $f = g$ sauf en $x = 3$
 - f et g n'ont rien en commun
11. L'équation $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ a pour ensemble de solutions :
- $\{1\}$
 - $\{-1, 1\}$
 - $\emptyset$
 - $\mathbb{R}$
12. Pour $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ homographique, l'asymptote verticale est :
- $x = -\frac{b}{a}$
 - $x = -\frac{d}{c}$
 - $x = \frac{a}{c}$
 - $y = \frac{a}{c}$
13. Pour la même fonction, l'asymptote horizontale est :
- $y = \frac{a}{c}$

- b) $y = -\frac{d}{c}$
- c) $x = \frac{a}{c}$
- d) $y = \frac{b}{d}$

14. Le centre de symétrie du graphe d'une fonction homographique est :

- a) toujours l'origine
- b) le point d'intersection des asymptotes
- c) le sommet de la courbe
- d) il n'y en a pas

15. Dans un tableau de signes d'une fonction rationnelle, une valeur qui annule le dénominateur :

- a) donne toujours $f = 0$
- b) est exclue du domaine (case hachurée)
- c) donne toujours $f > 0$
- d) n'apparaît jamais dans le tableau

16. La solution de $\frac{1}{x} > \frac{1}{x+2}$ est :

- a) $] -2, 0[$
- b) $] -\infty, -2[\cup] 0, +\infty[$
- c) $] -2, 0]$
- d) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

17. Pour simplifier une fraction rationnelle correctement, il faut :

- a) ignorer le domaine
- b) toujours multiplier par le dénominateur
- c) conserver les restrictions du domaine d'origine
- d) changer le domaine en $\mathbb{R}$

18. Une fonction homographique $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ vérifie toujours :

- a) $ad - bc = 0$
- b) $ad - bc \neq 0$
- c) $a = c$
- d) $b = d$

Réponses : 1-c 2-c 3-b 4-a 5-b 6-b 7-c 8-b 9-c 10-b 11-c 12-b 13-a
14-b 15-b 16-b 17-c 18-b

4.11 Corrigés

Solution 4.1.

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$; AV : $x = 4$; AH : $y = 0$.
 b) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$; AV : $x = \pm 2$; AH : $y = 1$.
 c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; AV : $x = 2$; Division : $h(x) = x + 3 + \frac{6}{x-2}$; AO : $y = x + 3$.

Solution 4.2.

Zéros : $x = 1$, $x = -3$; pôle : $x = 2$. Tableau de signes : $f < 0$ sur $(-\infty, -3)$, $f > 0$ sur $(-3, 1)$, $f < 0$ sur $(1, 2)$, $f > 0$ sur $(2, +\infty)$.

Solution 4.3.

- a) $x + 1 = 3(x - 2) \Rightarrow x + 1 = 3x - 6 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.
 b) $\frac{x^2+(x+1)}{x(x+1)} = 2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 2x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$; $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Solution 4.4.

Division : $2x^2 - 3x + 1 = (x - 2)(2x + 1) + 3$. $f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x-2}$; AO : $y = 2x + 1$.
 $f(3) = \frac{18-9+1}{1} = 10$. Distance de $(3, 10)$ à $y = 2x + 1$ (i.e. $2x - y + 1 = 0$) : $d = \frac{|6-10+1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Solution 4.5.

$\frac{x+2}{x-1} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+2-2(x-1)}{x-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x+4}{x-1} \leq 0$. Zéro : $x = 4$; pôle : $x = 1$. $\frac{-x+4}{x-1} \leq 0$ pour $x \in (-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$.

Solution 4.6.

- a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ (facteur $x + 5$ au dénominateur); $D_g = \mathbb{R}$ (jamais nul, car $x^2 + 1 \geq 1$).
 b) $g(-5) = \frac{-8}{26} = -\frac{4}{13}$. $f(-5)$ n'existe pas.
 c) Non : elles ont des domaines différents. $f = g$ uniquement sur D_f .

Solution 4.7.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}.$$

$$\frac{2(x+2) + 3(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}.$$

Solution 4.8.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}.$$

a) $\frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(2x)} = \frac{x+1}{2x}$ (sur D ; attention, cette simplification élimine apparemment la restriction en 3, mais elle doit être conservée car elle vient du domaine d'origine).

b) $\frac{x+1}{x-3} \cdot \frac{2x}{x-3} = \frac{2x(x+1)}{(x-3)^2}.$

Solution 4.9.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1} \iff 2x = 2 \iff x = 1.$$

Mais $1 \notin D$: solution rejetée. $S = \emptyset$.

Solution 4.10.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3, -3\}.$$

$$(x+2)(x+3) = (x-1)(x-3) \iff x^2+5x+6 = x^2-4x+3 \iff 9x = -3 \iff x = -\frac{1}{3}.$$

$$-\frac{1}{3} \in D : S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}.$$

Solution 4.11.

$$a = 3, b = -6, c = 1, d = 2.$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}; Z_f = \left\{\frac{6}{3}\right\} = \{2\};$$

$$AV : x = -2; AH : y = \frac{3}{1} = 3.$$

Solution 4.12.

$$\text{Forme : } f(x) = \frac{2x+b}{x-3} \text{ (le 2 assure l'AH } y = 2, \text{ le } -3 \text{ l'AV } x = 3).$$

$$f(0) = \frac{b}{-3} = -4 \iff b = 12.$$

$$f(x) = \frac{2x+12}{x-3}.$$

Solution 4.13.

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3, -1\}; Z_f = \{1, -2\}; AV : x = 3 \text{ et } x = -1.$

b) Zéros et pôles, dans l'ordre : $-2, -1, 1, 3.$

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\parallel$
	0	$-$	$\parallel$	$+$

Solution 4.14.

Zéro : $x = 2$; pôle : $x = -1$ (exclu du domaine).

$$S =]-\infty, -1[\cup [2, +\infty[.$$

Solution 4.15.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}.$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} > 0 \iff \frac{(x+2)-x}{x(x+2)} > 0 \iff \frac{2}{x(x+2)} > 0 \iff x(x+2) > 0.$$

$$S =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[.$$

Solution 4.16.

$$\frac{x(x+1)}{2x+1} < \frac{2}{5} \iff \frac{x^2+x}{2x+1} - \frac{2}{5} < 0 \iff \frac{5x^2+5x-2(2x+1)}{5(2x+1)} < 0 \iff \frac{5x^2+x-2}{5(2x+1)} < 0.$$

Pour $x > 0$, $2x+1 > 0$ toujours, donc il suffit d'étudier $5x^2+x-2 < 0$. Racines :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+40}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{10}.$$

La racine positive est $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{10} \approx 0,54$.

$$\text{Pour } x > 0 : S = \left] 0, \frac{-1 + \sqrt{41}}{10} \right[\text{ (en k}\Omega\text{)}.$$

Solution 4.17.

Calculons $f(x) - \frac{a}{c}$:

$$f(x) - \frac{a}{c} = \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c} = \frac{c(ax+b) - a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

Posons $k = \frac{bc-ad}{c}$ (constante non nulle car $ad-bc \neq 0$) et $u = x + \frac{d}{c}$ (de sorte que $cx+d = cu$) :

$$f(x) - \frac{a}{c} = \frac{k}{cu} = \frac{k/c}{u}.$$

Le membre de droite est une fonction **impaire** de u : en effet, si on remplace u par $-u$, l'expression change de signe. Donc, dans le repère (u, v) centré en I (avec $v = f(x) - \frac{a}{c}$), le graphe est symétrique par rapport à l'origine : I est bien un centre de symétrie. $\square$

Solution 4.18.

$$f(-1) = \frac{3(-1)-6}{-1+2} = \frac{-9}{1} = -9.$$

$$f(-3) = \frac{3(-3)-6}{-3+2} = \frac{-15}{-1} = 15.$$

$$f(-1) + f(-3) = -9 + 15 = 6 = 2 \cdot 3. \checkmark$$

Solution 4.19.

En multipliant numérateur et dénominateur par x ($x \neq 0$) :

$$h(x) = \frac{2-x}{x+1}.$$

Domaine : il faut $x \neq 0$ (dénominateurs internes) et $x \neq -1$ (dénominateur final) :

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

$$\text{Zéro : } 2-x=0 \iff x=2 : Z_h = \{2\}.$$

Solution 4.20.

a) $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2} = g(x)$ (pour $x \neq 3$).

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$; $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Domaines différents : $f \neq g$ en tant que fonctions, bien qu'elles coïncident sur D_f .

c) $g(3) = \frac{6}{5}$. Mais $3 \notin D_f$: $f(3)$ n'existe pas.

Chapitre 5

Fonctions exponentielles

1798. Thomas Malthus publie son *Essai sur le principe de population* : si rien ne l'arrête, une population croît de manière exponentielle. Une bactérie se divise en deux toutes les vingt minutes : en un jour, une seule bactérie donne 2^{72} descendants — plus que le nombre d'atomes dans votre corps.

La croissance exponentielle est la croissance la plus rapide qui existe. Et la décroissance exponentielle — le carbone 14, les médicaments dans le sang — est la plus douce des disparitions.

La même fonction, les deux visages du temps.¹



5.1 La fonction exponentielle a^x

Définition 5.1 — fonction exponentielle de base a .

Pour $a > 0$, $a \neq 1$, la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto a^x$$

est la **fonction exponentielle de base a** .

¹**Les faits** : bien établi. *Essai sur le principe de population* publié anonymement en 1798. Le calcul donné (2^{72} après 24h de divisions toutes les 20 minutes) est arithmétiquement correct (72 divisions en 24h).

Proposition 5.2 — propriétés algébriques.

Pour $a > 0$, $a \neq 1$, et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Proposition 5.3 — monotonie.

- $a > 1$: f strictement croissante, $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$
- $0 < a < 1$: f strictement décroissante, $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

Dans les deux cas : $f(x) > 0$ pour tout x , $f(0) = 1$, asymptote horizontale $y = 0$.

5.2 Équations exponentielles

Proposition 5.4 — méthode de résolution — cas d'une base commune.

Si une équation peut se ramener à la forme $a^{\text{expr}_1} = a^{\text{expr}_2}$ (même base $a > 0$, $a \neq 1$), alors, comme $f(x) = a^x$ est strictement monotone (donc injective) :

$$a^{\text{expr}_1} = a^{\text{expr}_2} \iff \text{expr}_1 = \text{expr}_2.$$

Il reste alors à résoudre cette dernière équation par les méthodes habituelles.

Exemple 5.1. Résoudre $49^{3x} = 7^{x+1}$.

$$49 = 7^2, \text{ donc } (7^2)^{3x} = 7^{x+1} \iff 7^{6x} = 7^{x+1} \iff 6x = x+1 \iff x = \frac{1}{5}.$$

Remarque 5.1. Toutes les équations exponentielles ne se ramènent pas à une base commune (par exemple $13^{3x} = 7^{x+1}$) : il faudra alors les logarithmes, vus au chapitre suivant.

5.3 Le nombre e

Définition 5.5 — nombre e .

Le nombre $e \approx 2,71828 \dots$ est défini comme la base pour laquelle la tangente au graphe de a^x en $(0, 1)$ a une pente exactement égale à 1. C'est la **base naturelle** de l'exponentielle.

La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est la plus importante de toutes les fonctions exponentielles.

Remarque 5.2. On peut aussi obtenir e comme limite : l'expression $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se rapproche de plus en plus de e lorsque n devient très grand. Ce fait réapparaît naturellement dans les intérêts composés (voir plus loin).

5.4 Modélisation

Proposition 5.6 — modèles exponentiels.

- **Croissance** : $N(t) = N_0 \cdot a^t$, avec $a > 1$ et **temps de doublement** T_2 tel que $a^{T_2} = 2$
- **Décroissance** : $N(t) = N_0 \cdot a^t$, avec $0 < a < 1$ et **demi-vie** $T_{1/2}$ tel que $a^{T_{1/2}} = \frac{1}{2}$

Exemple 5.2. Une population de bactéries double toutes les 3 heures. Partir de 500 individus, combien en 12 heures ? $N(12) = 500 \cdot 2^{12/3} = 500 \cdot 2^4 = 8000$.

Proposition 5.7 — croissance et décroissance par taux.

Si une quantité Q varie d'un **taux** T (sous forme décimale) par période, à partir d'une valeur initiale Q_0 :

- **croissance** : $Q(t) = Q_0(1 + T)^t$
- **décroissance** : $Q(t) = Q_0(1 - T)^t$

(C'est la même famille de modèles que ci-dessus, avec $a = 1 + T$ ou $a = 1 - T$: la forme « par taux » est simplement plus naturelle quand un pourcentage d'évolution est donné.)

Exemple 5.3. Une ville de 200 000 habitants croît de 1,5% par an. Population dans 10 ans : $Q(10) = 200\,000 \cdot (1,015)^{10} \approx 232\,108$ habitants.

5.5 Intérêts composés

Proposition 5.8 — intérêt composé à n périodes par an.

Si C_0 est le capital initial, i le taux d'intérêt annuel (décimal), n le nombre de périodes de capitalisation par an, et t le nombre d'années, alors le capital après t années est :

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}.$$

(Avec $n = 1$, on retrouve $C(t) = C_0(1 + i)^t$, la loi de croissance « par taux » ci-dessus.)

Exemple 5.4. 5000 CHF investis à 6% annuel, capitalisé **trimestriellement** ($n = 4$), pendant 3 ans :

$$C(3) = 5000 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4 \cdot 3} \approx 5978 \text{ CHF.}$$

Intérêt composé continu. Si le nombre n de périodes de capitalisation par an croît indéfiniment (« capitalisation continue »), on montre — en posant $k = \frac{n}{i}$ et en utilisant $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e$ — que :

$$C(t) = C_0 e^{it}.$$

Exemple. 2000 CHF à 3,5% continu pendant 8 ans : $C(8) = 2000 e^{0,035 \cdot 8} \approx 2646$ CHF.

Plus généralement, si une quantité q varie à chaque instant proportionnellement à sa valeur actuelle (taux T), alors $q(t) = q_0 e^{Tt}$ — c'est la **loi de croissance (ou décroissance, si $T < 0$) continue**.

Comparaison croissances polynomiale et exponentielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a > 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

L'exponentielle « l'emporte toujours » sur tout polynôme. De même, e^x croît plus vite que x^{1000} — même si, numériquement, il faut parfois attendre très longtemps pour que le dépassement soit visible (voir l'exercice 5.17).

5.6 Exercices

Exercice 5.1. Simplifier sans calculatrice :

a) $2^3 \cdot 2^5 \div 2^4$

b) $(3^2)^3 \div 3^4$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d) $\frac{6^{10}}{2^{10} \cdot 3^{10}}$

Exercice 5.2. Résoudre (sans logarithme) :

a) $2^x = 32$

b) $3^{2x-1} = 27$

c) $4^x = 8$

Exercice 5.3. Un isotope radioactif a une demi-vie de 8 jours. On part de 200 g.

- a) Combien reste-t-il après 24 jours?
- b) Après combien de jours reste-t-il moins de 10 g?

Exercice 5.4. Tracer l'allure des courbes de $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$ et $h(x) = 3 \cdot 2^x - 1$. Préciser les asymptotes et les ordonnées à l'origine.

Exercice 5.5. Un placement à intérêts composés de 1000 CHF à 3% annuel donne après t ans : $C(t) = 1000 \cdot 1,03^t$.

- a) Quel capital après 10 ans? après 20 ans?
- b) En quelle année le capital double-t-il (approximativement)?

Exercice 5.6. Résoudre $8^{2x-1} = 32^{x+2}$.

Exercice 5.7. Résoudre $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x} = 9^{2x}$.

Exercice 5.8. Une ville de 200 000 habitants croît de 1,5% par an.

- a) Écrire la fonction $Q(t)$ donnant la population après t ans.
- b) Calculer la population dans 10 ans.

Exercice 5.9. Une machine perd 15% de sa valeur chaque année. Achetée 80 000 CHF, quelle est sa valeur après 6 ans?

Exercice 5.10. 5000 CHF sont investis à 6% annuel, capitalisé trimestriellement. Calculer le capital après 3 ans.

Exercice 5.11. Quel capital initial faut-il investir à 4% annuel, capitalisé mensuellement, pour disposer de 3000 CHF après 5 ans?

Exercice 5.12. 2000 CHF sont investis à 3,5% annuel, intérêt composé **continu**. Calculer le capital après 8 ans.

Exercice 5.13. Pour 1000 CHF à 8% annuel, calculer le capital après 1 an pour une capitalisation : annuelle ($n = 1$), trimestrielle ($n = 4$), mensuelle ($n = 12$), quotidienne ($n = 365$), puis pour l'intérêt composé continu. Que constate-t-on?

Exercice 5.14. La population d'une région, actuellement de 500 000 habitants, croît continûment au taux de 1,2% par an ($q(t) = q_0 e^{Tt}$). Estimer la population dans 15 ans.

Exercice 5.15. Soit $f(x) = 2 \cdot 3^x - 5$.

- a) f est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.
- b) Donner $f(0)$ et l'asymptote horizontale.

Exercice 5.16. Un échantillon radioactif perd 70% de sa masse initiale en 50 jours (c'est-à-dire qu'il en reste 30%).

- a) Déterminer la base a telle que $N(t) = N_0 \cdot a^t$ modélise cette décroissance.
- b) En déduire la demi-vie de cet échantillon.

Exercice 5.17. On compare $f(x) = x^{10}$ et $g(x) = 2^x$.

- a) Calculer f et g en $x = 10, 20, 30, 50, 100$. Pour lesquelles de ces valeurs a-t-on $f(x) < g(x)$?
- b) Ce résultat contredit-il le théorème $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$? Expliquer.

Exercice 5.18. Résoudre $2^x > 16$ (sans logarithme).

Exercice 5.19. La température d'un objet sortant du four suit $T(t) = 20 + 60 \cdot 0,9^t$ (T en °C, t en minutes, 20°C étant la température ambiante). Après combien de minutes la température descend-elle sous 25°C ?

Exercice 5.20. Soient $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 3 \cdot (1,5)^x$.

- a) Calculer $f(0)$ et $g(0)$. Laquelle des deux courbes est « au-dessus » de l'autre en $x = 0$?
- b) Même question en $x = 4$.
- c) Que peut-on en déduire ?

5.7 Résumé du chapitre

Fonction exponentielle a^x

- $a > 1$: croissante ; $0 < a < 1$: décroissante
- $f(x) > 0$ toujours, $f(0) = 1$, asymptote horizontale $y = 0$

Équations exponentielles

- Ramener à une base commune : $a^u = a^v \iff u = v$ (par injectivité de $x \mapsto a^x$)

Modélisation

- Croissance : $N(t) = N_0 a^t$ ($a > 1$) ou $Q(t) = Q_0(1 + T)^t$
- Décroissance : $N(t) = N_0 a^t$ ($0 < a < 1$) ou $Q(t) = Q_0(1 - T)^t$
- Intérêt composé (n périodes/an) : $C(t) = C_0 \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$

MA2

- Intérêt composé continu : $C(t) = C_0 e^{it}$
 - Loi de croissance/décroissance continue : $q(t) = q_0 e^{Tt}$
 - $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ quand $n \rightarrow +\infty$
 - L'exponentielle l'emporte toujours sur tout polynôme ($\frac{x^n}{a^x} \rightarrow 0$), même si le croisement peut être numériquement tardif
-

5.8 QCM — Fonctions exponentielles

Une seule réponse correcte par question.

1. $2^3 \cdot 4^2$ est égal à :

- a) 2^7
- b) 2^8
- c) 8^5
- d) 6^5

2. La solution de $3^x = 81$ est :

- a) $x = 3$
- b) $x = 4$
- c) $x = 27$
- d) $x = \frac{1}{4}$

3. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ est :

- a) Croissante et positive
- b) Décroissante et positive
- c) Croissante et négative
- d) Décroissante et négative

4. L'asymptote horizontale de $f(x) = 2^x + 3$ est :

- a) $y = 0$
- b) $y = 2$
- c) $y = 3$
- d) $y = 5$

5. Une population double tous les 5 ans. Après 15 ans à partir de 100 individus :

- a) 600
- b) 800
- c) 300
- d) 1000

6. $(e^2)^3 \cdot e^{-4}$ vaut :

- a) e^2
- b) e^{-6}
- c) e^{10}
- d) e^{-2}

7. La solution de $5^{2x-1} = 125$ est :

- a) $x = 1$
- b) $x = 2$
- c) $x = \frac{3}{2}$
- d) $x = \frac{2}{3}$

8. $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$ sont :

- a) L'une l'inverse de l'autre
- b) Symétriques par rapport à l'axe des y
- c) Égales
- d) Perpendiculaires

9. Pour résoudre $a^u = a^v$ (même base), on utilise :

- a) la symétrie
- b) l'injectivité de $x \mapsto a^x$
- c) la parité
- d) aucune des réponses

10. Une machine perd 15% de sa valeur chaque année; le modèle est :

- a) $Q_0(1,15)^t$
- b) $Q_0(0,15)^t$
- c) $Q_0(0,85)^t$
- d) $Q_0 - 0,15t$

11. Pour l'intérêt composé à n périodes par an, la formule est :

- a) $C_0(1+i)^t$
- b) $C_0\left(1 + \frac{i}{n}\right)^t$
- c) $C_0\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$
- d) C_0e^{it}

12. L'intérêt composé continu correspond à :

- a) $n = 1$
- b) $n \rightarrow +\infty$
- c) $n = 12$
- d) $i = 0$

13. Quand $n \rightarrow +\infty$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers :

- a) 1
- b) e
- c) 0
- d) $+\infty$

14. La loi de croissance continue s'écrit :

- a) $q_0 \cdot a^t$
- b) $q_0(1 + T)^t$
- c) $q_0 \cdot e^{Tt}$
- d) $q_0 \cdot Tt$

15. La solution de $2^x > 16$ est :

- a) $x > 4$
- b) $x < 4$
- c) $x > 16$
- d) $x \geq 4$

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x}$ vaut :

- a) $+\infty$
- b) 1
- c) 0
- d) n'existe pas

17. 5000 CHF à 6% annuel capitalisé trimestriellement pendant 3 ans donnent environ :

- a) 5900
- b) 5978
- c) 6000
- d) 6200

Réponses : 1-a 2-b 3-b 4-c 5-b 6-a 7-b 8-b 9-b 10-c 11-c 12-b 13-b
14-c 15-a 16-c 17-b

5.9 Corrigés

Solution 5.1.

- a) $2^{3+5-4} = 2^4 = 16.$
- b) $3^{6-4} = 3^2 = 9.$
- c) $2^3 = 8.$
- d) $\left(\frac{6}{2 \cdot 3}\right)^{10} = 1^{10} = 1.$

Solution 5.2.

a) $2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5.$

b) $3^{2x-1} = 3^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2.$

c) $2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

Solution 5.3.

a) $N(24) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{24/8} = 200 \cdot \frac{1}{8} = 25 \text{ g.}$

b) $200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8} < 10 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8} < \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2^{t/8}} < \frac{1}{20} \Rightarrow 2^{t/8} > 20. t/8 > \log_2 20 \approx 4,32;$
 $t > 34,6 \text{ jours.}$

Solution 5.4.

f : croissante, $f(0) = 1$, AH : $y = 0$. g : décroissante, $g(0) = 1$, AH : $y = 0$. h : croissante, $h(0) = 2$, AH : $y = -1$.

Solution 5.5.

a) $C(10) = 1000 \cdot 1,03^{10} \approx 1344 \text{ CHF. } C(20) \approx 1806 \text{ CHF.}$

b) $1,03^t = 2$; par essais : $1,03^{23} \approx 1,97$ et $1,03^{24} \approx 2,03$. Doublement vers $t \approx 23\text{--}24 \text{ ans.}$

Solution 5.6.

$8 = 2^3, 32 = 2^5 : 2^{3(2x-1)} = 2^{5(x+2)} \Leftrightarrow 6x - 3 = 5x + 10 \Leftrightarrow x = 13.$

Solution 5.7.

$\frac{1}{3} = 3^{-1}, 9 = 3^2 : 3^{-(5-x)} = 3^{2 \cdot 2x} \Leftrightarrow x - 5 = 4x \Leftrightarrow -3x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}.$

Solution 5.8.

a) $Q(t) = 200\,000 \cdot (1,015)^t.$

b) $Q(10) = 200\,000 \cdot 1,015^{10} \approx 232\,108 \text{ habitants.}$

Solution 5.9.

$Q(t) = 80\,000 \cdot (1 - 0,15)^t = 80\,000 \cdot 0,85^t.$

$Q(6) = 80\,000 \cdot 0,85^6 \approx 30\,172 \text{ CHF.}$

Solution 5.10.

$n = 4, i = 0,06, t = 3 :$

$$C(3) = 5000 \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{4 \cdot 3} \approx 5978 \text{ CHF.}$$

Solution 5.11.

$$C_0 = \frac{3000}{\left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12 \cdot 5}} \approx 2457 \text{ CHF.}$$

Solution 5.12.

$$C(8) = 2000 e^{0,035 \cdot 8} \approx 2646 \text{ CHF.}$$

Solution 5.13.

n	1	4	12	365	continu
$C(1)$	1080,00	1082,43	1083,00	1083,28	1083,29

Les valeurs **augmentent** avec n mais se **stabilisent** très vite : elles convergent vers la valeur donnée par l'intérêt composé continu, $1000 e^{0,08} \approx 1083,29$. C'est exactement la limite $\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n \rightarrow e^i$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Solution 5.14.

$$q(15) = 500\,000 \cdot e^{0,012 \cdot 15} \approx 598\,609 \text{ habitants.}$$

Solution 5.15.

- a) 3^x est croissante (base > 1) et le facteur $2 > 0$ ne change pas le sens de variation : f est croissante.
- b) $f(0) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$. Comme $3^x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -5$: asymptote $y = -5$.

Solution 5.16.

- a) $a^{50} = 0,3 \Rightarrow a = 0,3^{1/50} \approx 0,9762$.
- b) Demi-vie $T_{1/2} : a^{T_{1/2}} = 0,5 \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 0,5}{\ln a} \approx 28,8$ jours.

Solution 5.17.

- a) x^{10} dépasse largement 2^x jusqu'à $x = 50$ (par exemple $50^{10} \approx 9,8 \times 10^{16}$ contre $2^{50} \approx 1,1 \times 10^{15}$) ; ce n'est qu'à partir de $x = 100$ que 2^{100} devient supérieur à 100^{10} .
- b) Non : la limite affirme seulement que $\frac{x^{10}}{2^x} \rightarrow 0$, c'est-à-dire que l'exponentielle finit **toujours** par l'emporter — mais rien n'empêche que cela prenne longtemps. Ici, le croisement a lieu entre $x = 50$ et $x = 100$.

Solution 5.18.

$2^x > 2^4$; comme $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante, $2^x > 2^4 \iff x > 4$.
 $S =]4, +\infty[$.

Solution 5.19.

$$20 + 60 \cdot 0,9^t < 25 \iff 0,9^t < \frac{1}{12}.$$

Par essais successifs (ou calculatrice) : $0,9^{23} \approx 0,089$ et $0,9^{24} \approx 0,080$, et $\frac{1}{12} \approx 0,083$; le seuil est franchi vers $t \approx 23,6$ minutes.

Solution 5.20.

- a) $f(0) = 1, g(0) = 3$: g est au-dessus de f .
- b) $f(4) = 16, g(4) = 3 \cdot 1,5^4 = 15,1875$: f est désormais au-dessus de g .
- c) Les deux courbes se croisent quelque part entre $x = 0$ et $x = 4$: f , de base plus grande ($2 > 1,5$), finit par «rattraper puis dépasser» g , malgré son désavantage de départ ($f(0) < g(0)$).

Chapitre 6

Fonctions composées et réciproques

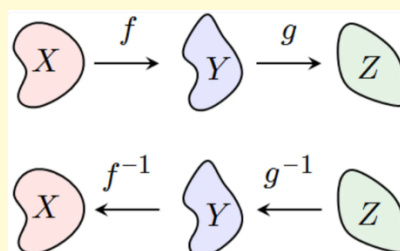
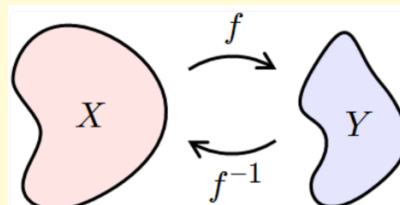
Mettre des chaussettes, puis des chaussures.

Pour défaire : enlever les chaussures, puis les chaussettes. Dans l'ordre inverse.

C'est exactement l'idée derrière la fonction réciproque : défaire ce qu'une fonction a fait, dans l'ordre inverse.

Si f encode un message secret, f^{-1} le décode. Si f élève au carré, f^{-1} extrait la racine carrée.

Toute la cryptographie moderne repose sur le fait que certaines fonctions sont très faciles à calculer dans un sens — et pratiquement impossibles à inverser.



6.1 Opérations sur les fonctions

Définition 6.1 — somme, différence, produit, quotient.

Soient f et g deux fonctions réelles.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Proposition 6.2 — domaines.

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g.$$

$$D_{f/g} = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \text{ (on retire aussi les zéros de } g).$$

Exemple 6.1. $f(x) = \sqrt{x}$ ($D_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$) et $g(x) = x^2 - 4$ ($D_g = \mathbb{R}$).

$(f + g)(x) = \sqrt{x} + x^2 - 4, D_{f+g} = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}$; comme $g(2) = 0$ et $2 \in D_f \cap D_g$, on exclut 2 : $D_{f/g} = \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{2\}$
 $(-2 \notin D_f, \text{ donc pas besoin de l'exclure séparément})$.

6.2 Composition de fonctions

Définition 6.3 — fonction composée.

Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. La **composée** $g \circ f$ est la fonction :

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

On lit « g rond f » ou « g après f ».

Remarque 6.1. En général, $g \circ f \neq f \circ g$. La composition n'est pas commutative.

Exemple 6.2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$. $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 + 1$. $(f \circ g)(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Proposition 6.4 — domaine d'une fonction composée.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Autrement dit : x doit d'abord être dans le domaine de f , **et** son image $f(x)$ doit ensuite tomber dans le domaine de g . Ce domaine peut être plus restreint que D_f lui-même.

Exemple 6.3. $f(x) = x^2 - 3x$ ($D_f = \mathbb{R}$) et $g(x) = \sqrt{x + 2}$ ($D_g = [-2, +\infty[$).

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; il faut $f(x) = x^2 - 3x \in D_g$, c'est-à-dire $x^2 - 3x \geq -2 \iff x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff (x - 1)(x - 2) \geq 0$.

$D_{g \circ f} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ — un sous-ensemble strict de $D_f = \mathbb{R}$!

6.3 Décomposition de fonctions

Proposition 6.5 — méthode.

Pour décomposer h en $h = g \circ f$: repérer la **dernière** opération effectuée sur x — c'est g ; ce qui reste — c'est f .

Exemple 6.4. $h(x) = \frac{1}{x - 3}$: on soustrait 3 (action de f), puis on prend l'inverse (action de g) : $f(x) = x - 3, g(x) = \frac{1}{x}$.

Exemple 6.5. $z(x) = x^2 + 2x - 3$ se décompose en **trois** fonctions élémentaires $w \circ v \circ u$: $u(x) = x + 1$ (on ajoute 1), $v(x) = x^2$ (on élève au carré), $w(x) = x - 4$ (on soustrait 4).

Vérification : $(w \circ v \circ u)(x) = w(v(u(x))) = w((x + 1)^2) = (x + 1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3$. ✓

6.4 Fonction réciproque

Définition 6.6 — fonction bijective.

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est **bijjective** si :

- **Injective** : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (pas deux antécédents distincts pour une même image)
- **Surjective** : tout $y \in B$ a au moins un antécédent

Définition 6.7 — fonction réciproque.

Si $f : A \rightarrow B$ est bijective, sa **fonction réciproque** $f^{-1} : B \rightarrow A$ est définie par :

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Proposition 6.8 — propriétés.

- $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ (i.e. $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in A$)
- $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$
- Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $y = x$

Exemple 6.6. $f(x) = 2x + 3$: résoudre $y = 2x + 3 : x = \frac{y-3}{2}$, donc $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

Vérification : $f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x$. ✓

6.5 Construction de la réciproque

Méthode :

1. Écrire $y = f(x)$
2. Exprimer x en fonction de y
3. Renommer : $f^{-1}(x) = \dots$
4. Vérifier le domaine de f^{-1}

Remarque 6.2. Une fonction strictement monotone sur un intervalle est bijective sur cet intervalle — donc elle y admet une réciproque.

Proposition 6.9 — restreindre pour rendre bijective.

Si f n'est pas bijective sur son domaine naturel (typiquement, une parabole, symétrique par rapport à son axe), on peut **restreindre** l'ensemble de départ (souvent au sommet et au-delà) et l'ensemble d'arrivée (à l'ensemble image), pour obtenir une fonction bijective — et donc inversible.

Exemple 6.7. $f(x) = x^2 - 3$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ ($f(2) = f(-2) = 1$).

En restreignant $f : [0, +\infty[\rightarrow [-3, +\infty[$, f devient bijective : $y = x^2 - 3 \iff x = \sqrt{y+3}$ (on choisit la racine positive, cohérente avec le départ restreint à $[0, +\infty[$).

$$f^{-1} : [-3, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

Critère de bijectivité. f est bijective $\iff$ toute droite horizontale coupe le graphe exactement en un point. Pour $f(x) = x^2$: pas bijective sur $\mathbb{R}$ (la droite $y = 4$ coupe en $x = \pm 2$). Mais bijective sur $[0, +\infty)$ avec réciproque $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

6.6 Exercices

Exercice 6.1. Soient $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2$. Calculer :

- a) $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$
- b) $(g \circ f)(2)$
- c) $(f \circ f)(x)$

Exercice 6.2. Trouver la réciproque :

- a) $f(x) = 5x - 2$
- b) $g(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad (x \neq 1)$
- c) $h(x) = \sqrt{x+3} \quad (x \geq -3)$

Exercice 6.3. Soit $f(x) = 2^x$.

- a) Le point $(3, 8)$ est-il sur le graphe de f ?
- b) Quel point du graphe de f^{-1} correspond à $(3, 8)$?
- c) Que vaut $f^{-1}(8)$?

Exercice 6.4. Décomposer $h(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$ en composée de deux fonctions simples f et g telles que $h = g \circ f$.

Exercice 6.5. La fonction $f(x) = x^2 - 4x + 5$ est-elle bijective sur $\mathbb{R}$? Sur quel intervalle est-elle bijective ? Trouver sa réciproque sur cet intervalle.

Exercice 6.6. Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - 4$.

- a) Donner D_f et D_g .
- b) Calculer $(f + g)(x)$ et son domaine.

c) Calculer $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ et son domaine.

Exercice 6.7. Soient $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$. Déterminer $(g \circ f)(x)$ et son domaine $D_{g \circ f}$.

Exercice 6.8. Décomposer $z(x) = (2x-1)^2 + 5$ en trois fonctions élémentaires u, v, w telles que $z = w \circ v \circ u$.

Exercice 6.9. La fonction $f(x) = x^2 - 1$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.

- Justifier en donnant un exemple concret de deux antécédents distincts pour une même image.
- Restreindre D_f et l'ensemble d'arrivée pour rendre f bijective, puis donner f^{-1} .

Exercice 6.10. Déterminer la réciproque de $f(x) = \frac{3x+2}{2x-5}$ ($x \neq \frac{5}{2}$), en précisant son domaine.

Exercice 6.11. La conversion Celsius–Fahrenheit est donnée par $F = f(C) = \frac{9}{5}C + 32$.

- Calculer $f(20)$.
- Déterminer f^{-1} (la conversion Fahrenheit vers Celsius).
- Vérifier que $f^{-1}(f(20)) = 20$.

Exercice 6.12. La distance de freinage (en m) à la vitesse v (en km/h) est $d = f(v) = \frac{v}{10} \left(\frac{v}{10} + 3 \right)$.

- Calculer $f(30)$, $f(50)$ et $f(100)$.
- Déterminer la fonction réciproque g exprimant v en fonction de d (pour $v \geq 0$).
- Vérifier que $g(18) = 30$.

Exercice 6.13. Pour chacune des fonctions suivantes (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), dire si elle est bijective; si non, indiquer pourquoi :

- $f(x) = 3x - 7$
- $g(x) = x^2 - 9$
- $h(x) = |x|$

Exercice 6.14. Une fonction f telle que $f \circ f = \text{id}$ (c'est-à-dire $f(f(x)) = x$ pour tout x du domaine) est dite **involutive** : elle est sa propre réciproque. Montrer que $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ($x \neq 1$) est involutive.

Exercice 6.15. Une entreprise annonce une augmentation de 50.- suivie d'une augmentation de 3%. Certains salariés se demandent s'il vaudrait mieux intervertir l'ordre.

- Soit x le salaire. Donner $f_1(x)$ (augmentation de 50.-) et $f_2(x)$ (augmentation de 3%).
- Calculer $(f_2 \circ f_1)(x)$ (d'abord +50, puis +3%) et $(f_1 \circ f_2)(x)$ (d'abord +3%, puis +50).
- Laquelle des deux options est la plus avantageuse pour le salarié ? Que peut-on en conclure quant à l'ordre de composition ?

Exercice 6.16. Soient $f(x) = x + 2$ et $g(x) = \frac{1}{x-3}$. Calculer $(f \cdot g)(x)$ et donner son domaine.

Exercice 6.17. Soient $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x - 2$. Calculer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$, et donner leurs domaines respectifs. Commenter.

Exercice 6.18. Décomposer $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ en trois fonctions élémentaires u, v, w telles que $h = w \circ v \circ u$.

Exercice 6.19. Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

- Mettre f sous forme canonique et donner son sommet.
- Restreindre D_f et l'ensemble d'arrivée pour rendre f bijective (en choisissant la branche de gauche du sommet), puis donner f^{-1} .

Exercice 6.20. Un bureau de change applique le taux $E(x) = 0,92x$ pour convertir x CHF en EUR.

- Calculer $E(100)$.
- Déterminer E^{-1} (conversion EUR vers CHF).
- Vérifier que $E^{-1}(E(100)) = 100$.

6.7 Résumé du chapitre

Opérations sur les fonctions

- $D_{f \pm g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$; $D_{f/g} = (D_f \cap D_g) \setminus \{g = 0\}$

Composition

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; en général $g \circ f \neq f \circ g$
- Domaine : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ — peut être plus restreint que D_f
- Décomposer : repérer la **dernière** opération effectuée

Bijektivité et réciproque

- Bijective : injective (pas deux antécédents pour une même image) + surjective (tout élément d'arrivée a un antécédent)
 - $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$; $f^{-1} \circ f = \text{id}$, $f \circ f^{-1} = \text{id}$
 - Graphe de f^{-1} : symétrique de celui de f par rapport à $y = x$
 - Si f n'est pas bijective, on **restreint** départ et arrivée (ex. parabole : se limiter à un côté du sommet)
 - MA2 : test de la droite horizontale pour la bijectivité
-

6.8 QCM — Fonctions composées et réciproques

Une seule réponse correcte par question.

1. Avec $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$, $(g \circ f)(2)$ vaut :

- a) 5
- b) 9
- c) 6
- d) 3

2. La réciproque de $f(x) = \frac{x+2}{3}$ est :

- a) $3x + 2$
- b) $3x - 2$
- c) $\frac{3}{x+2}$
- d) $\frac{x-2}{3}$

3. Le graphe de f^{-1} est obtenu depuis celui de f par :

- a) Symétrie par rapport à l'axe des x
- b) Symétrie par rapport à l'axe des y
- c) Symétrie par rapport à $y = x$
- d) Translation de vecteur $(1, 1)$

4. $f(x) = x^2$ est bijective sur :

- a) $\mathbb{R}$
- b) $(-\infty, 0]$
- c) $[0, +\infty)$
- d) $[-1, 1]$

5. Si $f^{-1}(3) = 7$, alors :

- a) $f(3) = 7$
- b) $f(7) = 3$
- c) $f(3) = \frac{1}{7}$
- d) $f(7) = \frac{1}{3}$

6. $(f \circ g)(x)$ signifie :

- a) Appliquer f puis g
- b) Appliquer g puis f
- c) $f(x) \cdot g(x)$
- d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

7. La réciproque de $f(x) = e^x$ est :
- e^{-x}
 - $\ln x$
 - $\frac{1}{e^x}$
 - x^e
8. Une fonction strictement décroissante est :
- Jamais bijective
 - Toujours bijective sur son domaine
 - Bijective seulement si son domaine est $\mathbb{R}$
 - Bijective seulement si elle est continue
9. $D_{f/g}$ (sur $D_f \cap D_g$) exclut :
- les zéros de f
 - les zéros de g
 - rien de plus
 - tout D_g
10. Pour $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$, $D_{g \circ f}$ est :
- $\mathbb{R}$
 - un sous-ensemble strict de $\mathbb{R}$, défini par $x^2 - 3x \geq -2$
 - vide
 - $[-2, +\infty[$
11. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ vérifie $f \circ f = \text{id}$: f est dite :
- bijective seulement
 - involutive
 - paire
 - impossible
12. En restreignant $f(x) = x^2 - 1$ à $[0, +\infty[$, sa réciproque est :
- $\sqrt{x-1}$
 - $\sqrt{x+1}$
 - $x^2 + 1$
 - $-\sqrt{x+1}$
13. Dans l'exemple d'une augmentation de 50.- combinée à 3%, l'ordre le plus avantageux pour le salarié est :
- +3% d'abord
 - +50.- d'abord
 - identique
 - dépend du salaire de départ

14. D_{f+g} vaut :

- a) $D_f \cup D_g$
- b) $D_f \cap D_g$
- c) $D_f \setminus D_g$
- d) $\mathbb{R}$ toujours

15. Pour décomposer $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$, la **dernière** opération effectuée est :

- a) la racine carrée
- b) l'addition de 1
- c) l'inverse ($1/x$)
- d) le carré

16. Si $f : A \rightarrow B$ est bijective et $f(3) = 7$, alors $f^{-1}(7)$ vaut :

- a) 3
- b) $\frac{1}{7}$
- c) -3
- d) indéterminé

17. Le domaine d'une fonction composée $g \circ f$ peut être :

- a) toujours égal à D_f
- b) plus restreint que D_f
- c) toujours $\mathbb{R}$
- d) toujours vide

18. Pour rendre une parabole bijective, on restreint généralement :

- a) au sommet et au-delà (une seule branche)
- b) à l'origine
- c) à un intervalle borné arbitraire
- d) c'est impossible

Réponses : 1-b 2-b 3-c 4-c 5-b 6-b 7-b 8-b 9-b 10-b 11-b 12-b 13-b
14-b 15-c 16-a 17-b 18-a

6.9 Corrigés

Solution 6.1.

- a) $(g \circ f)(x) = (3x - 1)^2 + 2 = 9x^2 - 6x + 3$. $(f \circ g)(x) = 3(x^2 + 2) - 1 = 3x^2 + 5$.
- b) $(g \circ f)(2) = 9(4) - 12 + 3 = 27$.
- c) $(f \circ f)(x) = 3(3x - 1) - 1 = 9x - 4$.

Solution 6.2.

$$\text{a) } y = 5x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{5}; f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}.$$

$$\text{b) } y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = x+1 \Rightarrow x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}; g^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ (la fonction est sa propre réciproque!).}$$

$$\text{c) } y = \sqrt{x+3} \Rightarrow x = y^2 - 3 \text{ (pour } y \geq 0); h^{-1}(x) = x^2 - 3, x \geq 0.$$

Solution 6.3.

$$\text{a) } f(3) = 8 : \text{oui.}$$

$$\text{b) Par symétrie : } (8, 3) \text{ est sur le graphe de } f^{-1}.$$

$$\text{c) } f^{-1}(8) = 3 \text{ (car } 2^3 = 8). (f^{-1} = \log_2.)$$

Solution 6.4.

$$f(x) = 3x^2 - 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x}. (g \circ f)(x) = \sqrt{3x^2 - 1} = h(x). \checkmark$$

Solution 6.5.

Forme canonique : $f(x) = (x-2)^2 + 1$. Non bijective sur $\mathbb{R}$ (symétrique par rapport à $x = 2$). Bijective sur $[2, +\infty)$. $y = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow x-2 = \sqrt{y-1} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y-1}$;
 $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1}, x \geq 1$.

Solution 6.6.

$$\text{a) } D_f = \mathbb{R}_{\geq 0}; D_g = \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } (f+g)(x) = \sqrt{x} + x^2 - 4; D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

$$\text{c) } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}; g(2) = 0 \text{ et } 2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \text{on l'exclut}; g(-2) = 0 \text{ mais } -2 \notin D_f, \text{ pas besoin de l'exclure séparément. } D_{f/g} = \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{2\}.$$

Solution 6.7.

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{Il faut } f(x) \geq -2 \iff x^2 - 3x + 2 \geq 0 \iff (x-1)(x-2) \geq 0.$$

$$D_{g \circ f} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[.$$

Solution 6.8.

$u(x) = 2x-1$ (multiplier par 2, soustraire 1), $v(x) = x^2$ (élever au carré), $w(x) = x+5$ (ajouter 5).

$$(w \circ v \circ u)(x) = w(v(2x-1)) = w((2x-1)^2) = (2x-1)^2 + 5 = z(x). \checkmark$$

Solution 6.9.

- a) $f(3) = f(-3) = 8$: deux antécédents (3 et -3) pour la même image 8.
- b) $f : [0, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[$ est bijective. $y = x^2 - 1 \iff x = \sqrt{y+1}$ (racine positive, cohérent avec le départ restreint); $f^{-1} : [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$,
 $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$.

Solution 6.10.

$$y = \frac{3x+2}{2x-5} \Rightarrow y(2x-5) = 3x+2 \Rightarrow 2xy-5y = 3x+2 \Rightarrow x(2y-3) = 5y+2 \Rightarrow x = \frac{5y+2}{2y-3}.$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x+2}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}.$$

Solution 6.11.

- a) $f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68.$
- b) $F = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow C = \frac{5}{9}(F - 32); f^{-1}(F) = \frac{5}{9}(F - 32).$
- c) $f^{-1}(68) = \frac{5}{9}(68 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 36 = 20. \checkmark$

Solution 6.12.

- a) $f(30) = 3(3+3) = 18; f(50) = 5(5+3) = 40; f(100) = 10(10+3) = 130.$
- b) $d = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} \iff v^2 + 30v - 100d = 0$; par la formule quadratique (racine positive retenue car $v \geq 0$) :

$$v = g(d) = -15 + \sqrt{225 + 100d}.$$

- c) $g(18) = -15 + \sqrt{225 + 1800} = -15 + \sqrt{2025} = -15 + 45 = 30. \checkmark$

Solution 6.13.

- a) Bijective : droite oblique, chaque droite horizontale la coupe en exactement un point.
- b) Non bijective : $g(3) = g(-3) = 0$ (parabole, symétrique).
- c) Non bijective : $h(2) = h(-2) = 2$ (même raison : pas injective).

Solution 6.14.

$$f(f(x)) = \frac{f(x) + 1}{f(x) - 1} = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{(x+1)+(x-1)}{x-1}}{\frac{(x+1)-(x-1)}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x.$$

Donc $f \circ f = \text{id}$: f est involutive, et $f^{-1} = f$. □

Solution 6.15.

a) $f_1(x) = x + 50$; $f_2(x) = 1,03x$.

b) $(f_2 \circ f_1)(x) = 1,03(x + 50) = 1,03x + 51,5$.

$(f_1 \circ f_2)(x) = 1,03x + 50$.

c) $(f_2 \circ f_1)(x) - (f_1 \circ f_2)(x) = 1,5 > 0$ pour tout x : l'ordre « +50 d'abord, puis +3% » est toujours plus avantageux (de 1,5.- exactement, car les 50.- profitent aussi des 3%). Ceci confirme concrètement que $g \circ f \neq f \circ g$ en général : l'ordre de composition compte.

Solution 6.16.

$$(f \cdot g)(x) = \frac{x+2}{x-3}; D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\};$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$$

Solution 6.17.

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x-2}; D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x} - 2; D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Non seulement $f \circ g \neq g \circ f$ comme expressions, mais leurs domaines sont également différents : encore une illustration que l'ordre de composition compte, y compris au niveau du domaine.

Solution 6.18.

$$u(x) = \sqrt{x} \text{ (racine)}, v(x) = x + 1 \text{ (ajouter 1)}, w(x) = \frac{1}{x} \text{ (inverse)}.$$

$$(w \circ v \circ u)(x) = w(v(\sqrt{x})) = w(\sqrt{x} + 1) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = h(x). \checkmark$$

Solution 6.19.

a) $f(x) = -(x-2)^2 + 3$; sommet $(2, 3)$.

b) $f :]-\infty, 2] \rightarrow]-\infty, 3]$ est bijective. $y = -(x-2)^2 + 3 \iff (x-2)^2 = 3-y \iff x = 2 - \sqrt{3-y}$ (racine soustraite, cohérent avec $x \leq 2$);
 $f^{-1} :]-\infty, 3] \rightarrow]-\infty, 2]$, $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{3-x}$.

Solution 6.20.

a) $E(100) = 0,92 \cdot 100 = 92 \text{ EUR.}$

b) $y = 0,92x \iff x = \frac{y}{0,92}; E^{-1}(y) = \frac{y}{0,92}.$

c) $E^{-1}(92) = \frac{92}{0,92} = 100. \checkmark$

Chapitre 7

Fonctions logarithmiques

Édimbourg, 1614. John Napier publie sa *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* — la description du merveilleux canon des logarithmes.

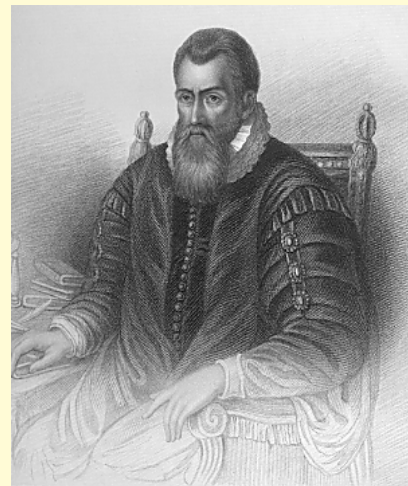
Son invention : remplacer les multiplications par des additions. $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$.

Pour les astronomes de l'époque, qui calculaient à la main des tables de positions planétaires, c'était une révolution.

L'invention des logarithmes par John Napier (Neper) a reçu cet éloge célèbre de Pierre-Simon de Laplace : "L'invention des logarithmes, en abrégant les labeurs, a pour ainsi dire doublé la vie des astronomes."

Johannes Kepler, astronome allemand, a dédié ses *Éphémérides*, 1620, à John Napier. Admiratif il voulu saluer l'immense utilité des logarithmes qui ont allégé ses propres calculs astronomiques.

Aujourd'hui, les logarithmes sont partout : les décibels, le pH, l'échelle de Richter, la perception du son, la complexité des algorithmes. Napier ne pouvait pas imaginer tout cela.



7.1 Définition

Définition 7.1 — *logarithme de base a .*

Pour $a > 0$, $a \neq 1$, le **logarithme de base a** est la réciproque de $x \mapsto a^x$:

$$\log_a x = y \iff a^y = x, \quad x > 0.$$

Définition 7.2 — *logarithme naturel.*

Le **logarithme naturel** (ou népérien) est :

$$\ln x = \log_e x, \quad x > 0.$$

Le **logarithme décimal** est $\log_{10} x$, noté $\log x$ en pratique.

Exemple 7.1. Construction de $\log_2$ comme réciproque. $f(x) = 2^x$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (son ensemble image est $\mathbb{R}_{>0}$, pas $\mathbb{R}$ tout entier), mais $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ l'est. Sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ est exactement $\log_2$: par exemple, $f(3) = 8$ donne $\log_2(8) = 3$.

7.2 Propriétés algébriques

Théorème 7.3 — *propriétés fondamentales.*

Pour $a > 0$, $a \neq 1$:

1. $\log_a a = 1$ et $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a(a^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
3. $a^{\log_a x} = x$ pour tout $x > 0$
4. $\log_a x = \log_a y \iff x = y$ (pour $x, y > 0$) — le logarithme est **injectif**

Théorème 7.4 — *propriétés algébriques.*

Pour $x, y > 0$ et $r \in \mathbb{R}$:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a x.$$

Remarque 7.1. Attention à deux pièges fréquents :

- $\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$ en général (il n'y a **pas** de règle simple pour la somme à l'intérieur du logarithme);
- $\log(x^2)$ n'est **pas** toujours égal à $2 \log(x)$: la propriété $\log_a(x^r) = r \log_a x$ suppose $x > 0$. Par exemple, pour $x = -3$, $\log((-3)^2) = \log(9)$ existe, mais $2 \log(-3)$ n'existe pas.

Proposition 7.5 — changement de base.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a}.$$

7.3 Graphe et propriétés**Proposition 7.6 — propriétés de $\ln$.**

- Domaine : $(0, +\infty)$
- $\ln$ est strictement croissante
- $\ln x < 0$ pour $x \in (0, 1)$, $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ pour $x > 1$
- $\ln x \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ (asymptote verticale $x = 0$)
- $\ln x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ (mais lentement)

Proposition 7.7 — relations $\ln$ et $\exp$.

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \quad \ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7.4 Équations et inéquations**Proposition 7.8 — méthode — équation logarithmique.**

1. Déterminer le **domaine** de l'équation.
2. Transformer jusqu'à obtenir la forme $\log_a(\text{expr}_1) = \log_a(\text{expr}_2)$ (même base), en utilisant les propriétés algébriques.
3. En déduire $\text{expr}_1 = \text{expr}_2$ (injectivité).
4. Résoudre cette équation.
5. **Rejeter** les solutions hors du domaine.

Exemple 7.2. Résoudre $\log_5(x-2) + \log_5(x+2) = 1$.

Domaine : $x-2 > 0$ et $x+2 > 0 \iff x > 2$.

$$\log_5((x-2)(x+2)) = \log_5(5) \iff (x-2)(x+2) = 5 \iff x^2 - 4 = 5 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3.$$

Seul $x = 3$ appartient au domaine $x > 2$: $S = \{3\}$.

Proposition 7.9 — méthode — équation exponentielle.

1. Prendre le logarithme des deux membres.
2. Utiliser $\log_a(x^r) = r \log_a x$ pour faire descendre l'exposant.
3. Isoler x .

Exemple 7.3. Résoudre $\ln(2x - 1) = 3 : 2x - 1 = e^3 \Rightarrow x = \frac{e^3 + 1}{2}$.
 Résoudre $2^x = 5 : x \ln 2 = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,32$.

Échelles logarithmiques. La perception humaine de l'intensité sonore est logarithmique : une augmentation de 10 dB correspond à une multiplication de l'intensité par 10. L'échelle de Richter est logarithmique : un séisme de magnitude 7 libère 10 fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 6. Le pH est $-\log_{10}[H^+]$: une différence d'une unité = facteur 10 de concentration.

7.5 Exercices

Exercice 7.1. Calculer sans calculatrice :

- a) $\log_2 32$
- b) $\log_3 \frac{1}{9}$
- c) $\ln e^5$
- d) $e^{\ln 7}$

Exercice 7.2. Simplifier :

- a) $\ln(e^2 \cdot e^3)$
- b) $\log\left(\frac{100}{x^2}\right)$
- c) $2 \ln 3 - \ln 9 + \ln 1$

Exercice 7.3. Résoudre :

- a) $\ln x = 4$
- b) $e^{2x-1} = 5$
- c) $\log_2(x + 3) = 4$
- d) $3^x = 20$

Exercice 7.4. Résoudre $\ln(x^2 - 3) > \ln(2x)$ pour $x > 0$.

Exercice 7.5. Un capital de 5000 CHF est placé à 4% annuel composé. En combien d'années double-t-il ?

Exercice 7.6. Résoudre $\log_3(2x + 1) = \log_3(x + 7)$.

Exercice 7.7. Résoudre $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$.

Exercice 7.8. Résoudre $5^{x-1} = 12$ (valeur exacte puis approchée au centième).

Exercice 7.9. Résoudre $\log_4(x) + \log_4(x - 6) = 2$.

Exercice 7.10. Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a) $\log(u \cdot v) = \log(u) \cdot \log(v)$ pour $u, v > 0$.
- b) $\log(9 + 16) = \log(9) + \log(16)$.

Exercice 7.11. Calculer $\log_5(12)$ à l'aide du changement de base en logarithme décimal (valeur approchée au centième).

Exercice 7.12. L'échelle de Richter est donnée par $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

- a) Un séisme a une intensité 10 000 fois plus grande que I_0 . Calculer R .
- b) Exprimer I en fonction de R et I_0 .

Exercice 7.13. La loi de refroidissement de Newton donne $T(t) = 75e^{-2t}$ (T en $^{\circ}\text{C}$, t en heures). Après combien de temps la température atteint-elle 25°C ?

Exercice 7.14. Une ville comptait 50 000 habitants il y a 10 ans, et en compte aujourd'hui 68 000. On modélise la population par une croissance exponentielle continue $P(t) = P_0e^{Tt}$.

- a) Déterminer le taux de croissance annuel T .
- b) Estimer la population dans 10 ans (soit $t = 20$ depuis le début du modèle).
- c) Dans combien d'années la population atteindra-t-elle 100 000 habitants (depuis aujourd'hui) ?

Exercice 7.15. Les trois quarts des atomes radioactifs d'un échantillon se sont désintégrés en 12 000 ans.

- a) Quelle fraction de l'échantillon reste-t-il ?
- b) En déduire la demi-vie de cet échantillon (indication : combien de demi-vies successives correspondent à cette fraction restante ?).

Exercice 7.16. Soit $f(x) = 3^x$.

- a) Pourquoi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est-elle pas bijective ?
- b) Donner A et B (les plus grands possibles) pour que $f : A \rightarrow B$ soit bijective.
- c) Identifier la réciproque de f sur ce domaine, et vérifier que $f^{-1}(9) = 2$.

Exercice 7.17. Démontrer, à partir de la seule définition du logarithme et des propriétés des puissances, que pour $u, v > 0$ et $a > 0, a \neq 1$:

$$\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v).$$

Exercice 7.18. En utilisant le résultat de l'exercice 7.17 et le fait que $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v)$ (à admettre, ou à démontrer de la même façon en écrivant $\frac{1}{v} = v^{-1}$), démontrer que $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$.

Exercice 7.19. Démontrer la formule de changement de base $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ (pour $a, b > 0, a, b \neq 1, x > 0$).

Exercice 7.20. Le niveau sonore en décibels est $L = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

- Un son a une intensité 1000 fois plus grande que I_0 . Calculer L .
- Un autre son a un niveau de 30 dB de plus qu'un premier. Par quel facteur son intensité est-elle multipliée ?

7.6 Résumé du chapitre

Définition et propriétés fondamentales

- $\log_a x = y \iff a^y = x$ (réciproque de a^x)
- $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0, \log_a(a^x) = x, a^{\log_a x} = x$
- Injectivité : $\log_a x = \log_a y \iff x = y$

Propriétés algébriques

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y; \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y; \log_a(x^r) = r \log_a x$
- Attention : $\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$
- Changement de base : $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Équations

- Log. : domaine, ramener à $\log_a(\cdot) = \log_a(\cdot)$, injectivité, résoudre, **rejeter** hors domaine
- Exp. : prendre le log des deux membres, isoler x

MA2

- Démonstrations des propriétés produit/quotient/changement de base à partir de la seule définition
 - Échelles logarithmiques : décibels, Richter, pH (chaque unité = facteur 10)
-

7.7 QCM — Fonctions logarithmiques

Une seule réponse correcte par question.

1. $\log_3 81$ vaut :

- a) 3
- b) 4
- c) 27
- d) $\frac{1}{4}$

2. $\ln e^{-2}$ vaut :

- a) e^{-2}
- b) -2
- c) 2
- d) $\frac{1}{2}$

3. $\log 1000 + \log 0,01$ vaut :

- a) 5
- b) 3
- c) 1
- d) 2,98

4. La solution de $2^x = 10$ est :

- a) $\frac{\log 2}{\log 10}$
- b) $\frac{\ln 10}{\ln 2}$
- c) $\log 8$
- d) 5

5. Le domaine de $f(x) = \ln(3 - x)$ est :

- a) $\mathbb{R}$
- b) $(3, +\infty)$
- c) $(-\infty, 3)$
- d) $(-\infty, 3]$

6. $2 \ln 5 - \ln 25$ vaut :

- a) $\ln 10$
- b) $\ln(-15)$
- c) 0
- d) $\ln 5$

7. La solution de $\ln(x + 2) = 1$ est :

- a) $x = e - 2$
- b) $x = e + 2$
- c) $x = 1$
- d) $x = e^2 - 2$

8. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ est :

- a) Faux
- b) La formule de changement de base
- c) Vraie seulement pour $a = e$
- d) Vraie seulement pour $x > 1$

9. $\log_a(x) = \log_a(y)$ (pour $x, y > 0$) équivaut à :

- a) $x = a^y$
- b) $x = y$
- c) $x = 1$
- d) toujours vrai

10. $\log(9 + 16)$ et $\log(9) + \log(16)$ sont :

- a) égaux
- b) différents
- c) toujours égaux si $9, 16 > 0$
- d) impossible à dire

11. $\log_5(12)$, via changement de base en $\log_{10}$, s'écrit :

- a) $\log(12) - \log(5)$
- b) $\frac{\log(12)}{\log(5)}$
- c) $\log(12) \cdot \log(5)$
- d) $\log(60)$

12. Un séisme d'intensité $10\,000 I_0$ a pour magnitude de Richter :

- a) 10 000
- b) 4
- c) 40
- d) $\log(4)$

13. Si l'intensité sonore est multipliée par 1000, le niveau en décibels augmente de :

- a) 1000 dB
- b) 3 dB
- c) 30 dB
- d) 100 dB

14. Si $\frac{3}{4}$ des atomes radioactifs se sont désintégrés, il s'est écoulé :

- a) 1 demi-vie
- b) 1,5 demi-vie
- c) 2 demi-vies
- d) 3 demi-vies

15. La réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, f(x) = 3^x$, est :

- a) 3^{-x}
- b) $\log_3$
- c) $\frac{1}{3^x}$
- d) $x^{1/3}$

16. $\log(x^2)$ est égal à $2 \log(x)$:

- a) toujours
- b) seulement si $x > 0$
- c) jamais
- d) seulement si $x < 0$

Réponses : 1-b 2-b 3-c 4-b 5-c 6-c 7-a 8-b 9-b 10-b 11-b 12-b 13-c
14-c 15-b 16-b

7.8 Corrigés

Solution 7.1.

- a) $2^5 = 32 \Rightarrow \log_2 32 = 5.$
- b) $3^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2.$
- c) $\ln e^5 = 5.$
- d) $e^{\ln 7} = 7.$

Solution 7.2.

- a) $\ln e^5 = 5.$
- b) $\log 100 - 2 \log x = 2 - 2 \log x.$
- c) $\ln 9 - \ln 9 + 0 = 0.$

Solution 7.3.

a) $x = e^4$.

b) $2x - 1 = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5 + 1}{2}$.

c) $x + 3 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = 13$.

d) $x = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,73$.

Solution 7.4.

In croissante : $x^2 - 3 > 2x$ et domaine $x^2 - 3 > 0$, $2x > 0$. $x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) > 0$; pour $x > 0$: $x > 3$. Domaine : $x > \sqrt{3}$. Intersection : $x > 3$.

Solution 7.5.

$$5000 \cdot 1,04^t = 10000 \Rightarrow 1,04^t = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \approx \frac{0,693}{0,0392} \approx 17,7 \text{ ans.}$$

Solution 7.6.

Domaine : $2x + 1 > 0$ et $x + 7 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Par injectivité : $2x + 1 = x + 7 \Leftrightarrow x = 6$.

6 appartient au domaine : $S = \{6\}$.

Solution 7.7.

Domaine : $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

$$\log_2((x - 1)(x + 1)) = 3 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 2^3 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Seul $x = 3$ appartient au domaine $x > 1$: $S = \{3\}$.

Solution 7.8.

$$\log(5^{x-1}) = \log(12) \Leftrightarrow (x - 1) \log 5 = \log 12 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\log 12}{\log 5}.$$

$$x = 1 + \frac{\log 12}{\log 5} \approx 2,54.$$

Solution 7.9.

Domaine : $x > 0$ et $x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 6$.

$$\log_4(x(x - 6)) = 2 \Leftrightarrow x(x - 6) = 4^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 8)(x + 2) = 0; x = 8 \text{ ou } x = -2.$$

Seul $x = 8$ appartient au domaine $x > 6$: $S = \{8\}$.

Solution 7.10.

a) Faux. La bonne propriété est $\log(uv) = \log(u) + \log(v)$ (somme, pas produit). Contre-exemple : $u = v = 10$: $\log(100) = 2$, mais $\log(10) \cdot \log(10) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 2$.

b) Faux. $\log(25) \approx 1,40$, mais $\log(9) + \log(16) = \log(144) \approx 2,16$. Le logarithme d'une somme n'est pas la somme des logarithmes.

Solution 7.11.

$$\log_5(12) = \frac{\log(12)}{\log(5)} \approx 1,54.$$

Solution 7.12.

a) $R = \log(10\,000) = 4.$

b) $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \iff \frac{I}{I_0} = 10^R \iff I = I_0 \cdot 10^R.$

Solution 7.13.

$$75e^{-2t} = 25 \iff e^{-2t} = \frac{1}{3} \iff -2t = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3 \iff t = \frac{\ln 3}{2} \approx 0,55 \text{ heure.}$$

Solution 7.14.

a) $68\,000 = 50\,000 e^{10T} \iff e^{10T} = 1,36 \iff T = \frac{\ln 1,36}{10} \approx 0,0307$ (soit 3,07% par an).

b) $P(20) = 50\,000 e^{20 \cdot 0,0307} \approx 92\,480$ habitants.

c) On résout $50\,000 e^{Tt} = 100\,000$ depuis le début du modèle : $t = \frac{\ln 2}{T} \approx 22,5$ ans, soit environ 12,5 ans à partir d'aujourd'hui (qui correspond à $t = 10$).

Solution 7.15.

a) Il reste $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ de l'échantillon.

b) $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$: il s'est écoulé exactement **deux** demi-vies en 12 000 ans. Demi-vie : $\frac{12\,000}{2} = 6\,000$ ans.

Solution 7.16.

a) Son ensemble image est $\mathbb{R}_{>0}$, pas $\mathbb{R}$ tout entier : aucun réel négatif n'a d'antécédent, donc f n'est pas surjective sur $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

b) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}_{>0}.$

c) $f^{-1} = \log_3$. Vérification : $\log_3(9) = 2$ car $3^2 = 9$. ✓

Solution 7.17.

Posons $p = \log_a(u)$ et $q = \log_a(v)$, de sorte que $u = a^p$ et $v = a^q$ (par définition du logarithme).

Alors $uv = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (propriété des puissances).

Donc, par définition du logarithme, $\log_a(uv) = p + q = \log_a(u) + \log_a(v)$.

□

Solution 7.18.

$$\begin{aligned} \log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a\left(u \cdot \frac{1}{v}\right) = \log_a(u) + \log_a\left(\frac{1}{v}\right) \text{ (par la propriété du produit)} \\ &= \log_a(u) + (-\log_a(v)) = \log_a(u) - \log_a(v). \end{aligned}$$

□

Solution 7.19.

Posons $y = \log_a(x)$, de sorte que $a^y = x$ (définition).

Prenons $\log_b$ des deux côtés : $\log_b(a^y) = \log_b(x)$.

Par la propriété de la puissance, $\log_b(a^y) = y \log_b(a)$.

Donc $y \log_b(a) = \log_b(x) \iff y = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ (car $a \neq 1$ donc $\log_b(a) \neq 0$).

Comme $y = \log_a(x)$ par définition, on a bien $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$. $\square$

Solution 7.20.

a) $L = 10 \log_{10}(1000) = 10 \cdot 3 = 30$ dB.

b) $\Delta L = 10 \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 30 \iff \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) = 3 \iff \frac{I_2}{I_1} = 10^3 = 1000$: l'intensité est multipliée par 1000 (cohérent avec le point a).

Chapitre 8

Trigonométrie dans le triangle quelconque

Un navigateur au large, sans repère visible, doit déterminer sa position.

Il connaît deux distances et l'angle entre elles, ou deux angles et une distance. La loi des sinus et la loi des cosinus lui donnent toutes les autres mesures.

Ces formules, connues des astronomes perses du X^e siècle, permettaient de calculer les distances entre étoiles sans jamais les atteindre.

Aujourd'hui, les mêmes lois guident les GPS, les radars, les satellites.

La géométrie du triangle quelconque est la géométrie du monde réel.



8.1 Extension du sinus et du cosinus

Définition 8.1 — *cercle trigonométrique.*

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1.

Définition 8.2 — sinus et cosinus d'un angle entre 0° et 180° .

Soit $\alpha \in]0^\circ, 180^\circ[$. On place cet angle au centre du cercle trigonométrique, l'un de ses côtés étant le demi-axe positif Ox . Soit $P(x, y)$ le point d'intersection de l'autre côté avec le cercle. On définit :

$$\sin(\alpha) = y, \quad \cos(\alpha) = x.$$

(Pour $\alpha \in]0^\circ, 90^\circ[$, on retrouve les définitions usuelles du triangle rectangle ; cette définition les **étend** au cas où α est obtus.)

Théorème 8.3 — propriétés étendues.

Pour $0^\circ < \alpha < 180^\circ$:

- $0 < \sin(\alpha) \leq 1$ et $-1 < \cos(\alpha) < 1$
- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- **Supplémentaires** : $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$ et $\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha)$

Exemple 8.1. $\sin(150^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ et $\cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition 8.4 — deux préimages pour le sinus.

Pour $k \in]0, 1]$, l'équation $\sin(\alpha) = k$ a en général **deux** solutions dans $]0^\circ, 180^\circ[$: α_1 (donnée directement par $\sin^{-1}$ sur la calculatrice, toujours entre 0° et 90°) et $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$. C'est la source de l'ambiguïté rencontrée lors de la résolution de certains triangles.

8.2 Loi des sinus

Théorème 8.5 — loi des sinus.

Dans tout triangle ABC de côtés a, b, c et d'angles α, β, γ opposés :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Exemple 8.2. Dans ABC : $\alpha = 50^\circ, \beta = 70^\circ, a = 8, \gamma = 60^\circ$. $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{8 \sin 70^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 9,8$.

8.3 Loi des cosinus

Théorème 8.6 — loi des cosinus.

Dans tout triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

(et de même pour β et γ par permutation circulaire)

Remarque 8.1. Pour $\alpha = 90^\circ$: $\cos 90^\circ = 0$, on retrouve Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$. La loi des cosinus est la généralisation de Pythagore à tout triangle.

Exemple 8.3. Triangle avec $b = 5$, $c = 7$, $\alpha = 60^\circ$: $a^2 = 25 + 49 - 2(5)(7) \cos 60^\circ = 74 - 35 = 39$. $a = \sqrt{39} \approx 6,24$.

8.4 Résolution de triangles

Proposition 8.7 — cas possibles.

- **CAC** : deux côtés et l'angle inclus $\rightarrow$ loi des cosinus pour le troisième côté
- **CCC** : trois côtés $\rightarrow$ loi des cosinus pour un angle
- **ACA** : deux angles et un côté $\rightarrow$ loi des sinus
- **CCA** : deux côtés et un angle non inclus $\rightarrow$ loi des sinus (attention : cas ambiguë possible)

Proposition 8.8 — éviter le piège de $\sin^{-1}$.

Dans les cas CAC et CCC, un angle calculé par la loi des **cosinus** via $\cos^{-1}$ est toujours correct (car $\cos^{-1}$ donne un unique angle entre 0° et 180° , sans ambiguïté). En revanche, un angle calculé par la loi des **sinus** via $\sin^{-1}$ peut être le mauvais choix parmi les deux préimages possibles. **Règle pratique** : si l'on sait déjà (ou si l'on soupçonne) qu'un angle du triangle est obtus, mieux vaut le calculer directement par la loi des cosinus, ou vérifier après coup que la somme des trois angles vaut bien 180° .

8.5 Aire d'un triangle

Proposition 8.9 — formule de l'aire.

L'aire du triangle ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Formule de Héron. Si $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre du triangle ABC , alors son aire vaut :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Cette formule ne nécessite **aucun angle** — seulement les trois côtés. Elle est équivalente à la formule $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$ (on peut le vérifier en substituant $\cos \gamma$ obtenu par la loi des cosinus).

Cas SSA — ambiguïté. Quand on connaît deux côtés a, b et l'angle α (non inclus), il peut y avoir 0, 1 ou 2 triangles solutions.

- Si $a < b \sin \alpha$: aucun triangle
- Si $a = b \sin \alpha$: un triangle rectangle
- Si $b \sin \alpha < a < b$: deux triangles
- Si $a \geq b$: un seul triangle

8.6 Exercices

Exercice 8.1. Dans ABC : $\alpha = 42^\circ, \beta = 78^\circ, c = 15$. Trouver γ, a et b .

Exercice 8.2. Dans ABC : $b = 6, c = 9, \alpha = 110^\circ$. Calculer a puis les angles β et γ .

Exercice 8.3. Calculer l'aire du triangle ABC avec :

- a) $a = 8, b = 11, \gamma = 35^\circ$
- b) $a = 5, b = 7, c = 9$

Exercice 8.4. Un triangle a des côtés $a = 7, b = 8, c = 5$. Trouver ses trois angles.

Exercice 8.5. Deux rangers A et B , distants de 3 km, observent un incendie F . A mesure un angle de 52° et B un angle de 68° (depuis la droite AB , du même côté). À quelle distance de A l'incendie se trouve-t-il ?

Exercice 8.6. Donner les valeurs exactes de $\sin(120^\circ)$, $\cos(135^\circ)$ et $\sin(150^\circ)$, à l'aide du cercle trigonométrique et des angles supplémentaires.

Exercice 8.7. Vérifier numériquement (calculatrice) que $\sin(150^\circ) = \sin(30^\circ)$ et que $\cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ)$.

Exercice 8.8. Trouver les deux angles $\alpha \in]0^\circ, 180^\circ[$ tels que $\sin(\alpha) = 0,6$ (arrondir au dixième de degré).

Exercice 8.9. Résoudre le triangle ABC avec $a = 15$, $b = 22$, $\alpha = 25^\circ$.

Exercice 8.10. Résoudre le triangle ABC avec $a = 8$, $b = 20$, $\alpha = 40^\circ$.

Exercice 8.11. Résoudre le triangle ABC avec $a = 5$, $b = 12$, $\beta = 100^\circ$.

Exercice 8.12. Calculer l'aire du triangle de côtés $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$ (voir exercice 8.4) à l'aide de la formule de Héron, et vérifier la cohérence avec $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Exercice 8.13. Un avion radar P , volant à 2500 m d'altitude, détecte un sous-marin S avec un angle de dépression de 40° et un bateau T avec un angle de dépression de 25° . L'angle $\widehat{SPT}$ mesure 95° . Calculer la distance ST .

Exercice 8.14. Un observateur voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Le satellite est à 1000 km d'altitude (perpendiculairement au sol, sous le satellite). Quelle est la distance entre l'observateur et le satellite ?

Exercice 8.15. Lorsque l'angle d'élévation du soleil est de 48° , un poteau qui penche de 8° par rapport à la verticale projette une ombre de 6 m au sol. Calculer la longueur du poteau.

Exercice 8.16. Pour mesurer la largeur d'une rivière entre les points M (sur la rive opposée) et un point A , on choisit une ligne de base $AB = 50$ m sur sa propre rive, avec $\widehat{A} = 72^\circ$ et $\widehat{B} = 65^\circ$ (les angles formés en visant M). Calculer la distance AM .

Exercice 8.17. Démontrer la loi des sinus $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ pour un triangle ABC (indication : exprimer la hauteur issue de C de deux façons différentes).

Exercice 8.18. Démontrer la loi des cosinus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ pour un triangle ABC (indication : placer A à l'origine, B sur l'axe des x , exprimer les coordonnées de C à l'aide de α , puis utiliser la distance BC).

Exercice 8.19. Dans ABC : $b = 10$, $c = 14$, $\alpha = 75^\circ$. Calculer a , puis β et γ , et vérifier que la somme des trois angles vaut 180° .

Exercice 8.20. Un terrain triangulaire a pour côtés 45 m, 52 m et 61 m. Calculer son aire à l'aide de la formule de Héron.

8.7 Résumé du chapitre

Extension du sinus et du cosinus

- Pour $\alpha \in]0^\circ, 180^\circ[$: $\sin(\alpha) = y$, $\cos(\alpha) = x$ où $P(x, y)$ est sur le cercle trigonométrique
- Supplémentaires : $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$, $\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha)$
- $\sin(\alpha) = k$ a **deux** préimages dans $]0^\circ, 180^\circ[$: α_1 et $180^\circ - \alpha_1$

Lois du sinus et du cosinus

- Sinus : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$
- Cosinus : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (généralise Pythagore)

Résoudre un triangle

- CAC, CCC : loi des cosinus; ACA : loi des sinus; CCA : loi des sinus, **ambiguïté possible**
- $\cos^{-1}$ ne pose jamais de problème d'ambiguïté; $\sin^{-1}$ peut donner le mauvais angle — vérifier via la somme des angles (180°) en cas de doute

Aire

- $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
- MA2 — Héron : $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ (sans angle)

MA2

- Cas SSA : 0, 1 ou 2 triangles selon a vs $b \sin \alpha$ et b
 - Preuves des lois du sinus (hauteur commune) et du cosinus (coordonnées + Pythagore)
-

8.8 QCM — Trigonométrie dans le triangle quelconque

Une seule réponse correcte par question.

1. Dans ABC , $a = 10$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$. b vaut approximativement :

- a) 7,1
- b) 14,1
- c) 12,2
- d) 8,7

2. La loi des cosinus généralise :

- a) La loi des sinus
- b) Le théorème de Thalès
- c) Le théorème de Pythagore
- d) La formule de l'aire

3. Dans ABC , $b = 4$, $c = 6$, $\alpha = 60^\circ$. a^2 vaut :

- a) 28
- b) 52
- c) 24
- d) 76

4. L'aire de ABC avec $b = 5$, $c = 8$, $\alpha = 30^\circ$ est :

- a) 20
- b) 10
- c) $\sqrt{3}$
- d) $5\sqrt{3}$

5. Dans ABC , $a = b = c = 6$. Les angles valent :

- a) 30° chacun
- b) 45° chacun
- c) 60° chacun
- d) 90° chacun

6. Pour quel cas utilise-t-on la loi des sinus ?

- a) CCC
- b) CAC
- c) ACA
- d) Aucun

7. Dans ABC , $\alpha = 90^\circ$, $b = 3$, $c = 4$. La loi des cosinus donne $a = ?$

- a) 1
- b) 5
- c) 7
- d) $\sqrt{7}$

8. Le rayon du cercle circonscrit à un triangle est relié aux côtés par :

- a) $R = \frac{a}{2}$
- b) $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$
- c) $R = \frac{2a}{\sin \alpha}$
- d) $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$ et $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

9. $\sin(120^\circ)$ vaut :

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) $-\frac{1}{2}$

10. $\cos(150^\circ)$ vaut :

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $-\frac{1}{2}$

11. $\sin(\alpha) = 0,6$ a, pour $\alpha \in]0^\circ, 180^\circ[$:

- a) une seule solution
- b) deux solutions
- c) aucune solution
- d) trois solutions

12. Si β est déjà connu comme obtus dans un triangle, alors α et γ sont :

- a) obtus aussi
- b) forcément aigus
- c) indéterminés
- d) égaux

13. Pour $a = 8$, $b = 20$, $\alpha = 40^\circ$, la résolution du triangle donne :

- a) un triangle
- b) deux triangles

- c) aucun triangle
- d) un triangle rectangle

14. La formule de Héron nécessite :

- a) un angle et deux côtés
- b) trois côtés seulement
- c) trois angles
- d) un angle seulement

15. $\cos^{-1}$ appliqué dans la résolution d'un triangle :

- a) peut donner un angle ambigu
- b) donne toujours un angle correct entre 0° et 180°
- c) ne fonctionne que pour les angles aigus
- d) nécessite deux calculs

16. La démonstration de la loi des cosinus (par coordonnées) utilise en dernier lieu :

- a) la loi des sinus
- b) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- c) le théorème de Thalès
- d) la formule de Héron

17. $\sin(180^\circ - \alpha)$ est égal à :

- a) $\sin(\alpha)$
- b) $-\sin(\alpha)$
- c) $\cos(\alpha)$
- d) $-\cos(\alpha)$

Réponses : 1-b 2-c 3-a 4-b 5-c 6-c 7-b 8-d 9-b 10-b 11-b 12-b 13-c
14-b 15-b 16-b 17-a

8.9 Corrigés

Solution 8.1.

$$\gamma = 180^\circ - 42^\circ - 78^\circ = 60^\circ. \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{15}{\sin 60^\circ} = \frac{15}{\sqrt{3}/2} = 10\sqrt{3}. a = 10\sqrt{3} \sin 42^\circ \approx 11,56.$$

$$b = 10\sqrt{3} \sin 78^\circ \approx 16,96.$$

Solution 8.2.

$$a^2 = 36 + 81 - 2(6)(9) \cos 110^\circ = 117 - 108(-0,342) \approx 154. a \approx 12,4. \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{154 + 81 - 36}{2(12,4)(9)} \approx \frac{199}{223} \approx 0,893; \beta \approx 26,7^\circ. \gamma \approx 180^\circ - 110^\circ - 26,7^\circ = 43,3^\circ.$$

Solution 8.3.

$$a) \mathcal{A} = \frac{1}{2}(8)(11) \sin 35^\circ \approx 44(0,574) \approx 25,2.$$

$$b) \text{ Loi des cosinus : } \cos \gamma = \frac{25+49-81}{70} = \frac{-7}{70} = -0,1. \mathcal{A} = \frac{1}{2}(5)(7) \sin \gamma = \frac{35}{2} \sqrt{1-0,01} \approx \frac{35}{2}(0,995) \approx 17,4.$$

Solution 8.4.

$$\cos \alpha = \frac{64+25-49}{80} = \frac{40}{80} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ. \cos \beta = \frac{49+25-64}{70} = \frac{10}{70} \approx 0,143 \Rightarrow \beta \approx 81,8^\circ. \\ \gamma = 180^\circ - 60^\circ - 81,8^\circ \approx 38,2^\circ.$$

Solution 8.5.

$$\text{Angle en } F : 180^\circ - 52^\circ - 68^\circ = 60^\circ. \text{ Loi des sinus : } \frac{AF}{\sin 68^\circ} = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin 60^\circ}. AF = \frac{3 \sin 68^\circ}{\sin 60^\circ} \approx \frac{3(0,927)}{0,866} \approx 3,21 \text{ km.}$$

Solution 8.6.

$$\sin(120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \cos(135^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \sin(150^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}.$$

Solution 8.7.

$$\sin(150^\circ) = 0,5 \text{ et } \sin(30^\circ) = 0,5 : \text{égaux. } \checkmark \\ \cos(150^\circ) \approx -0,866 \text{ et } -\cos(30^\circ) \approx -0,866 : \text{égaux. } \checkmark$$

Solution 8.8.

$$\alpha_1 = \sin^{-1}(0,6) \approx 36,9^\circ. \\ \alpha_2 = 180^\circ - 36,9^\circ = 143,1^\circ.$$

Solution 8.9.

$$\frac{\sin \beta}{22} = \frac{\sin 25^\circ}{15} \Rightarrow \sin \beta = \frac{22 \sin 25^\circ}{15} \approx 0,620.$$

Deux préimages : $\beta_1 \approx 38,3^\circ$ et $\beta_2 \approx 141,7^\circ$. Les deux sont compatibles avec $\alpha = 25^\circ$ (somme $< 180^\circ$ dans les deux cas) : **deux triangles solutions.**

$$\text{Solution 1 : } \gamma_1 \approx 116,7^\circ; c_1 = \frac{15 \sin 116,7^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 31,7.$$

$$\text{Solution 2 : } \gamma_2 \approx 13,3^\circ; c_2 = \frac{15 \sin 13,3^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 8,2.$$

Solution 8.10.

$$\sin \beta = \frac{20 \sin 40^\circ}{8} \approx 1,61 > 1.$$

Aucune valeur de β ne convient : **il n'y a pas de triangle solution.**

Solution 8.11.

Comme β est déjà obtus, les deux autres angles sont forcément aigus : pas d'ambiguïté possible ici, le résultat de $\sin^{-1}$ est fiable.

$$\sin \alpha = \frac{5 \sin 100^\circ}{12} \approx 0,410 \Rightarrow \alpha \approx 24,2^\circ. \\ \gamma = 180^\circ - 100^\circ - 24,2^\circ \approx 55,8^\circ.$$

Solution 8.12.

$$p = \frac{7 + 8 + 5}{2} = 10.$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{10(10-7)(10-8)(10-5)} = \sqrt{10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{300} \approx 17,3.$$

Avec $\gamma \approx 38,2^\circ$ (calculé en 8.4) : $\frac{1}{2}(7)(8) \sin(38,2^\circ) \approx 17,3$. Cohérent. ✓

Solution 8.13.

$$PS = \frac{2500}{\sin 40^\circ} \approx 3889 \text{ m}; PT = \frac{2500}{\sin 25^\circ} \approx 5916 \text{ m}.$$

$$\text{Loi des cosinus : } ST^2 = PS^2 + PT^2 - 2 \cdot PS \cdot PT \cdot \cos 95^\circ \approx 7357^2.$$

$$ST \approx 7357 \text{ m} \approx 7,4 \text{ km}.$$

Solution 8.14.

En admettant le triangle rectangle formé par l'observateur, le point au sol sous le satellite et le satellite :

$$d = \frac{1000}{\cos 35^\circ} \approx 1221 \text{ km}.$$

Solution 8.15.

L'angle entre le poteau et le sol (côté ombre) est $90^\circ - 8^\circ = 82^\circ$. Dans le triangle poteau-sol-rayon, le troisième angle est $180^\circ - 48^\circ - 82^\circ = 50^\circ$.

$$\text{Loi des sinus : } \frac{\text{poteau}}{\sin 48^\circ} = \frac{6}{\sin 50^\circ}.$$

$$\text{Poteau} = \frac{6 \sin 48^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 5,82 \text{ m}.$$

Solution 8.16.

$$\hat{M} = 180^\circ - 72^\circ - 65^\circ = 43^\circ.$$

$$\text{Loi des sinus : } \frac{AM}{\sin 65^\circ} = \frac{50}{\sin 43^\circ}.$$

$$AM = \frac{50 \sin 65^\circ}{\sin 43^\circ} \approx 66,4 \text{ m}.$$

Solution 8.17.

Notons h la hauteur issue de C , qui rencontre (AB) en H . Dans le triangle rectangle ACH : $h = b \sin \alpha$. Dans le triangle rectangle BCH : $h = a \sin \beta$.

(Ceci reste valable même si H tombe hors du segment $[AB]$, car alors l'un des angles est obtus et on utilise $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$.)

$$\text{Donc } b \sin \alpha = a \sin \beta \iff \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}. \quad \square$$

Solution 8.18.

Plaçons $A(0,0)$ et $B(c,0)$. Comme $AC = b$ et l'angle en A vaut α , on a $C = (b \cos \alpha, b \sin \alpha)$.

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \sin^2 \alpha \\ &= b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2bc \cos \alpha + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \text{ (car } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1). \end{aligned} \quad \square$$

Solution 8.19.

$$a^2 = 100 + 196 - 2(10)(14) \cos 75^\circ \approx 223,5 \Rightarrow a \approx 14,95.$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0,763 \Rightarrow \beta \approx 40,2^\circ.$$

$$\gamma = 180^\circ - 75^\circ - 40,2^\circ \approx 64,8^\circ.$$

$$\text{Vérification : } 75^\circ + 40,2^\circ + 64,8^\circ = 180^\circ. \quad \checkmark$$

Solution 8.20.

$$p = \frac{45 + 52 + 61}{2} = 79.$$

$$\mathcal{A} = \sqrt{79(79 - 45)(79 - 52)(79 - 61)} = \sqrt{79 \cdot 34 \cdot 27 \cdot 18} \approx 1142,5 \text{ m}^2.$$

Chapitre 9

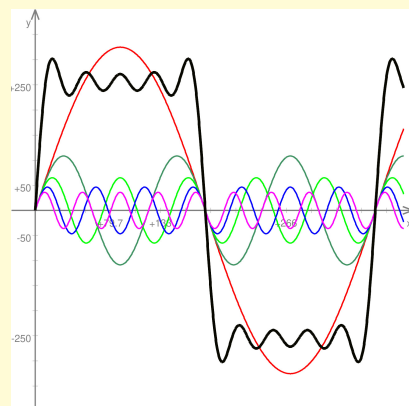
Fonctions trigonométriques

Une roue de foire tourne lentement. Un passager, parti du bas, monte, atteint le sommet, redescend, revient au bas — et recommence. Sa hauteur varie de manière régulière, périodique, douce.

Si on trace sa hauteur en fonction du temps, on obtient une courbe en vague : le sinus.

Fourier, au XIX^e siècle, démontra quelque chose de stupéfiant : toute fonction périodique raisonnable — le son d'une flûte, le courant électrique, la lumière — peut s'écrire comme somme de sinus et cosinus.

Les fonctions trigonométriques ne décrivent pas que les triangles. Elles décrivent les ondes.¹



¹**Les faits** : Joseph Fourier a démontré, dans sa *Théorie analytique de la chaleur* (1822), que les fonctions périodiques raisonnables peuvent s'écrire comme séries de sinus et cosinus.

9.1 Le cercle trigonométrique

Définition 9.1 — cercle trigonométrique.

Le **cercle trigonométrique** est le cercle unitaire de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens antihoraire.

Pour un angle θ (en radians ou en degrés), le point $M(\theta)$ sur le cercle a pour coordonnées :

$$M(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Remarque 9.1. Cette définition s'étend sans difficulté à **tout nombre réel** x , pas seulement à un angle entre 0 et 2π : partant du point $(1, 0)$, on parcourt une longueur d'arc x dans le sens trigonométrique (si $x > 0$) ou dans le sens inverse (si $x < 0$), y compris en faisant plusieurs tours complets si $|x| > 2\pi$. On obtient ainsi un point $P(u, v)$, et l'on pose $\sin(x) = v$, $\cos(x) = u$.

9.2 Radian

Définition 9.2 — radian.

Le **radian** est l'unité d'angle définie par : un angle d'un radian intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle unité. La conversion :

$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}}.$$

Proposition 9.3 — valeurs remarquables.

θ°	0°	30°	45°	60°	90°	180°
θ_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

9.3 Fonctions sin, cos, tan

Proposition 9.4 — propriétés de sin et cos.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- Périodiques de période 2π : $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$
- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- sin impaire : $\sin(-\theta) = -\sin \theta$
- cos paire : $\cos(-\theta) = \cos \theta$
- $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ et $-1 \leq \cos \theta \leq 1$
- **Supplémentaires** : $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- **Complémentaires** : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

Exemple 9.1. $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ — utile pour relier deux valeurs qu'on ne connaît pas forcément toutes les deux par cœur.

Définition 9.5 — fonction tangente.

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, définie pour $\cos \theta \neq 0$, c'est-à-dire $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Périodique de période π .

Proposition 9.6 — propriétés de tan.

$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \tan(\pi - x) = -\tan(x).$$

9.4 Transformations et graphes

Proposition 9.7 — forme générale.

La fonction $f(\theta) = A \sin(B\theta + C) + D$ a :

- **Amplitude** : $|A|$
- **Période** : $\frac{2\pi}{|B|}$
- **Déphasage** : $-\frac{C}{B}$
- **Décalage vertical** : D

9.5 Équations trigonométriques générales

Proposition 9.8 — solutions générales.

Pour u, v des expressions réelles et $k \in \mathbb{Z}$:

- $\sin(u) = \sin(v) \iff u = v + 2k\pi$ ou $u = \pi - v + 2k\pi$
- $\cos(u) = \cos(v) \iff u = v + 2k\pi$ ou $u = -v + 2k\pi$
- $\tan(u) = \tan(v) \iff u = v + k\pi$

On trouve ensuite les solutions dans un intervalle donné (par exemple $[0, 2\pi[$) en balayant les valeurs entières de k .

Exemple 9.2. Résoudre $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

$$\sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\iff x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}.$$

En balayant $k = 0, 1, 2$ dans chaque famille (la période $3x$ impose 3 répétitions dans $[0, 2\pi[$) :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18} \right\}.$$

9.6 Formules d'addition

Théorème 9.9 — formules d'addition.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Corollaire 9.10 — formules de duplication.

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Tangente, cotangente. $\tan \theta$ a des asymptotes verticales en $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

La **cotangente** $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ est définie pour $\sin \theta \neq 0$.

Identités : $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ et $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$.

MA2 — Approfondissement

Réciproques trigonométriques. Restreintes à un domaine où elles sont bijectives, $\sin$, $\cos$ et $\tan$ admettent des réciproques (voir le chapitre sur

les fonctions réciproques) :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad \arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Par exemple, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, car $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

9.7 Exercices

Exercice 9.1. Convertir :

- a) 150° en radians
- b) $\frac{5\pi}{4}$ en degrés
- c) $-\frac{\pi}{3}$ en degrés

Exercice 9.2. Sans calculatrice :

- a) $\sin \frac{3\pi}{4}$
- b) $\cos \frac{4\pi}{3}$
- c) $\tan \frac{5\pi}{6}$

Exercice 9.3. Résoudre sur $[0, 2\pi)$:

- a) $\sin \theta = \frac{1}{2}$
- b) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c) $\tan \theta = \sqrt{3}$

Exercice 9.4. Identifier l'amplitude, la période et le déphasage de :

- a) $f(x) = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{4})$
- b) $g(x) = -2 \cos(\frac{x}{3}) + 1$

Exercice 9.5. En utilisant les formules d'addition, calculer exactement :

- a) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$

b) $\cos \frac{7\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$

Exercice 9.6. Utiliser la formule des complémentaires pour exprimer $\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$ à l'aide d'un cosinus, puis vérifier numériquement (calculatrice) que les deux valeurs coïncident.

Exercice 9.7. Vérifier numériquement (calculatrice, $x = \frac{\pi}{7}$) que $\tan(-x) = -\tan(x)$ et que $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$.

Exercice 9.8. Résoudre $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

Exercice 9.9. Résoudre $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

Exercice 9.10. Résoudre $\tan(2x) = \sqrt{3}$ dans $[0, 2\pi[$.

Exercice 9.11. Résoudre $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

Exercice 9.12. Démontrer les formules de duplication $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ et $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ à partir des formules d'addition (indication : poser $\beta = \alpha$).

Exercice 9.13. Calculer $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, en précisant pourquoi la réponse est unique (contrairement à la résolution d'une équation trigonométrique générale).

Exercice 9.14. Une fonction sinusoïdale a une amplitude de 5, une période de π , un déphasage de $\frac{\pi}{4}$ vers la droite et un décalage vertical de -2 . Donner son expression algébrique sous la forme $f(x) = A\sin(Bx + C) + D$.

Exercice 9.15. L'intensité d'un courant alternatif est $I(t) = 20\sin(60\pi t - \frac{\pi}{4})$ (I en ampères, t en secondes). Trouver la plus petite valeur positive de t pour laquelle $I = 10$.

Exercice 9.16. La température moyenne (en °C) à un endroit donné est modélisée par $T(t) = 12\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 100)\right) + 8$, où t est le jour de l'année ($t = 0$ correspondant au 1er janvier). Déterminer, à l'aide du minimum du sinus, le jour approximatif le plus froid de l'année.

Exercice 9.17. Démontrer que $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour $\cos(x) \neq 0$, à partir de $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Exercice 9.18. Calculer $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ à l'aide de la parité.

Exercice 9.19. Soit $f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) Trouver les zéros de f dans $[0, 2\pi[$.
- b) Donner un tableau de signes de f sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 9.20. Résoudre $\cos(x) = -0,6$ dans $[0, 2\pi[$ à l'aide de la calculatrice (réponses arrondies au centième).

9.8 Résumé du chapitre

Cercle trigonométrique et radian

- $M(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$; définition étendue à tout $x \in \mathbb{R}$ (longueur d'arc, plusieurs tours possibles)
- $\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^{\circ}}$

Propriétés

- Périodicité 2π (sin, cos) / π (tan); $\sin^2 + \cos^2 = 1$; parité : sin impaire, cos paire
- Supplémentaires : $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- Complémentaires : $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
- Tangente : $\tan(-x) = -\tan(x)$, $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

Transformations

- $f(x) = A \sin(Bx + C) + D$: amplitude $|A|$, période $\frac{2\pi}{|B|}$, déphasage $-\frac{C}{B}$, décalage D

Équations trigonométriques générales

- $\sin(u) = \sin(v) \iff u = v + 2k\pi$ ou $u = \pi - v + 2k\pi$
- $\cos(u) = \cos(v) \iff u = v + 2k\pi$ ou $u = -v + 2k\pi$
- $\tan(u) = \tan(v) \iff u = v + k\pi$

Formules d'addition et MA2

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$; $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 - Duplication (MA2, prouvée) : $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 - MA2 : tan, cot, identités $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$
 - MA2 : réciproques arcsin : $[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, arccos : $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, arctan : $\mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
-

9.9 QCM — Fonctions trigonométriques

Une seule réponse correcte par question.

1. 270° en radians vaut :

- a) $\frac{3\pi}{2}$
- b) $\frac{2\pi}{3}$
- c) $\frac{3\pi}{270}$
- d) $\frac{\pi}{270}$

2. $\sin \frac{5\pi}{6}$ vaut :

- a) $-\frac{1}{2}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. La période de $f(x) = \cos(3x)$ est :

- a) 3π
- b) $\frac{2\pi}{3}$
- c) 6π
- d) $\frac{\pi}{3}$

4. $\sin(-\frac{\pi}{4})$ vaut :

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c) $\frac{1}{2}$
- d) $-\frac{1}{2}$

5. L'amplitude de $f(x) = -4\sin(x) + 2$ est :

- a) 2
- b) -4
- c) 4
- d) 6

6. Les solutions de $\cos \theta = 0$ sur $[0, 2\pi)$ sont :

- a) $\theta = 0$ et $\theta = \pi$

- b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ seulement
- c) $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$
- d) $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$

7. $\sin(2\theta)$ vaut :

- a) $2\sin\theta$
- b) $\sin^2\theta$
- c) $2\sin\theta\cos\theta$
- d) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

8. La fonction $\cos$ est :

- a) Paire et périodique de période π
- b) Impaire et périodique de période 2π
- c) Paire et périodique de période 2π
- d) Ni paire ni impaire

9. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est égal à :

- a) $\sin(x)$
- b) $\cos(x)$
- c) $-\cos(x)$
- d) $-\sin(x)$

10. $\tan(\pi - x)$ est égal à :

- a) $\tan(x)$
- b) $-\tan(x)$
- c) $\cot(x)$
- d) $-\cot(x)$

11. $\sin(u) = \sin(v)$ équivaut à :

- a) $u = v$ uniquement
- b) $u = v + 2k\pi$ ou $u = \pi - v + 2k\pi$
- c) $u = v + k\pi$
- d) $u = -v$

12. $\cos(u) = \cos(v)$ équivaut à :

- a) $u = v + 2k\pi$ ou $u = -v + 2k\pi$
- b) $u = v + k\pi$
- c) $u = v$ uniquement
- d) $u = \pi - v$

13. $\tan(u) = \tan(v)$ équivaut à :

- a) $u = v + 2k\pi$
- b) $u = v + k\pi$
- c) $u = v$ uniquement
- d) $u = -v + k\pi$

14. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ vaut :

- a) $\frac{\pi}{6}$
- b) $\frac{5\pi}{6}$
- c) $\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$
- d) $\frac{\pi}{3}$

15. Le domaine d'arrivée de $\arcsin$ est :

- a) $[0, \pi]$
- b) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- c) $\mathbb{R}$
- d) $[-1, 1]$

16. $1 + \tan^2(x)$ est égal à :

- a) $\frac{1}{\sin^2(x)}$
- b) $\frac{1}{\cos^2(x)}$
- c) $\sin^2(x)$
- d) $\cos^2(x)$

17. Sur $[0, 2\pi[$, l'équation $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ a :

- a) 2 solutions
- b) 3 solutions
- c) 6 solutions
- d) une infinité de solutions

18. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ vaut :

- a) $\frac{\pi}{3}$
- b) $\frac{2\pi}{3}$
- c) $-\frac{\pi}{3}$
- d) $\frac{5\pi}{6}$

Réponses : 1-a 2-c 3-b 4-b 5-c 6-c 7-c 8-c 9-b 10-b 11-b 12-a 13-b
14-a 15-b 16-b 17-c 18-b

9.10 Corrigés

Solution 9.1.

$$\text{a) } 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{b) } \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 225^\circ.$$

$$\text{c) } -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = -60^\circ.$$

Solution 9.2.

$$\text{a) } \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{b) } \cos \frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } \tan \frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Solution 9.3.

$$\text{a) } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{b) } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{c) } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Solution 9.4.

a) Amplitude 3, période π , déphasage $\frac{\pi}{8}$ vers la droite.

b) Amplitude 2, période 6π , déphasage nul, décalage +1.

Solution 9.5.

$$\text{a) } \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{b) } \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Solution 9.6.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Numériquement : $\sin(0,3\pi) \approx 0,809$ et $\cos(0,2\pi) \approx 0,809$. ✓

Solution 9.7.

$$\tan\left(\frac{\pi}{7}\right) \approx 0,481.$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{7}\right) \approx -0,481 = -\tan\left(\frac{\pi}{7}\right). \checkmark$$

$$\tan\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) \approx -0,481 = -\tan\left(\frac{\pi}{7}\right). \checkmark$$

Solution 9.8.

Voir la méthode dans l'exemple du cours :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18} \right\}.$$

Solution 9.9.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \iff x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$\iff x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Dans $[0, 2\pi[$: $x = \pi$ (pour $k = 0$) et $x = \frac{4\pi}{3}$ (pour $k = 1$ dans la seconde famille).

$$S = \left\{ \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

Solution 9.10.

$$\tan(2x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$$

Dans $[0, 2\pi[$ ($k = 0, 1, 2, 3$) :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

Solution 9.11.

$\sin(x) = \frac{1}{2}$ en $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{5\pi}{6}$. Entre ces deux valeurs, le sinus est supérieur à $\frac{1}{2}$ (sommet en $\frac{\pi}{2}$ où $\sin = 1$) :

$$S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right].$$

Solution 9.12.

En posant $\beta = \alpha$ dans les formules d'addition :

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \text{ soit } \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \text{ soit } \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad \square$$

Solution 9.13.

$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, car $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (domaine d'arrivée de $\arcsin$ restreint pour la bijectivité).

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \text{ car } \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi].$$

La réponse est unique car $\arcsin$ et $\arccos$ sont des **fonctions** (une image par valeur), contrairement à l'équation $\sin(x) = k$ qui a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

Solution 9.14.

$A = 5$. Période $\frac{2\pi}{B} = \pi \Rightarrow B = 2$. Déphasage $-\frac{C}{B} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow C = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.
 $D = -2$.
 $f(x) = 5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$.

Solution 9.15.

$$20 \sin\left(60\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = 10 \iff \sin\left(60\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Plus petite solution positive : } 60\pi t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \iff 60\pi t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\iff t = \frac{5}{720} = \frac{1}{144} \approx 0,00694 \text{ s.}$$

Solution 9.16.

Le minimum de $\sin$ vaut -1 , atteint quand son argument vaut $-\frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) :

$$\frac{2\pi}{365}(t - 100) = -\frac{\pi}{2} \iff t - 100 = -\frac{365}{4} \iff t = 100 - 91,25 = 8,75.$$

Le jour le plus froid est donc vers le 9^e jour de l'année (début janvier).

Solution 9.17.

En divisant les deux membres de $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ par $\cos^2(x)$ (non nul par hypothèse) :

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\iff \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

□

Solution 9.18.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Solution 9.19.

$$\text{a) } \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff x - \frac{\pi}{2} = k\pi \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Dans } [0, 2\pi[: x = \frac{\pi}{2} \text{ et } x = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{b) } f(0) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 < 0; f(\pi) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0.$$

x	0	$\pi/2$	$3\pi/2$
$f(x)$	-	-	0
	-	0	+
	-	0	0 (-ensuite)

$$f < 0 \text{ sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, f > 0 \text{ sur } \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, f < 0 \text{ sur } \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[.$$

Solution 9.20.

$$x_1 = \cos^{-1}(-0,6) \approx 2,21.$$

Par symétrie (le cosinus a deux préimages, sauf en 0 et π) : $x_2 = 2\pi - x_1 \approx 4,07$.

$$S \approx \{2,21; 4,07\}.$$