Mathématiques
Collège de Genève

MA1 / MA2 — Première à Quatrième année

Table des matières

Première partie

Première année

Chapitre 1

Des nombres

> *Avant d'écrire, on comptait. Des os taillés retrouvés en Afrique centrale — le fameux os d'Ishango, vieux de vingt mille ans — portent des encoches groupées par séries. Personne ne sait exactement ce qu'elles signifiaient : des lunes, des proies, des jours. Mais quelqu'un, là, avait besoin de garder une trace. Besoin de nombres. La question n'était pas encore qu'est-ce qu'un nombre ? — elle était : combien ? C'est encore souvent notre première question.*
> *Et pourtant, entre les entiers que l'on grave sur un os et les irrationnels qu'Hippasos de Metaponte paya de sa vie pour avoir révélés, il y a un gouffre. Un gouffre que ce chapitre se propose de traverser, pas à pas.*

1.1 Chiffres et nombres

Définition 1.1 — *chiffres et nombres.*
Les symboles $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont les **chiffres**, avec lesquels on construit les **nombres**. Notre système de numération est **positionnel en base 10** : la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans le nombre.

Exemple 1.1. $2435{,}78 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$.

Remarque 1.1. D'autres bases sont possibles : la base 2 (binaire) est fondamentale en informatique, la base 60 (sexagésimale) nous vient des Babyloniens et survit dans nos secondes et nos degrés d'angle.

1.2 Les ensembles de nombres

Les mathématiques organisent les nombres en familles emboîtées, chacune plus riche que la précédente.

Définition 1.2 — *entiers naturels.*

L'ensemble des **entiers naturels** est

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Il sert à compter et à ordonner.

Définition 1.3 — *entiers relatifs.*

L'ensemble des **entiers relatifs** est

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Il étend $\mathbb{N}$ en ajoutant les **opposés** : à chaque $n \in \mathbb{N}$ correspond $-n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.2. **Vocabulaire des opérations.** La **somme** est le résultat d'une addition ; la **différence**, d'une soustraction ; le **produit**, d'une multiplication ; le **quotient**, d'une division.

Définition 1.4 — *nombres rationnels.*

L'ensemble des **nombres rationnels** est

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Ce sont exactement les nombres dont le développement décimal est **fini ou périodique**.

Exemple 1.2. $\dfrac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ est rationnel (période : 3). $\dfrac{7}{4} = 1{,}75$ est rationnel (développement fini). $2{,}\overline{34} = 2{,}343434\dots$ est rationnel (période : 34).

Définition 1.5 — *nombres réels.*

L'ensemble des **nombres réels** $\mathbb{R}$ contient tous les rationnels et tous les **irrationnels** — les nombres dont le développement décimal est infini et *non* périodique.

Exemple 1.3. $\sqrt{2} = 1{,}41421356\dots$ et $\pi = 3{,}14159265\dots$ sont irrationnels.

On a les inclusions strictes :

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

MA2 — Approfondissement

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Entre deux réels distincts $a < b$, il existe toujours un rationnel r tel que $a < r < b$. Pourtant $\mathbb{Q}$ est « beaucoup plus petit » que $\mathbb{R}$ au sens de Cantor : $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Ce paradoxe —

les rationnels sont partout, mais les réels sont infiniment plus nombreux — est l'une des grandes surprises de l'analyse.

1.3 Ordre des opérations et parenthèses

Proposition 1.6 — *ordre des opérations.*

Pour calculer une expression, on effectue les opérations dans l'ordre suivant :

1. les opérations **entre parenthèses** (les plus imbriquées d'abord) ;
2. les **puissances** (et racines) ;
3. les **multiplications et divisions**, de gauche à droite ;
4. les **additions et soustractions**, de gauche à droite.

Exemple 1.4. Calculer $7 - 2 \cdot 3 + 6$: on effectue d'abord $2 \cdot 3 = 6$, puis $7 - 6 + 6 = 7$.

Calculer $-14 - (2 - 4 - (6 - 3) + (4 - 3 - (1 + 2 - (-6 + 2) - 1) - 7) + 3)$: on traite les parenthèses les plus imbriquées en premier ; le résultat est 0.

1.4 Multiples, diviseurs et division euclidienne

Définition 1.7 — *divisibilité.*

Si $a = b \cdot k$ pour un certain entier k, on dit que a est un **multiple** de b, ou que b **divise** a, ou que b est un **diviseur** de a.

- Le **pgcd** de deux entiers est leur Plus Grand Diviseur Commun.
- Le **ppcm** de deux entiers est leur Plus Petit Multiple Commun.
- Un entier ≥ 2 est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
- Deux entiers sont **premiers entre eux** si leur pgcd vaut 1.

Définition 1.8 — *division euclidienne.*

Effectuer la **division euclidienne** de a par b ($b > 0$), c'est trouver q (quotient) et r (reste) tels que :

$$a = q \cdot b + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

Exemple 1.5. Division euclidienne de 183 par 12 : $183 = 15 \cdot 12 + 3$. Quotient : 15 ; reste : 3.

1.5 Fractions

Définition 1.9 — *fraction*.
Une **fraction** est un nombre de la forme $\frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ (numérateur) et $q \in \mathbb{Z}^*$ (dénominateur). Elle est **irréductible** si pgcd$(p, q) = 1$.
Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si $ad = bc$.

Proposition 1.10 — *opérations sur les fractions*.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{(réduire au même dénominateur)}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \text{(multiplier numérateurs et dénominateurs)}$$
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad \text{(diviser = multiplier par l'inverse)}$$

L'**inverse** de $\frac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$) est $\frac{b}{a}$.

Exemple 1.6. $\frac{3}{4} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} + \frac{5}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$.
$\frac{8}{60} \cdot \frac{18}{32} = \frac{2}{15} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{40}$.

1.6 Nombres rationnels — écriture décimale

Théorème 1.11 — *caractérisation des rationnels*.
Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est **fini ou infini périodique**.

Exemple 1.7. **Fraction vers décimale.** $\frac{17}{6} = 2{,}8\overline{3}$ (on divise jusqu'à retrouver un reste déjà obtenu).

Décimale vers fraction. Écrire $x = 2{,}\overline{34}$ comme fraction : $100x = 234{,}\overline{34}$, donc $100x - x = 232$, soit $x = \frac{232}{99}$.

1.7 Puissances

Définition 1.12 — *puissance.*
Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ facteurs}}$. De plus : $a^0 = 1$ (pour $a \neq 0$) et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (pour $a \neq 0$).

Théorème 1.13 — *propriétés des puissances.*
Pour $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Attention : en général $(a+b)^n \neq a^n + b^n$.

Exemple 1.8. $\dfrac{14^3 \cdot 9^4}{42^3 \cdot 9^2} = \dfrac{14^3}{42^3} \cdot 9^{4-2} = \left(\dfrac{14}{42}\right)^3 \cdot 81 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \cdot 81 = \dfrac{81}{27} = 3.$

Définition 1.14 — *notation scientifique.*
Un nombre $x \neq 0$ est en **notation scientifique** lorsqu'il s'écrit $x = a \cdot 10^n$, avec $1 \leq |a| < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$. Le nombre a est appelé la **mantisse**.

Exemple 1.9. $6430 = 6{,}43 \cdot 10^3$. $\quad -0{,}00370 = -3{,}70 \cdot 10^{-3}$.

Pyramides de puissances. On interprète x^{y^z} comme $x^{(y^z)}$ (de haut en bas). Exemple : $2^{4^2} = 2^{(4^2)} = 2^{16} = 65536$, et non $(2^4)^2 = 16^2 = 256$.
Estimer de grands nombres. On utilise souvent l'approximation $2^{10} \approx 10^3$. Exemple : $2^{2010} = (2^{10})^{201} \approx (10^3)^{201} = 10^{603}$.

1.8 Racines carrées

Définition 1.15 — *racine carrée.*
La **racine carrée** d'un réel $a \geq 0$ est l'unique réel $b \geq 0$ tel que $b^2 = a$. On note $b = \sqrt{a}$.
Attention : $\sqrt{16} = 4$ (pas ± 4 !). $\sqrt{-16}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.16 — *propriétés des racines carrées.*
Pour $a, b \geq 0$ et $b \neq 0$:

$$\sqrt{a^2} = a, \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exemple 1.10. **Simplifier** $\sqrt{32}$ **:** $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$.

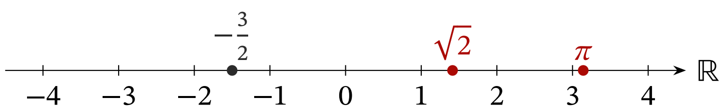
Rationaliser $\frac{9}{\sqrt{27}}$ **:** $\frac{9}{\sqrt{27}} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Conjugué : rationaliser $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$: $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Réduire : $2\sqrt{72} - 7\sqrt{18} = 12\sqrt{2} - 21\sqrt{2} = -9\sqrt{2}$.

1.9 Droite réelle et valeur absolue

Définition 1.17 — *droite réelle.*
Chaque réel correspond à un point sur une droite orientée, la **droite réelle**. Les rationnels et irrationnels y sont « mélangés » de façon dense.



Définition 1.18 — *valeur absolue.*
$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$
Géométriquement, $|x|$ est la **distance** entre x et 0; $|x-a|$ est la distance entre x et a.

Proposition 1.19 — *inégalité triangulaire.*
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Exemple 1.11. Résoudre $|x-3| < 2$: $-2 < x - 3 < 2 \Rightarrow x \in (1, 5)$.
Résoudre $|2x+1| > 3$: $2x + 1 > 3$ ou $2x + 1 < -3$, soit $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

1.10 Irrationalité

Théorème 1.20 — *irrationalité de $\sqrt{2}$.*
$\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exemple 1.12. $0{,}\overline{9} = 1$? Oui : posons $x = 0{,}\overline{9}$, alors $10x = 9{,}\overline{9}$, donc $10x - x = 9$, soit $x = 1$.

Exercices

Exercice 1.1. Calculer :

$$-(-7) + (-8 - (7 - 11) - 3(2 - 3 \cdot 5 - (4 \cdot (-2) - (-5) \cdot (-2))) - 7)$$

Exercice 1.2. Placer les parenthèses pour que les égalités soient vraies :

a) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 16$

b) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 41$

c) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 28$

d) $35 + 5 : 5 - 3 + 2 \cdot 4 = 4$

Exercice 1.3. Classer chaque nombre dans le plus petit ensemble ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) :

$$-7, \quad \frac{22}{7}, \quad \sqrt{9}, \quad \sqrt{3}, \quad 0{,}\overline{142857}, \quad \pi - 3.$$

Exercice 1.4. Donner le quotient et le reste de la division euclidienne :

a) 63 par 4

b) 218 par 12

c) 3245 par 135

d) 32 par 50

Exercice 1.5. Parmi les nombres $12, 30, 27, 246, 325, 4238$, indiquer ceux qui sont divisibles par 2, par 3, par 5.

Exercice 1.6. Un challenge sportif regroupe 105 filles et 175 garçons. On veut former des équipes comportant toutes le même nombre de filles et le même nombre de garçons, en utilisant tous les élèves.

a) Quel est le nombre maximal d'équipes ?

b) Combien de filles et de garçons dans chaque équipe ?

Exercice 1.7. Calculer à la main et donner le résultat sous forme irréductible :

a) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{12}$

b) $\dfrac{5}{21} + \dfrac{12}{15}$

c) $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{5} - \dfrac{5}{6}$

d) $\dfrac{120}{49} \cdot \dfrac{56}{144}$

e) $\dfrac{25}{36} \div \dfrac{5}{16}$

Exercice 1.8. Rendre irréductibles :

a) $\dfrac{216}{720}$

b) $\dfrac{1122}{1496}$

c) $\dfrac{1826688}{829280}$

Exercice 1.9. Écrire sous forme décimale :

a) $\dfrac{1}{45}$

b) $\dfrac{2}{9}$

c) $\dfrac{31}{7}$

d) $\dfrac{200}{17}$

Exercice 1.10. Écrire comme fraction irréductible :

a) $0{,}375$

b) $1{,}\overline{2}$

c) $2{,}\overline{34}$

d) $-1{,}234\overline{343}$

Exercice 1.11. Simplifier en donnant un résultat sans exposants négatifs ($a, b \in \mathbb{R}^*$) :

a) $\dfrac{14^3 \cdot 9^4}{42^3 \cdot 9^2}$

b) $\dfrac{(5a^3)^4 \cdot (b^4)^5}{(25(ab)^4)^2 \cdot (b^2)^6 \cdot a^4}$

c) $\dfrac{(b^3)^{-4} \cdot (a^{-1}b^2)^5}{(b^2b^3)^{-2}(b^6)^2} \cdot a^4$

Exercice 1.12. Écrire en notation scientifique :

a) 7283

b) $0{,}00149$

c) $0{,}67 \cdot 10^2$

d) $159 \cdot 10^{-5}$

Exercice 1.13. **[MA2]** Quel est le plus grand nombre : 2^{400} ou 10^{100} ?

Exercice 1.14. Simplifier (résultat sous forme $a\sqrt{b}$, b le plus petit possible) :

a) $\sqrt{32}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

c) $2\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$

d) $\sqrt{12} + \sqrt{3} - 2\sqrt{9} + (\sqrt{3})^3$

Exercice 1.15. Rationaliser le dénominateur :

a) $\dfrac{-9}{\sqrt{27}}$

b) $\dfrac{-4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{4}}$

Exercice 1.16. Résoudre et représenter sur la droite réelle :

a) $-1 \leq 2x + 3 < 7$

b) $|x - 1| \leq 4$

c) $|2x + 1| > 3$

Exercice 1.17. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Indication : supposer $\sqrt{2} = p/q$ irréductible et chercher une contradiction.

Exercice 1.18. Déterminer lesquelles des expressions suivantes sont rationnelles une fois évaluées :

$$\pi - \pi, \quad 3 \cdot \sqrt{2}, \quad 1 + 5{,}5, \quad \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{5}{20}}, \quad \frac{\pi}{5}, \quad 2^0, \quad 1024, \quad \sqrt{\frac{50}{2}}.$$

Exercice 1.19. La distance Terre-Soleil est $1{,}496 \cdot 10^8$ km. La vitesse de la lumière est $3 \cdot 10^5$ km/s. En combien de minutes la lumière parcourt-elle cette distance ?

Exercice 1.20. **Problème.** On note $n!$ (lire « n factorielle ») le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

a) Quels sont les trois derniers chiffres de $17!$?

b) Par combien de zéros $627!$ se termine-t-il ?

Exercice 1.21. **L'échiquier de Sessa.** Un sage demande comme récompense 1 grain de blé pour la première case d'un échiquier, 2 pour la deuxième, 4 pour la troisième, et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64^e case.

a) Quelle est la somme totale de grains ? *(Utiliser $2^{10} \approx 10^3$.)*

b) Un grain de blé pèse environ 50 mg. Comparer cette masse à celle de la Terre ($5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg).

Exercice 1.22. **[MA2]** Convertir $(10110)_2$ en base 10, puis convertir 47 en base 2.

Résumé du chapitre

Ensembles de nombres

- $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}$ = fractions = décimales finies ou périodiques
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = irrationnels ($\sqrt{2}$, π, ...)

Ordre des opérations

1. Parenthèses (les plus imbriquées d'abord)
2. Puissances et racines
3. $\times$ et $\div$ (de gauche à droite)
4. $+$ et $-$ (de gauche à droite)

Division euclidienne

$$a = q \cdot b + r, \quad 0 \leq r < b$$

- pgcd, ppcm, nombres premiers, premiers entre eux

Fractions

- Irréductible : pgcd$(p, q) = 1$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$
- Décimale périodique ↔ fraction

Puissances

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad (a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- Notation scientifique : $a \cdot 10^n, 1 \leq |a| < 10$

Racines carrées

- $\sqrt{a^2} = a \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- Simplifier : extraire les facteurs carrés
- Rationaliser : multiplier par le conjugué
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ en général

Valeur absolue

- $|x|$ = distance de x à 0
- $|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$
- Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$

QCM — Des nombres

Une seule réponse correcte par question.

1. $\sqrt{2}$ appartient à :

a) $\mathbb{N}$
b) $\mathbb{Q}$
c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
d) $\mathbb{Z}$

2. Le résultat de $3 + 2 \cdot 4^2 - 1$ est :

a) 100
b) 34
c) 200
d) 63

3. Le reste de la division euclidienne de 100 par 7 est :

a) 0
b) 1
c) 2
d) 14

4. $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ vaut :

a) $\frac{4}{10}$
b) $\frac{11}{12}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{5}{12}$

5. $0,\overline{3}$ est égal à :

a) $\frac{3}{10}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{3}{9}$
d) $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{9}$

6. $2^3 \cdot 2^4$ vaut :

a) 2^{12}
b) 4^7
c) 2^7
d) 2^1

7. L'écriture scientifique de $0{,}00307$ est :

a) $3{,}07 \cdot 10^{-3}$
b) $3{,}07 \cdot 10^{3}$
c) $30{,}7 \cdot 10^{-4}$
d) $0{,}307 \cdot 10^{-2}$

8. $\sqrt{50}$ simplifiée vaut :

a) $5\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{5}$
c) $25\sqrt{2}$
d) $10\sqrt{5}$

9. $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ avec dénominateur rationnel vaut :

a) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$
b) $2(\sqrt{3}+1)$
c) $2(\sqrt{3}-1)$
d) $4(\sqrt{3}+1)$

10. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ signifie que :

a) $\sqrt{2}$ est négatif
b) $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction
c) $\sqrt{2}$ n'existe pas
d) $\sqrt{2}$ est plus grand que 2

11. pgcd$(12, 18)$ vaut :

a) 3
b) 6
c) 9
d) 36

12. La solution de $|x - 2| \leq 3$ est :

a) $x \in (-1, 5)$
b) $x \in [-1, 5]$
c) $x \in (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$
d) $x \in [-3, 3]$

Réponses : 1-c 2-b 3-b 4-b 5-d 6-c 7-a 8-a 9-b 10-b 11-b 12-b

Chapitre 2

Théorie des ensembles

> *Dans une classe de 30 élèves, 18 apprennent le français, 15 apprennent l'allemand, et 4 n'apprennent ni l'un ni l'autre. Combien apprennent les deux langues ?*
> *Le problème semble simple. Il l'est — une fois qu'on dispose du bon langage. Ce langage, c'est la théorie des ensembles. Georg Cantor l'a inventée à la fin du XIX*[e] *siècle, non pour résoudre des problèmes d'emplois du temps, mais pour comprendre l'infini. Il découvrit quelque chose de stupéfiant : il y a plusieurs tailles d'infini, et certains infinis sont strictement plus grands que d'autres. Kronecker, son maître, le traita de « corrupteur de la jeunesse ». Hilbert, en revanche, déclara : « Du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser. »*
> *La réponse au problème des langues ? $30-4=26$ élèves étudient au moins une langue, et $18+15-26=7$ étudient les deux. On reviendra sur cette formule.*

Problème d'ouverture. Une compétition mathématique soviétique de 1961 posait la question suivante. Un groupe de 100 élèves a été interrogé : 28 aiment la physique, 30 les mathématiques, 42 la chimie ; 8 aiment la physique et les maths, 10 la physique et la chimie, 5 les maths et la chimie ; 3 aiment les trois disciplines.
Combien d'élèves n'aiment **aucune** de ces trois disciplines ?

2.1 Vocabulaire et notations

Définition 2.1 — *ensemble et élément.*

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**. On note :

- $x \in A$: « x **appartient** à A »
- $x \notin A$: « x **n'appartient pas** à A »
- $\varnothing$ ou $\{\}$: l'**ensemble vide** (ne pas confondre avec $\{\varnothing\}$!)

Définition 2.2 — *inclusion*.

$A \subseteq B$ signifie que tout élément de A appartient aussi à B : « A est **inclus** dans B ». Si de plus $A \neq B$, on écrit $A \subsetneq B$ (**strictement inclus**). On utilise $A \nsubseteq B$ quand A n'est pas inclus dans B.

Remarque 2.1. Ne pas confondre $\in$ (appartenance d'un *élément*) et $\subseteq$ (inclusion d'un *ensemble*) : $3 \in \{1; 2; 3\}$ mais $\{3\} \subseteq \{1; 2; 3\}$. De même : 0, $\{0\}$, $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$ sont quatre objets distincts.

Définition 2.3 — *notations spéciales*.

Pour un ensemble A de nombres :

- $A^* = A \setminus \{0\}$: éléments de A sauf zéro
- $A_+ = \{x \in A \mid x \geq 0\}$: éléments positifs ou nuls
- $A_- = \{x \in A \mid x \leq 0\}$: éléments négatifs ou nuls

Exemples : $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$; $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots; -3; -2; -1\}$.

2.2 Opérations sur les ensembles

Définition 2.4 — *union, intersection, différence*.

Soient A et B deux ensembles :

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (**union**, « A ou B »)
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ (**intersection**, « A et B »)
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ (**différence**, « A sans B »)

Le « ou » de l'union est **non exclusif** : $A \cup B$ contient aussi les éléments qui sont dans les deux.

Exemple 2.1. $A = \{-5; 3; 4; 6; 8; 9\}$ et $B = \{2; 3; 4; 8; 10\}$:

- $A \cup B = \{-5; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$
- $A \cap B = \{3; 4; 8\}$
- $A \setminus B = \{-5; 6; 9\}$
- $B \setminus A = \{2; 10\}$

Proposition 2.5 — *formule d'inclusion-exclusion*.

Pour deux ensembles finis A et B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Pour trois ensembles :

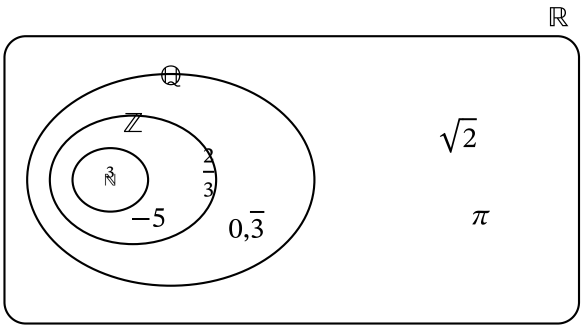
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Ici $|E|$ désigne le **cardinal** de E (son nombre d'éléments).

2.3 Diagrammes de Venn

Définition 2.6 — *diagramme de Venn*.
Un **diagramme de Venn** représente des ensembles par des régions fermées dans un rectangle (l'ensemble universel). Chaque élément occupe la région correspondant à sa caractérisation la plus précise.

Exemple 2.2. Représentation des ensembles de nombres :



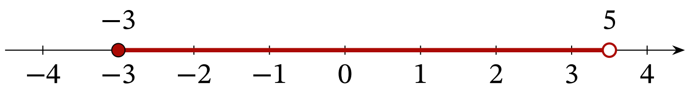
2.4 Intervalles réels

Définition 2.7 — *intervalles*.
Un **intervalle** est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[a;b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{(fermé des deux côtés)}\\
]a;b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{(ouvert des deux côtés)}\\
[a;b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{(semi-ouvert à droite)}\\
]a;b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{(semi-ouvert à gauche)}\\
[a;+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} &&\\
]-\infty;b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} &&
\end{aligned}$$

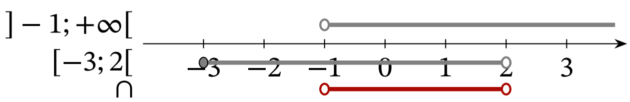
Un crochet **fermé** ([ou]) indique que la borne est incluse ; un crochet **ouvert** (] ou [) indique qu'elle est exclue. Les bornes $\pm\infty$ sont **toujours** exclues.

Exemple 2.3. Représentation de $[-3;5[$ sur la droite réelle :



Un disque plein • indique une borne incluse, un cercle vide ∘ une borne exclue.

Exemple 2.4. Déterminer $]-1;+\infty[\cap[-3;2[$:



$]-1;+\infty[\cap[-3;2[=]-1;2[$.

Produit cartésien. Le **produit cartésien** de A et B est :

$$A \times B = \{(a;b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Si $|A| = m$ et $|B| = n$, alors $|A \times B| = mn$. Le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les couples de réels.

Exercices

Exercice 2.1. Écrire avec des notations ensemblistes :

a) L'ensemble comprenant les nombres 2, 5, 11, -2 et 1.

b) L'ensemble des entiers naturels compris entre 22 et 2222 (inclus).

c) L'ensemble des entiers relatifs strictement négatifs.

d) L'ensemble des nombres rationnels strictement positifs.

Exercice 2.2. Compléter par le ou les symboles adéquats ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\subsetneq$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $=$) :

a) $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$

b) $-33 \dots \mathbb{N}$

c) $\{33\} \dots \mathbb{N}$

d) $\{3;4;5\} \cup \{5\} = \dots$

e) $\{3;4;5\} \cap \{5\} = \dots$

f) $\{3;4;5\} \setminus \{5\} = \dots$

g) $\{3;4;5;6;7\} \dots \{6;7;8;9\} = \{6;7\}$

h) $\mathbb{N} \dots \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

i) $\{3;4;5;6;7\} \dots \{5;6;7;8;9\} = \{3;4\}$

j) $\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \dots$

Exercice 2.3. Transcrire en notations ensemblistes :

a) « L'ensemble des nombres rationnels est inclus dans l'ensemble des nombres réels. »

b) « $-\frac{3}{4}$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}$. »

c) « L'ensemble des entiers entre -12 et 13 »

d) « L'ensemble des réels strictement supérieurs à $\sqrt{2}$ »

Et inversement, traduire en français :

e) $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

f) $\pi \notin \mathbb{Q}$

Exercice 2.4. Quelles sont les significations des notations suivantes ? Sont-elles toutes distinctes ?

$$0 \qquad \{0\} \qquad \varnothing \qquad \{\varnothing\}$$

Exercice 2.5. Soient $A = \{-5; 3; 4; 6; 8; 9\}$ et $B = \{2; 3; 4; 8; 10\}$. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$.

Exercice 2.6. Trouver les ensembles C et D sachant que :

a) $C \cup D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \cap D = \{2; 3; 4\}$, $1 \notin D \setminus C$ et $5 \notin C \setminus D$.

b) $C \cup D = \{2; 3; 4; 5\}$ et $C \cap D = \{2; 4\}$. Donner toutes les possibilités.

Exercice 2.7. Représenter les ensembles $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ par un diagramme de Venn, et y placer :

$$-420\ ; \quad \frac{57}{8}\ ; \quad 2^{333}\ ; \quad 10^{-6}\ ; \quad -29{,}23\overline{64}\ ; \quad \sqrt{22}\ ; \quad \frac{0}{12}\ ; \quad 5{,}\overline{9}.$$

Exercice 2.8. Pour chacune des expressions suivantes, représenter par un diagramme de Venn à trois cercles A, B, C et hachurer la région correspondante :

a) $(A \cap B) \cup C$

b) $A \cap (B \cup C)$

c) $(A \cap B) \setminus C$

d) $(B \cup C) \setminus (A \cap B)$

e) $(A \cap B) \setminus (B \cup C)$

Exercice 2.9. Écrire sous forme d'intervalle les ensembles représentés :

a) de -5 à -1 (borne gauche incluse, droite exclue)

b) de -7 à 2 (borne gauche exclue, droite incluse)

c) •———• de -3 à 4 (les deux incluses)

d) flèche vers $+\infty$ depuis -2 (inclus)

Exercice 2.10. Écrire sous forme d'intervalle, puis représenter sur la droite réelle :

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 8\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 45\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \pi\}$

e) « L'ensemble des réels strictement supérieurs à $\sqrt{2}$ »

f) « L'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 8 » *(attention : entiers, pas réels !)*

Exercice 2.11. Dans un parc de loisirs, soit t la taille d'un enfant en mètres. Écrire pour chaque attraction l'intervalle des tailles autorisées :

a) Réservée aux enfants de **moins de** $1{,}40$ m

b) Réservée aux enfants d'**au moins** $1{,}40$ m

c) Interdite aux enfants de $1{,}40$ m **et moins**

d) Interdite aux enfants de **plus de** $1{,}40$ m

Exercice 2.12. Soient $A =]-15; 12]$ et $B = [-2; 15[$.

a) Représenter A et B sur la même droite réelle.

b) Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$; donner les réponses sous forme d'intervalles et sous forme $\{x \in \mathbb{R} \mid \ldots\}$.

Exercice 2.13. On considère :

$$A =]-5; 2], \quad B = [0; 5[, \quad C =]-3; 3[, \quad D = [-3; 3].$$

a) Représenter les quatre intervalles sur la droite réelle.

b) Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $D \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, $A \setminus C$ et $D \setminus C$.

Exercice 2.14. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 2\} & E &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\} & F &= \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\} & G &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x\} \\ D &= \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\} & H &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\} \end{aligned}$$

a) Écrire chacun sous forme d'intervalle.

b) Représenter graphiquement.

c) Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $D \cap E$, $E \cap G$, $B \cup E$, $F \cup G$, $A \setminus C$, $D \setminus C$ et $G \setminus H$.

Exercice 2.15. Dans une classe de 30 élèves, 18 font du sport, 15 jouent d'un instrument, et 4 ne font ni l'un ni l'autre. Combien font les deux activités ?

Exercice 2.16. Résoudre le problème d'ouverture : parmi 100 élèves, 28 aiment la physique (P), 30 les maths (M), 42 la chimie (C), $|P \cap M| = 8$, $|P \cap C| = 10$, $|M \cap C| = 5$, $|P \cap M \cap C| = 3$. Combien n'aiment aucune des trois disciplines ?

Exercice 2.17. **[MA2]** Soit $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{a; b\}$.

a) Lister tous les éléments de $A \times B$.

b) Vérifier : $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

c) Combien d'éléments a $A \times A$? Les lister.

d) Le plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: quelle est la signification géométrique d'un élément $(x; y)$?

Résumé du chapitre

Notations fondamentales

- $x \in A$ (appartient) $x \notin A$ (n'appartient pas) $\varnothing$ (ensemble vide)
- $A \subseteq B$ (inclus) $A \subsetneq B$ (strictement inclus)
- $A^* = A \setminus \{0\}$ A_+ (positifs) A_- (négatifs)
- Ne pas confondre : 0, $\{0\}$, $\varnothing$, $\{\varnothing\}$

Opérations

- $A \cup B$: union $A \cap B$: intersection $A \setminus B$: différence
- Formule : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Intervalles

- $[a; b]$ fermé $]a; b[$ ouvert $[a; b[$, $]a; b]$ semi-ouverts
- $\pm\infty$ toujours exclu : $[a; +\infty[$, $]-\infty; b]$
- $\bullet$ = borne incluse $\circ$ = borne exclue

Ensembles de nombres

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

QCM — Théorie des ensembles

Une seule réponse correcte par question.

1. $\{3; 4; 5\} \cap \{5; 6; 7\} = ?$

a) $\{3; 4; 5; 6; 7\}$
b) $\{5\}$
c) $\varnothing$
d) $\{3; 4\}$

2. Lequel de ces symboles exprime l'**appartenance** d'un élément ?

a) $\subseteq$
b) $\subsetneq$
c) $\in$
d) $=$

3. Laquelle de ces assertions est **fausse** ?

a) $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$
b) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
c) $\{0\} = \varnothing$
d) $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

4. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ est égal à :

a) $\mathbb{Z}$
b) $\mathbb{N}$
c) $\mathbb{Z}_-^*$
d) $\mathbb{Z}_-$

5. $|A| = 10$, $|B| = 7$, $|A \cap B| = 3$. $|A \cup B| = ?$

a) 20
b) 17
c) 14
d) 10

6. $]-1; +\infty[\cap [-3; 2[= ?$

a) $]-3; 2[$
b) $]-1; 2[$
c) $[-3; +\infty[$
d) $]-1; +\infty[$

7. L'intervalle $[-2; 3[$ correspond à :

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}$

8. $]-\infty; 4] \cup [2; +\infty[= ?$

a) $[2; 4]$
b) $]-\infty; 2]$
c) $\mathbb{R}$
d) $[2; +\infty[$

Réponses : 1-b 2-c 3-c 4-d 5-c 6-b 7-b 8-c

Chapitre 3

Argumenter et démontrer

> *Vers 300 avant notre ère, Euclide d'Alexandrie rassemble dans ses Éléments tout ce que les Grecs savent de la géométrie. Mais ce qui rend ce livre unique n'est pas ce qu'il contient — c'est la manière dont il le dit. Euclide part de cinq postulats simples, admis sans preuve, et en déduit des centaines de théorèmes par la seule force du raisonnement. Aucune figure n'est une preuve. Aucune mesure n'est une preuve. Seule la logique compte. Deux mille ans plus tard, nous faisons exactement pareil.*

3.1 Propositions et connecteurs logiques

Définition 3.1 — *proposition*.
Une **proposition** (ou **énoncé**) est une phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse — pas les deux à la fois.

Exemple 3.1. « $2 + 2 = 4$ » est une proposition vraie. « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ » est une proposition fausse. « $x > 0$ » n'est pas une proposition (valeur de x inconnue) — c'est un **prédicat**.

Les **connecteurs logiques** permettent de combiner des propositions :

Définition 3.2 — *négation, conjonction, disjonction*.
Soient P et Q deux propositions.

- **Négation** $\neg P$: vraie si P est fausse.
- **Conjonction** $P \wedge Q$: vraie si P et Q sont toutes deux vraies.
- **Disjonction** $P \vee Q$: vraie si au moins l'une des deux est vraie.

3.2 Implication et équivalence

Définition 3.3 — *implication.*
L'**implication** $P \Rightarrow Q$ (lire : « P implique Q » ou « si P alors Q ») est fausse uniquement quand P est vraie et Q est fausse.

Dans $P \Rightarrow Q$, on appelle P l'**hypothèse** et Q la **conclusion**.

Définition 3.4 — *réciproque et contraposée.*
Soit l'implication $P \Rightarrow Q$.
- Sa **réciproque** est $Q \Rightarrow P$.
- Sa **contraposée** est $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Théorème 3.5 — *contraposée.*
Une implication et sa contraposée sont toujours simultanément vraies ou fausses :

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

En revanche, une implication et sa réciproque sont indépendantes.

Exemple 3.2. Implication : « si n est pair, alors n^2 est pair ».
Contraposée : « si n^2 est impair, alors n est impair ». (équivalente)
Réciproque : « si n^2 est pair, alors n est pair ». (vraie aussi, mais c'est un théorème distinct !)

Définition 3.6 — *équivalence.*
L'**équivalence** $P \iff Q$ signifie $P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$. On dit que P et Q sont **équivalentes**.

3.3 Quantificateurs

Définition 3.7 — *quantificateurs.*

- $\forall x \in E,\ P(x)$: « pour tout x dans E, $P(x)$ est vraie » (**quantificateur universel**).
- $\exists x \in E,\ P(x)$: « il existe au moins un x dans E tel que $P(x)$ est vraie » (**quantificateur existentiel**).

Proposition 3.8 — *négation des quantificateurs.*

$$\neg\big(\forall x \in E,\ P(x)\big) \iff \exists x \in E,\ \neg P(x).$$
$$\neg\big(\exists x \in E,\ P(x)\big) \iff \forall x \in E,\ \neg P(x).$$

Exemple 3.3. La négation de « tout entier naturel est pair » est « il existe un entier naturel qui n'est pas pair » (vrai : 1).

3.4 Modes de raisonnement

Définition 3.9 — *raisonnement direct.*
On démontre $P \Rightarrow Q$ en partant de P et en enchaînant des implications jusqu'à obtenir Q.

Définition 3.10 — *raisonnement par contraposée.*
On démontre $P \Rightarrow Q$ en prouvant $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Utile quand la contraposée est plus facile à manipuler.

Définition 3.11 — *raisonnement par l'absurde.*
On suppose P vraie et Q fausse (i.e. $\neg Q$ vraie), et on cherche une **contradiction**. Si on en trouve une, alors $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Définition 3.12 — *contre-exemple.*
Pour réfuter $\forall x \in E,\ P(x)$, il suffit d'exhiber **un seul** $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ est fausse.

Exemple 3.4. Réfuter : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 41$ est premier ».
Contre-exemple : $n = 40$ donne $40^2 + 40 + 41 = 41^2$, non premier.

Raisonnement par récurrence. Pour démontrer $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$:

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : supposer $P(n)$ vraie pour un n quelconque et démontrer $P(n+1)$.

Exemple. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Init. : $n = 1 : 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$. ✓

Hér. : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. ✓

Exercices

Exercice 3.1. Écrire la contraposée et la réciproque de chaque implication. Préciser si la réciproque est vraie ou fausse.

a) Si n est divisible par 4, alors n est pair.

b) Si $x > 0$, alors $x^2 > 0$.

c) Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Exercice 3.2. Démontrer par l'absurde que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 3.3. Écrire la négation de chaque proposition, puis dire si la proposition originale est vraie ou fausse.

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$

Exercice 3.4. Réfuter par un contre-exemple :

a) « Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n^2$ ».

b) « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x + 1| = |x| + 1$ ».

Exercice 3.5. Démontrer directement que le produit de deux entiers impairs est impair.

Résumé du chapitre

Implication et équivalence

- $P \Rightarrow Q$: fausse uniquement si P vraie et Q fausse
- Contraposée de $P \Rightarrow Q$: $\neg Q \Rightarrow \neg P$ — **toujours équivalente**
- Réciproque de $P \Rightarrow Q$: $Q \Rightarrow P$ — **indépendante**
- $P \iff Q$: $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

Quantificateurs

- $\forall x \in E,\ P(x)$ — vrai pour *tous* les x
- $\exists x \in E,\ P(x)$ — vrai pour *au moins un* x
- Négation : $\neg(\forall x,\ P) \iff \exists x,\ \neg P$
- Négation : $\neg(\exists x,\ P) \iff \forall x,\ \neg P$

Modes de raisonnement

- **Direct** : chaîne d'implications $P \Rightarrow \cdots \Rightarrow Q$
- **Contraposée** : démontrer $\neg Q \Rightarrow \neg P$
- **Absurde** : supposer $P \wedge \neg Q$ et trouver une contradiction
- **Contre-exemple** : un seul suffit pour réfuter un $\forall$

QCM — Argumenter et démontrer

Une seule réponse correcte par question.

1. Quelle est la contraposée de « si n est pair, alors n^2 est pair » ?

a) Si n^2 est pair, alors n est pair.
b) Si n est impair, alors n^2 est impair.
c) Si n^2 est impair, alors n est impair.
d) Si n est pair, alors n^2 est impair.

2. L'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse quand :

a) P est fausse et Q est vraie
b) P est vraie et Q est vraie
c) P est vraie et Q est fausse
d) P est fausse et Q est fausse

3. Quelle est la négation de $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$?

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$
b) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$
c) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
d) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$

4. Pour réfuter l'assertion « tout nombre premier est impair », on peut :

a) Montrer que tous les nombres premiers sont impairs.
b) Exhiber un nombre premier pair.
c) Montrer qu'il existe un nombre impair non premier.
d) Utiliser la contraposée.

5. Une implication et sa réciproque sont :

a) Toujours toutes deux vraies.
b) Toujours simultanément vraies ou fausses.
c) Indépendantes — l'une peut être vraie et l'autre fausse.
d) Toujours toutes deux fausses.

6. Dans un raisonnement par l'absurde pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on suppose :

a) P vraie et Q vraie
b) P fausse et Q vraie
c) P vraie et Q fausse
d) P fausse et Q fausse

7. $P \iff Q$ est équivalent à :

a) $P \Rightarrow Q$ seulement
b) $Q \Rightarrow P$ seulement
c) $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
d) $\neg P \Rightarrow \neg Q$

8. Laquelle de ces propositions est vraie ?

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$
b) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$
c) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
d) $\exists x \in \mathbb{R},\ x + 1 < x$

Réponses : 1-c 2-c 3-b 4-b 5-c 6-c 7-c 8-c

Chapitre 4

Introduction aux fonctions

> *Leibniz, à la fin du XVII^{e} siècle, cherche un mot pour désigner une idée simple et puissante : la dépendance entre deux grandeurs. Quand la température change, la pression change. Quand le temps passe, la position change. Quand le revenu augmente, la consommation augmente. Il invente le mot fonction — du latin functio, accomplissement. Une fonction accomplit quelque chose : elle transforme une entrée en une sortie. Toute la mathématique moderne repose sur cette idée.*

4.1 Définition et vocabulaire

Définition 4.1 — *fonction.*

Une **fonction** f de A vers B est une règle qui associe à chaque élément $x \in A$ **exactement un** élément $f(x) \in B$. On note $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

- A est le **domaine** (ou ensemble de départ)
- B est le **codomaine** (ou ensemble d'arrivée)
- $f(x)$ est l'**image** de x par f
- x est un **antécédent** de $f(x)$

Remarque 4.1. Chaque $x \in A$ a exactement une image. En revanche, un même $y \in B$ peut avoir plusieurs antécédents, ou aucun.

Exemple 4.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. L'image de 3 est $f(3) = 9$. Les antécédents de 9 sont 3 et -3. Le nombre -1 n'a pas d'antécédent.

4.2 Domaine de définition

Définition 4.2 — *domaine de définition.*

Le **domaine de définition** D_f d'une fonction f est l'ensemble de toutes les valeurs x pour lesquelles $f(x)$ est bien définie.

Exemple 4.2.

- $f(x) = \dfrac{1}{x-2} : D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $g(x) = \sqrt{x-1} : D_g = [1, +\infty)$
- $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-3} : D_h = [0, +\infty) \setminus \{3\} = [0, 3) \cup (3, +\infty)$

4.3 Représentation graphique

Définition 4.3 — *graphe*.
Le **graphe** de $f : A \to B$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$:

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Proposition 4.4 — *test de la droite verticale*.
Une courbe du plan est le graphe d'une fonction si et seulement si toute droite verticale la coupe en **au plus un point**.

4.4 Monotonie

Définition 4.5 — *fonction croissante / décroissante*.
Soit f définie sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si : $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f est **décroissante** sur I si : $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- f est **strictement croissante** (resp. décroissante) si les inégalités sont strictes.

4.5 Extrema

Définition 4.6 — *maximum et minimum*.

- f admet un **maximum global** en x_0 si $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- f admet un **minimum global** en x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- On parle d'**extremum local** si l'inégalité ne vaut que sur un voisinage de x_0.

Exemple 4.3. $f(x) = x^2$ admet un minimum global en $x_0 = 0$ avec $f(0) = 0$. Elle n'a pas de maximum.

4.6 Image et préimage

Définition 4.7 — *image d'un ensemble.*
L'**image** de $A' \subseteq D_f$ par f est :

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}.$$

L'**image totale** de f est $f(D_f)$, notée aussi $\operatorname{Im}(f)$.

Définition 4.8 — *préimage.*
La **préimage** (ou image réciproque) de $B' \subseteq B$ est :

$$f^{-1}(B') = \{x \in D_f \mid f(x) \in B'\}.$$

Exemple 4.4. Pour $f(x) = x^2$: $f(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\}$. $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$. $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$.

Parité et périodicité.
f est **paire** si D_f est symétrique par rapport à 0 et $f(-x) = f(x)$ pour tout x — graphe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ — graphe symétrique par rapport à l'origine.
f est **périodique de période** $T > 0$ si $f(x + T) = f(x)$ pour tout x — le graphe se répète tous les T unités.
Exemples. $x \mapsto x^2$ est paire. $x \mapsto x^3$ est impaire. $x \mapsto \sin x$ est impaire et périodique de période 2π.

Exercices

Exercice 4.1. Déterminer le domaine de définition de chaque fonction :

a) $f(x) = \dfrac{3}{x+5}$

b) $g(x) = \sqrt{2x - 6}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

d) $k(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Exercice 4.2. Soit $f(x) = 2x^2 - 3$.

a) Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{3})$.

b) Trouver les antécédents de 5.

c) Quel est l'ensemble image $\mathrm{Im}(f)$?

Exercice 4.3. Soit $f(x) = -x^2 + 4x$.

a) Montrer que f est croissante sur $(-\infty, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty)$.

b) Quel est le maximum de f ?

Exercice 4.4. Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont des graphes de fonctions ? Justifier avec le test de la droite verticale.

a) Un cercle de rayon 1 centré à l'origine.

b) La parabole $y = x^2 - 1$.

c) La courbe définie par $x = y^2$.

Exercice 4.5. Soit $f(x) = |x| - 1$.

a) Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

b) Calculer $f^{-1}([-1, 1])$.

c) f admet-elle un minimum ? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Résumé du chapitre

Vocabulaire

- $f : A \to B, x \mapsto f(x)$ — un x a exactement une image
- D_f — domaine de définition (là où f est bien définie)
- $f(x)$ — image de x | x — antécédent de $f(x)$
- $\mathrm{Im}(f)$ — ensemble de toutes les images

Domaines courants

- $\frac{1}{g(x)}$: exclure les zéros de g
- $\sqrt{g(x)}$: résoudre $g(x) \geq 0$
- Combinaison : intersecter les contraintes

Monotonie et extrema

- Croissante sur I : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- Décroissante sur I : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- Maximum global en x_0 : $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout x
- Test graphique : droite verticale coupe le graphe en au plus un point

---

QCM — Introduction aux fonctions

Une seule réponse correcte par question.

1. Quel est le domaine de définition de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$?

a) $[3, +\infty)$
b) $(3, +\infty)$
c) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
d) $(-\infty, 3)$

2. Soit $f(x) = x^2 - 1$. Quels sont les antécédents de 3 ?

a) $x = 2$ seulement
b) $x = \pm\sqrt{2}$
c) $x = \pm 2$
d) Pas d'antécédent

3. Laquelle de ces courbes n'est **pas** le graphe d'une fonction ?

a) $y = x^3$
b) $y = \sqrt{x}$
c) $x^2 + y^2 = 1$
d) $y = |x|$

4. $f(x) = -x + 2$ est :

a) Croissante sur $\mathbb{R}$
b) Décroissante sur $\mathbb{R}$
c) Croissante sur $(0, +\infty)$ et décroissante sur $(-\infty, 0)$
d) Ni croissante ni décroissante

5. Quel est l'ensemble image de $f(x) = x^2 + 1$?

a) $\mathbb{R}$
b) $[0, +\infty)$
c) $[1, +\infty)$
d) $(1, +\infty)$

6. Soit $f(x) = 2x - 4$. Quel est $f^{-1}(\{0\})$?

a) $\{0\}$
b) $\{-4\}$
c) $\{2\}$
d) $\{4\}$

7. Quelle affirmation est vraie pour toute fonction f ?

a) Tout élément du codomaine a un antécédent.
b) Tout élément du domaine a exactement une image.
c) Une image ne peut avoir qu'un seul antécédent.
d) Le domaine et le codomaine sont toujours égaux.

8. $f(x) = |x|$ admet :

a) Un maximum en $x = 0$
b) Un minimum en $x = 0$
c) Aucun extremum
d) Un minimum en $x = 1$

Réponses : 1-b 2-c 3-c 4-b 5-c 6-c 7-b 8-b

Chapitre 5

Fonctions affines et linéaires

> *En 1637, René Descartes publie un essai intitulé La Géométrie, annexe à son Discours de la méthode. Il y propose quelque chose de révolutionnaire : représenter une courbe par une équation, et une équation par une courbe. La droite — objet géométrique connu depuis Euclide — devient soudain une équation du premier degré. Et une équation du premier degré devient une droite. Ce mariage de l'algèbre et de la géométrie est à l'origine de toute la physique moderne. La pente d'une droite, c'est déjà la vitesse, le taux de change, le gradient.*

5.1 Fonction linéaire

Définition 5.1 — *fonction linéaire*.
Une **fonction linéaire** est une fonction de la forme

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est appelé le **coefficient directeur**. Son graphe est une droite passant par l'origine.

Exemple 5.1. $f(x) = 3x$: pour chaque unité gagnée en x, on gagne 3 unités en y. $f(x) = -2x$: fonction décroissante, pente -2.

5.2 Fonction affine

Définition 5.2 — *fonction affine.*
Une **fonction affine** est une fonction de la forme

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est le **coefficient directeur** (ou **pente**) et $b \in \mathbb{R}$ est l'**ordonnée à l'origine**. Son graphe est une droite.

Remarque 5.1. Une fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine avec $b = 0$. Une fonction constante correspond à $a = 0$.

Le signe de a détermine la monotonie :
- $a > 0$: f strictement croissante
- $a = 0$: f constante
- $a < 0$: f strictement décroissante

5.3 Équation d'une droite

Définition 5.3 — *formes d'une équation de droite.*
Soit une droite $\mathcal{D}$ du plan.
- **Forme pente-ordonnée à l'origine** : $y = ax + b$
- **Forme générale** : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

Une droite verticale $x = k$ n'est pas le graphe d'une fonction.

Proposition 5.4 — *droite par deux points.*
La droite passant par (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_1 \neq x_2$ a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Exemple 5.2. Droite passant par $A(1, 2)$ et $B(3, 8)$:

$$a = \frac{8 - 2}{3 - 1} = 3.$$

Équation : $y = 3x + b$. En substituant A : $2 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$. Donc $y = 3x - 1$.

Proposition 5.5 — *parallélisme et perpendicularité.*
Soient deux droites de pentes a_1 et a_2.
- Parallèles $\iff a_1 = a_2$
- Perpendiculaires $\iff a_1 \cdot a_2 = -1$

5.4 Systèmes d'équations linéaires

Définition 5.6 — *système linéaire* 2×2.
Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** est de la forme :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Géométriquement, résoudre ce système revient à trouver l'**intersection** de deux droites. Trois cas sont possibles :

- **Une solution** : droites sécantes (pentes différentes)
- **Aucune solution** : droites parallèles distinctes
- **Infinité de solutions** : droites confondues

Théorème 5.7 — *méthode de substitution / combinaison*.
On résout un système 2×2 par :
- **Substitution** : exprimer une inconnue en fonction de l'autre et substituer.
- **Combinaison linéaire** : multiplier les équations par des scalaires et les additionner pour éliminer une inconnue.

Exemple 5.3. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$
Combinaison : addition des deux équations : $3x = 6 \Rightarrow x = 2$. Substitution : $y = 5 - 2 \cdot 2 = 1$. Solution : $(x, y) = (2, 1)$.

Interprétation matricielle. Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ s'écrit $M\mathbf{v} = \mathbf{w}$ avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.
Le déterminant $\det(M) = ad - bc$ détermine la nature des solutions : $\det(M) \neq 0 \Rightarrow$ solution unique ; $\det(M) = 0 \Rightarrow$ aucune solution ou infinité.

Exercices

Exercice 5.1. Déterminer l'équation de la droite :

a) passant par $A(0, 3)$ et $B(2, 7)$

b) passant par $C(-1, 4)$ et parallèle à $y = 2x - 1$

c) passant par $D(2,5)$ et perpendiculaire à $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Exercice 5.2. Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement :

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

Exercice 5.3. Un plombier facture un déplacement fixe de 60 CHF plus 80 CHF par heure de travail.

a) Écrire la fonction $f(t)$ donnant la facture en fonction du nombre d'heures t.

b) Combien coûte une intervention de $2{,}5$ heures ?

c) Au bout de combien d'heures la facture atteint-elle 300 CHF ?

Exercice 5.4. Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites $d_1 : y = \frac{1}{2}x + 3$ et $d_2 : y = -x + 6$.

Exercice 5.5. Soit $\mathcal{D} : 2x - 3y + 6 = 0$.

a) Mettre $\mathcal{D}$ sous la forme $y = ax + b$.

b) Écrire l'équation de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $P(4,1)$.

Résumé du chapitre

Fonctions

- Linéaire : $f(x) = ax$ — droite par l'origine
- Affine : $f(x) = ax + b$ — droite quelconque
- $a > 0$: croissante $a = 0$: constante $a < 0$: décroissante

Droites

- Pente par deux points : $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Parallèles $\iff$ mêmes pentes : $a_1 = a_2$
- Perpendiculaires $\iff$ $a_1 \cdot a_2 = -1$
- Droite verticale $x = k$: pas une fonction

Systèmes 2×2

- Méthodes : substitution ou combinaison linéaire
- Une solution : droites sécantes
- Aucune solution : droites parallèles distinctes
- Infinité : droites confondues

QCM — Fonctions affines et linéaires

Une seule réponse correcte par question.

1. La pente de la droite passant par $A(1,3)$ et $B(4,9)$ est :

a) $\frac{1}{2}$
b) 2
c) 3
d) 6

2. Quelle droite est parallèle à $y = 3x - 1$?

a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$
b) $y = 3x + 5$
c) $y = -3x - 1$
d) $3y = x - 1$

3. La droite perpendiculaire à $y = 2x + 1$ passant par l'origine a pour équation :

a) $y = 2x$
b) $y = -2x$
c) $y = \frac{1}{2}x$
d) $y = -\frac{1}{2}x$

4. Le système $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 9 \end{cases}$ a :

a) Une solution unique
b) Une infinité de solutions
c) Aucune solution
d) Deux solutions

5. L'ordonnée à l'origine de la droite $3x - 2y + 8 = 0$ est :

a) -4
b) 3
c) 4
d) 8

6. Un taxi facture 3 CHF de prise en charge plus 2 CHF par kilomètre. Pour 12 CHF, on peut parcourir :

a) 4 km
b) $4{,}5$ km
c) 6 km
d) $7{,}5$ km

7. Quel est le point d'intersection de $y = x + 1$ et $y = -x + 5$?

a) $(1, 2)$
b) $(2, 3)$
c) $(3, 2)$
d) $(4, 1)$

8. La fonction $f(x) = -4x + 7$ est :

a) Croissante sur $\mathbb{R}$
b) Décroissante sur $\mathbb{R}$
c) Croissante sur $(0, +\infty)$
d) Ni croissante ni décroissante

Réponses : 1-b 2-b 3-d 4-c 5-c 6-b 7-b 8-b

Chapitre 6

Calcul littéral

Bagdad, IX^{e} siècle. Un savant persan nommé Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi rédige un traité intitulé Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala — « Le livre abrégé sur le calcul par la complétion et la balance ». Le mot al-jabr donnera algèbre. Al-Khwarizmi n'utilise pas de lettres : il écrit tout en mots. Mais l'idée est là — manipuler des quantités inconnues comme si elles étaient connues, et trouver leur valeur par le raisonnement. Trois siècles plus tard, les lettres feront leur apparition. L'algèbre moderne était née.

6.1 Expressions algébriques

Définition 6.1 — *expression algébrique.*
Une **expression algébrique** est une combinaison de nombres, de variables et d'opérations (+, −, ×, ÷, puissances, racines). Une **variable** est une lettre représentant une quantité indéterminée.

Définition 6.2 — *monôme et polynôme.*
Un **monôme** est un produit d'un nombre (le **coefficient**) et de puissances de variables : $3x^2y$, $-5x$, 7.
Un **polynôme** est une somme de monômes. Le **degré** d'un polynôme en x est l'exposant le plus élevé.

Exemple 6.1. $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 7$ est un polynôme de degré 3. Ses **termes semblables** sont des monômes de même degré : $3x^2 + 5x^2 = 8x^2$.

6.2 Développement

Théorème 6.3 — *distributivité.*

Pour tous réels a, b, c :

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Plus généralement :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Définition 6.4 — *identités remarquables.*

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\\(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemple 6.2. $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
$(x - 5)(x + 5) = x^2 - 25$.
$(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$.

6.3 Factorisation

Définition 6.5 — *factorisation.*

Factoriser une expression, c'est l'écrire comme un **produit** de facteurs plus simples. C'est l'opération inverse du développement.

Les techniques principales sont :

- **Facteur commun** : $6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$
- **Identités remarquables à l'envers** :

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2\\a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2\\a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b)\end{aligned}$$

- **Regroupement** : $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$

Exemple 6.3. Factoriser $4x^2 - 9$: $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$.
Factoriser $x^2 - 6x + 9$: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

6.4 Fractions algébriques

Définition 6.6 — *fraction algébrique*.

Une **fraction algébrique** est un quotient de deux polynômes : $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, définie pour $Q(x) \neq 0$.

Les règles sont les mêmes que pour les fractions numériques :

Proposition 6.7 — *opérations sur les fractions algébriques*.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$
$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$
$$\frac{A/B}{C/D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Exemple 6.4. Simplifier $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2}, \quad x \neq 2.$$

Algorithme d'Euclide pour les polynômes. Comme pour les entiers, on peut diviser un polynôme A par B :

$$A = B \cdot Q + R,$$

où $\deg R < \deg B$. Q est le **quotient**, R le **reste**.
Exemple. Diviser $A(x) = x^3 - 2x + 1$ par $B(x) = x - 1$:

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1) + 0.$$

Reste nul : $x = 1$ est racine de A.

Exercices

Exercice 6.1. Développer et simplifier :

a) $(3x - 2)(x + 5)$

b) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2$

c) $(x+3)(x-3)+x^2$

d) $(a+b+c)^2$ *(développer en regroupant $(a+b)+c$)*

Exercice 6.2. Factoriser complètement :

a) $12x^3-8x^2+4x$

b) $9x^2-25$

c) $x^2+10x+25$

d) $2x^2-8$

e) x^3-x

Exercice 6.3. Simplifier les fractions algébriques (préciser les restrictions) :

a) $\dfrac{3x^2-12}{x-2}$

b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

Exercice 6.4. Calculer et simplifier :

a) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+3}\cdot\dfrac{x+1}{x-3}$

Exercice 6.5. Résoudre les équations suivantes :

a) $(x+2)(x-3)=(x+1)(x-1)$

b) $\dfrac{2x+1}{x-1}=3$

Résumé du chapitre

Développement

- $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Factorisation

- Facteur commun : $ka+kb=k(a+b)$
- Carré parfait : $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

- Différence de carrés : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- Regroupement par paires si nécessaire

Fractions algébriques

- Simplifier : factoriser numérateur et dénominateur, puis éliminer les facteurs communs
- Addition : réduire au même dénominateur
- Multiplication : produit des numérateurs sur produit des dénominateurs
- Toujours préciser les valeurs interdites

QCM — Calcul littéral

Une seule réponse correcte par question.

1. $(x+3)^2$ est égal à :

a) $x^2 + 9$
b) $x^2 + 3x + 9$
c) $x^2 + 6x + 9$
d) $x^2 + 6x + 6$

2. La factorisation de $x^2 - 16$ est :

a) $(x-4)^2$
b) $(x+4)^2$
c) $(x-4)(x+4)$
d) $(x-2)(x+8)$

3. Développer $(2x-1)(3x+4)$:

a) $6x^2 + 5x - 4$
b) $6x^2 - 5x - 4$
c) $6x^2 + 5x + 4$
d) $5x^2 + 5x - 4$

4. Factoriser $3x^2 - 12x$:

a) $3x(x-4)$
b) $3(x^2 - 4x)$
c) $x(3x-12)$
d) $3x(x-4)$ et $x(3x-12)$ sont équivalents

5. Simplifier $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ pour $x \neq -2$:

a) $x - 2$

b) $x+2$
c) x^2-2
d) $\frac{x-2}{1}$

6. $(a-b)^2-(a+b)^2$ est égal à :

a) 0
b) $-4ab$
c) $4ab$
d) $2a^2+2b^2$

7. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}$ est égal à :

a) $\dfrac{2}{2x+1}$
b) $\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$
c) $\dfrac{1}{x(x+1)}$
d) $\dfrac{x+1+x}{x+x+1}$

8. Quel est le degré du polynôme $P(x)=3x^4-2x^3+x-7$?

a) 1
b) 3
c) 4
d) 7

Réponses : 1-c 2-c 3-a 4-a 5-a 6-b 7-b 8-c

Chapitre 7

Fonctions du second degré

Babylone, 2000 avant notre ère. Un scribe grave sur une tablette d'argile : « Quelle est la surface d'un carré dont le côté augmenté de son quart vaut $\frac{3}{4}$? » Il ne sait pas encore ce qu'est une équation. Il sait seulement qu'il y a une inconnue, et que cette inconnue, au carré, doit satisfaire une certaine relation. Les Babyloniens résolvaient ces problèmes par des recettes géométriques — compléter un carré, littéralement, avec des tuiles d'argile. Quatre mille ans plus tard, nous faisons la même chose, avec des symboles. La formule a changé. La question, elle, n'a pas bougé.

7.1 Forme développée

Définition 7.1 — *fonction du second degré.*
Une **fonction du second degré** est une fonction de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Son graphe est une **parabole** d'axe de symétrie vertical.

- $a > 0$: parabole ouverte vers le haut (convexe)
- $a < 0$: parabole ouverte vers le bas (concave)

7.2 Forme canonique

Théorème 7.2 — *forme canonique.*
Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la **forme canonique** :

$$f(x) = a(x-h)^2 + k,$$

où

$$h = -\frac{b}{2a}, \qquad k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Le point $S = (h, k)$ est le **sommet** de la parabole. C'est le minimum de f si $a > 0$, le maximum si $a < 0$.

Exemple 7.1. Mettre $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ en forme canonique.

$$h = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2, \qquad k = 2(2)^2 - 8(2) + 5 = 8 - 16 + 5 = -3.$$

Donc $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$. Sommet : $S = (2, -3)$.

7.3 Discriminant et racines

Définition 7.3 — *discriminant.*
Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ est

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème 7.4 — *nature des racines.*

- $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$: une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = h$$

- $\Delta < 0$: aucune racine réelle

Exemple 7.2. Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$. $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$, $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$.

7.4 Forme factorisée

Théorème 7.5 — *forme factorisée.*
Si $\Delta \geq 0$, le trinôme se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Exemple 7.3. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.
$2x^2 - 8x + 8 = 2(x - 2)^2$.

7.5 Signe du trinôme

Proposition 7.6 — *signe de* $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ a le signe de a pour tout x.
- Si $\Delta = 0$: $f(x) \geq 0$ si $a > 0$ (nul en x_0), $f(x) \leq 0$ si $a < 0$.
- Si $\Delta > 0$ et $a > 0$: $f(x) < 0$ pour $x \in (x_1, x_2)$, $f(x) > 0$ pour $x \notin [x_1, x_2]$.
- Si $\Delta > 0$ et $a < 0$: signes inversés.

Exemple 7.4. Résoudre $x^2 - x - 6 \leq 0$. Racines : $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. Comme $a = 1 > 0$: $f(x) \leq 0$ pour $x \in [-2, 3]$.

Relations de Viète. Si x_1 et x_2 sont les racines de $ax^2 + bx + c$, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ces relations permettent de construire un trinôme à partir de ses racines sans calculer le discriminant.
Exemple. Un trinôme de coefficient dominant 3 a pour racines -2 et 5. $b = -3(-2 + 5) = -9$ et $c = 3(-2)(5) = -30$: $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$.

Exercices

Exercice 7.1. Pour chaque trinôme, trouver la forme canonique, le sommet et le(s) racine(s) éventuelle(s) :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 2$

c) $h(x) = x^2 + x + 1$

Exercice 7.2. Résoudre les inéquations :

a) $x^2 - 3x - 10 > 0$

b) $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$

c) $2x^2 + x + 1 < 0$

Exercice 7.3. Une balle est lancée vers le haut. Sa hauteur (en mètres) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$.

a) Quelle est la hauteur maximale atteinte ?

b) À quel moment la balle retouche-t-elle le sol ?

Exercice 7.4. Trouver le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ sachant que :

a) son sommet est $S(1, -4)$ et il passe par $(3, 0)$

b) ses racines sont -3 et 2, et $f(0) = 12$

Exercice 7.5. **[MA2]** Les racines de $2x^2 + bx + c = 0$ vérifient $x_1 + x_2 = 3$ et $x_1 \cdot x_2 = -5$. Trouver b, c et les racines.

Résumé du chapitre

Trois formes

- **Développée** : $f(x) = ax^2 + bx + c$
- **Canonique** : $f(x) = a(x-h)^2 + k$, sommet $S(h, k)$ avec $h = -\frac{b}{2a}$, $k = f(h)$
- **Factorisée** : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta \geq 0$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$: deux racines $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$: racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: aucune racine réelle

Signe du trinôme ($\Delta > 0$)

- $a > 0$: négatif entre les racines, positif à l'extérieur
- $a < 0$: positif entre les racines, négatif à l'extérieur
- $\Delta < 0$: signe constant égal au signe de a

QCM — Fonctions du second degré

Une seule réponse correcte par question.

1. Le sommet de $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ est :

a) $(2, -5)$
b) $(-2, 23)$
c) $(4, 3)$
d) $(2, 3)$

2. Le discriminant de $x^2 + 4x + 5$ vaut :

a) 36
b) -4
c) 4
d) 0

3. Combien de racines réelles a $3x^2 - 6x + 3$?

a) Aucune
b) Une (double)
c) Deux distinctes
d) Trois

4. La forme factorisée de $x^2 - x - 6$ est :

a) $(x - 2)(x + 3)$
b) $(x + 2)(x - 3)$
c) $(x - 1)(x + 6)$
d) $(x - 6)(x + 1)$

5. L'ensemble des solutions de $x^2 - 4 \leq 0$ est :

a) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
b) $[-2, 2]$
c) $(-2, 2)$
d) $\mathbb{R}$

6. Une parabole a son sommet en $(1, -3)$ et son coefficient dominant vaut 2. Son équation est :

a) $2(x + 1)^2 - 3$
b) $2(x - 1)^2 + 3$
c) $2(x - 1)^2 - 3$
d) $2(x + 1)^2 + 3$

7. Pour $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, quelle est la valeur maximale ?

a) 3
b) 4
c) -1
d) 2

8. Les solutions de $2x^2 - 5x + 2 = 0$ sont :

a) $x = 1$ et $x = 2$
b) $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$
c) $x = -\frac{1}{2}$ et $x = -2$
d) $x = \frac{1}{2}$ et $x = -2$

Réponses : 1-a 2-b 3-b 4-b 5-b 6-c 7-b 8-b

Chapitre 8

Pythagore et Thalès

> *Une corde de douze nœuds équidistants, attachée en boucle. Les bâtisseurs de l'Égypte ancienne la tendaient en triangle — côtés de 3, 4 et 5 intervalles — pour obtenir un angle droit parfait. Ils ne savaient pas démontrer pourquoi cela fonctionnait. Pythagore, six siècles plus tard, le démontra. Mais la vérité était là, dans la corde, bien avant la preuve. C'est souvent ainsi en mathématiques : on observe d'abord, on comprend ensuite. Thalès, lui, mesurait la hauteur des pyramides en comparant les ombres. Deux hommes, deux idées, une leçon : les rapports et les proportions gouvernent la géométrie.*

8.1 Théorème de Pythagore

Théorème 8.1 — *Pythagore.*
Dans un triangle rectangle de côtés a, b et d'hypoténuse c :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Théorème 8.2 — *réciproque de Pythagore.*
Si $a^2+b^2 = c^2$ dans un triangle de côtés a, b, c, alors ce triangle est rectangle en face de c.

Exemple 8.1. Triangle de côtés $5, 12, 13$: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. ✓Rectangle.

Calculer la diagonale d'un carré de côté 1 : $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, donc $d = \sqrt{2}$.

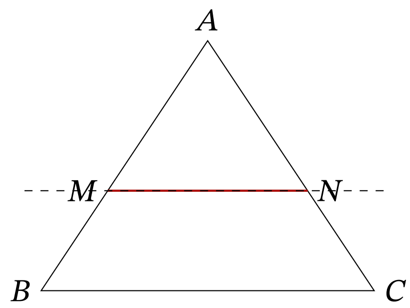
Proposition 8.3 — *hauteur dans le triangle rectangle.*
Dans un triangle rectangle de côtés a, b, hypoténuse c et hauteur h issue du sommet droit :

$$h^2 = p \cdot q, \qquad a^2 = p \cdot c, \qquad b^2 = q \cdot c,$$

où p et q sont les projections de a et b sur c.

8.2 Théorème de Thalès

Théorème 8.4 — *Thalès.*
Soit un triangle ABC et une droite parallèle à (BC) coupant (AB) en M et (AC) en N. Alors :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$



Théorème 8.5 — *réciproque de Thalès.*
Si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors $(MN) \parallel (BC)$.

Exemple 8.2. Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec $AM = 3$, $AB = 9$, $AN = 4$, $AC = 12$. $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{AN}{AC} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. ✓Donc $(MN) \parallel (BC)$ et $MN = \frac{1}{3}BC$.

8.3 Triangles semblables

Définition 8.6 — *triangles semblables.*
Deux triangles sont **semblables** si leurs angles sont égaux deux à deux. Dans ce cas, leurs côtés sont **proportionnels** :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

où k est le **rapport de similitude**.

Proposition 8.7 — *critères de similitude.*

Deux triangles sont semblables si :

- **AA** : deux angles égaux (le troisième l'est aussi)
- **SAS** : deux côtés proportionnels et angle inclus égal
- **SSS** : trois côtés proportionnels

Remarque 8.1. Thalès est un cas particulier de similitude : les triangles AMN et ABC sont semblables (critère AA).

Démonstrations classiques de Pythagore. Il existe plus de 370 démonstrations connues du théorème de Pythagore. En voici une par les aires : Construire un carré de côté $a + b$. L'intérieur contient quatre triangles rectangles de côtés a, b et un carré central de côté c.

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \implies a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \implies a^2 + b^2 = c^2.$$

Exercices

Exercice 8.1. Calculer la longueur manquante (arrondir au centième si nécessaire) :

a) Triangle rectangle, cathètes 6 et 8.

b) Triangle rectangle, hypoténuse 13, cathète 5.

c) Triangle rectangle, hypoténuse 7, cathète 4.

Exercice 8.2. Déterminer si chaque triangle est rectangle :

a) Côtés $7, 24, 25$.

b) Côtés $4, 5, 6$.

c) Côtés $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.

Exercice 8.3. Dans le triangle ABC, $(MN) \parallel (BC)$, $AM = 4$, $MB = 6$, $AN = 3$.

a) Calculer NC.

b) Calculer MN si $BC = 15$.

Exercice 8.4. Deux triangles semblables ont des côtés $3, 4, 5$ et $6, x, 10$.

a) Trouver le rapport de similitude.

b) Calculer x.

c) Quel est le rapport de leurs aires ?

Exercice 8.5. Un arbre projette une ombre de 8 m. Au même moment, un poteau de 2 m projette une ombre de $1{,}6$ m. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Résumé du chapitre

Théorème de Pythagore

- Triangle rectangle : $a^2 + b^2 = c^2$ (c = hypoténuse)
- Réciproque : $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$ triangle rectangle
- Triplets pythagoriciens courants : $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$

Théorème de Thalès

- $(MN) \parallel (BC)$ dans le triangle $ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
- Réciproque : rapports égaux $\Rightarrow$ droites parallèles
- Application directe : calculer une longueur inconnue par proportionnalité

Triangles semblables

- Critère AA : deux angles égaux suffisent
- Rapport de similitude k : côtés dans le rapport k, aires dans le rapport k^2

QCM — Pythagore et Thalès

Une seule réponse correcte par question.

1. Dans un triangle rectangle, les cathètes mesurent 9 et 12. L'hypoténuse mesure :

a) $\sqrt{225}$
b) 21
c) 15
d) $\sqrt{63}$

2. Un triangle de côtés 6, 8, 11 est-il rectangle ?

a) Oui, car $6 + 8 > 11$
b) Oui, car $6^2 + 8^2 = 100 = 11^2$
c) Non, car $6^2 + 8^2 = 100 \neq 121$
d) On ne peut pas savoir sans les angles

3. Dans un triangle ABC, $(MN) \parallel (BC)$, $AM = 5$, $AB = 20$, $BC = 16$. La longueur MN vaut :

a) 4
b) 6
c) 8
d) 64

4. Si deux triangles ont un rapport de similitude $k = 3$, le rapport de leurs aires est :

a) 3
b) 6
c) 9
d) $\sqrt{3}$

5. La diagonale d'un rectangle de dimensions 5×12 mesure :

a) 13
b) 17
c) $\sqrt{17}$
d) $\sqrt{119}$

6. Dans un triangle ABC, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ avec $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{5}$. Quelle affirmation est vraie ?

a) $(MN) \perp (BC)$
b) $(MN) \parallel (BC)$ et $MN = \frac{2}{5}BC$
c) $MN = BC$
d) $(MN) \parallel (BC)$ et $MN = \frac{5}{2}BC$

7. Un escalier a des marches de 20 cm de hauteur et 25 cm de profondeur. La longueur de la rampe par marche est :

a) 30 cm
b) $\sqrt{1025} \approx 32$ cm
c) 45 cm
d) $\sqrt{625} = 25$ cm

8. Critère de similitude AA signifie :

a) Deux côtés égaux suffisent
b) Deux angles égaux suffisent
c) Tous les côtés sont proportionnels
d) Un angle et un côté égaux suffisent

Réponses : 1-c 2-c 3-a 4-c 5-a 6-b 7-b 8-b

Chapitre 9

Cercles et angles inscrits

Le cercle fascine depuis toujours. Pour les Grecs, c'était la forme parfaite — sans début ni fin, sans angle, sans défaut. Aristote pensait que les astres se déplaçaient en cercles parce que le cercle était la seule figure digne du ciel. Il avait tort sur les astres, mais les mathématiques lui donnent raison sur l'élégance : peu de figures géométriques recèlent autant de propriétés surprenantes. Un angle inscrit qui vaut toujours la moitié de l'angle au centre. Un angle dans un demi-cercle qui est toujours droit. Des cordes qui se coupent selon des proportions fixes. Le cercle est généreux en théorèmes.

9.1 Vocabulaire du cercle

Définition 9.1 — *cercle et disque*.
Le **cercle** de centre O et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points du plan à distance r de O :

$$\mathcal{C}(O, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid OM = r\}.$$

Le **disque** est l'intérieur du cercle : $\{M \mid OM \leq r\}$.

Définition 9.2 — *éléments d'un cercle*.

- **Corde** : segment joignant deux points du cercle
- **Diamètre** : corde passant par le centre ($d = 2r$)
- **Arc** : portion du cercle entre deux points
- **Secteur** : région délimitée par deux rayons et un arc
- **Tangente** : droite touchant le cercle en un seul point

Proposition 9.3 — *tangente et rayon.*
La tangente en un point T d'un cercle est perpendiculaire au rayon OT.

9.2 Angle au centre et angle inscrit

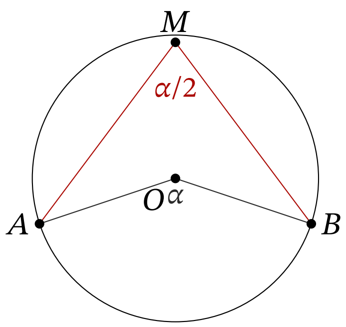
Définition 9.4 — *angle au centre.*
Un **angle au centre** est un angle dont le sommet est le centre O du cercle. Il intercepte un arc.

Définition 9.5 — *angle inscrit.*
Un **angle inscrit** est un angle dont le sommet est un point du cercle et dont les côtés coupent le cercle en deux autres points. Il intercepte le même arc que l'angle au centre correspondant.

Théorème 9.6 — *angle inscrit et angle au centre.*
L'angle inscrit est égal à la **moitié** de l'angle au centre qui intercepte le même arc :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB},$$

où O est le centre et A, B, M sont sur le cercle.



Corollaire 9.7 — *angles inscrits sur le même arc.*
Tous les angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.

9.3 Angle dans un demi-cercle

Théorème 9.8 — *angle de Thalès.*
Tout angle inscrit dans un demi-cercle est droit. Autrement dit, si $[AB]$ est un diamètre et M un point du cercle distinct de A et B, alors $\widehat{AMB} = 90°$.

Théorème 9.9 — *réciproque.*
Si $\widehat{AMB} = 90°$ et M est sur le cercle de diamètre $[AB]$, alors $[AB]$ est un diamètre.

Exemple 9.1. Pour trouver le centre d'un cercle passant par A, M, B avec $\widehat{AMB} = 90°$: le centre est le milieu de $[AB]$.

9.4 Puissance d'un point

Théorème 9.10 — *cordes sécantes.*
Si deux cordes $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en P à l'intérieur d'un cercle :

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD.$$

Théorème 9.11 — *sécantes depuis l'extérieur.*
Si deux sécantes issues d'un point extérieur P coupent le cercle en A, C et B, D respectivement :

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD.$$

Ce produit commun est la **puissance** de P par rapport au cercle : $\pi(P) = PO^2 - r^2$.

Cercles orthogonaux. Deux cercles sont **orthogonaux** s'ils se coupent à angle droit, c'est-à-dire si les tangentes en chaque point d'intersection sont perpendiculaires.
Condition analytique : si les cercles ont centres O_1, O_2 et rayons r_1, r_2 :

$$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

La puissance d'un centre par rapport à l'autre cercle est alors r_1^2 (resp. r_2^2).

Exercices

Exercice 9.1. Dans un cercle de centre O, l'angle au centre $\widehat{AOB} = 80°$.

a) Quel est l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ si M est sur le grand arc ?

b) Quel est l'angle inscrit $\widehat{ANB}$ si N est sur le petit arc ?

Exercice 9.2. $[AB]$ est un diamètre de cercle, M est un point du cercle. On sait que $AM = 6$ et $AB = 10$.

a) Justifier que $\widehat{AMB} = 90°$.

b) Calculer BM.

c) Calculer l'aire du triangle AMB.

Exercice 9.3. $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle (quadrilatère cyclique). On sait que $\widehat{A} = 75°$.

a) Calculer $\widehat{C}$.

b) Si de plus $\widehat{B} = 110°$, calculer $\widehat{D}$.

Exercice 9.4. Deux cordes $[AC]$ et $[BD]$ d'un cercle se coupent en P. On sait que $PA = 3$, $PC = 8$, $PB = 4$. Calculer PD.

Exercice 9.5. Un point P est à distance 10 du centre O d'un cercle de rayon 6. Une tangente issue de P touche le cercle en T. Calculer PT.

Résumé du chapitre

Angle au centre et angle inscrit
- Angle inscrit $= \frac{1}{2}$ angle au centre (même arc intercepté)
- Tous les angles inscrits sur le même arc sont égaux
- Angle inscrit dans un demi-cercle $= 90°$

Quadrilatère cyclique
- Angles opposés supplémentaires : $\widehat{A} + \widehat{C} = 180°$

Tangente
- Tangente $\perp$ rayon au point de contact
- Longueur de tangente depuis P : $PT = \sqrt{PO^2 - r^2}$

Puissance d'un point
- Cordes sécantes intérieures : $PA \cdot PC = PB \cdot PD$
- Sécantes extérieures : même formule
- Puissance : $\pi(P) = PO^2 - r^2$

QCM — Cercles et angles inscrits

Une seule réponse correcte par question.

1. L'angle au centre vaut $120°$. L'angle inscrit interceptant le même arc vaut :

a) $240°$
b) $120°$
c) $60°$
d) $30°$

2. $[AB]$ est un diamètre d'un cercle et M est sur ce cercle. L'angle $\widehat{AMB}$ vaut :

a) $45°$
b) $60°$
c) $90°$
d) $180°$

3. Deux angles inscrits interceptant le même arc sont :

a) Supplémentaires
b) Complémentaires
c) Égaux
d) L'un double de l'autre

4. Dans un quadrilatère cyclique $ABCD$, $\widehat{A} = 82°$. Alors $\widehat{C}$ vaut :

a) $82°$
b) $98°$
c) $164°$
d) $278°$

5. Un point P est à distance 13 du centre d'un cercle de rayon 5. La longueur de la tangente issue de P vaut :

a) 8
b) 12
c) $\sqrt{194}$
d) 18

6. Deux cordes se coupent en P avec $PA = 4$, $PC = 9$, $PB = 6$. Alors PD vaut :

a) 4
b) 6
c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{2}{3}$

7. La tangente en T à un cercle de centre O est :

a) Parallèle au rayon OT
b) Perpendiculaire au rayon OT
c) Sécante au cercle en un autre point
d) Confondue avec le diamètre

8. L'angle au centre vaut $200°$. L'angle inscrit du côté du petit arc vaut :

a) $100°$
b) $80°$
c) $160°$
d) $40°$

Réponses : 1-c 2-c 3-c 4-b 5-b 6-b 7-b 8-a

Chapitre 10

Trigonométrie dans le triangle rectangle

> *Hipparque de Nicée, astronome grec du II^{e} siècle avant notre ère, voulait mesurer la distance entre la Terre et la Lune. Sans télescope, sans satellite, avec seulement des angles et de la géométrie. Il construisit la première table de cordes — l'ancêtre de nos tables trigonométriques — et obtint une estimation remarquablement précise. Deux mille ans plus tard, les mêmes rapports entre angles et longueurs permettent à un ingénieur de calculer la hauteur d'un pont, à un navigateur de tracer sa route, à un physicien de décomposer des forces. La trigonométrie est la géométrie mise en calcul.*

10.1 Les rapports trigonométriques

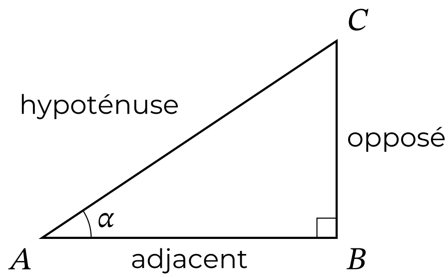
Définition 10.1 — *sinus, cosinus, tangente.*

Dans un triangle rectangle d'angle aigu α, en notant les côtés par rapport à α :

- côté **adjacent** à α : adj
- côté **opposé** à α : opp
- **hypoténuse** : hyp

On définit :

$$\sin\alpha = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}, \qquad \tan\alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}.$$



Remarque 10.1. Le moyen mnémotechnique : **SOH-CAH-TOA** (Sinus = Opposé/Hypoténuse, Cosinus = Adjacent/Hypoténuse, Tangente = Opposé/Adjacent).

10.2 Angles remarquables

Proposition 10.2 — *valeurs exactes.*

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Exemple 10.1. Triangle équilatéral de côté 2 : la hauteur vaut $h = 2\sin 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

10.3 Relations fondamentales

Proposition 10.3 — *relations trigonométriques de base.*
Pour tout angle aigu α :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha), \qquad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

10.4 Résolution de triangles rectangles

Définition 10.4 — *résolution d'un triangle.*
Résoudre un triangle, c'est déterminer tous ses côtés et tous ses angles à partir de données suffisantes. Pour un triangle rectangle, deux éléments suffisent (en dehors de l'angle droit) : un angle et un côté, ou deux côtés.

Exemple 10.2. Triangle rectangle en B, $\alpha = 35°$, hypoténuse $c = 10$.

$$\begin{aligned} a &= c \sin \alpha = 10 \sin 35° \approx 5{,}74 \\ b &= c \cos \alpha = 10 \cos 35° \approx 8{,}19 \\ \beta &= 90° - 35° = 55° \end{aligned}$$

Exemple 10.3. Triangle rectangle en B, $a = 5$, $b = 7$.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{5}{7}\right) \approx 35{,}5°.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{74} \approx 8{,}60.$$

Proposition 10.5 — *aire d'un triangle.*
L'aire d'un triangle de côtés a, b et d'angle inclus γ :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Formule de l'aire généralisée et premières applications. La formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ vaut pour tout triangle, pas seulement les triangles rectangles. Elle relie directement l'aire à deux côtés et l'angle qu'ils forment.
Application. Un parallélogramme de côtés a et b avec angle θ a pour aire $\mathcal{A} = ab \sin \theta$. Pour $\theta = 90°$: on retrouve $\mathcal{A} = ab$.

Exercices

Exercice 10.1. Dans chaque triangle rectangle en B, calculer les éléments manquants (arrondir au dixième) :

a) $\alpha = 40°$, $c = 15$ (hypoténuse)

b) $\alpha = 62°$, $a = 9$ (côté opposé à α)

c) $a = 6$, $b = 11$ (côtés de l'angle droit)

Exercice 10.2. Sans calculatrice, calculer exactement :

a) $\sin 30° + \cos 60°$

b) $\tan 45° \cdot \cos 45°$

c) $\sin^2 30° + \cos^2 30°$

d) $\frac{\sin 60°}{\cos 60°}$

Exercice 10.3. Du haut d'une falaise, on observe un bateau en mer avec un angle de dépression de $18°$. La falaise mesure 85 m. Quelle est la distance horizontale entre le pied de la falaise et le bateau ?

Exercice 10.4. Calculer l'aire d'un triangle isocèle dont les deux côtés égaux mesurent 8 cm et forment un angle de $50°$.

Exercice 10.5. En utilisant $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, simplifier les expressions :

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

b) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$ (pour $\sin\alpha \neq 0$)

Résumé du chapitre

Définitions (SOH-CAH-TOA)

$$\sin\alpha = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}, \qquad \tan\alpha = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Angles remarquables

α	$30°$	$45°$	$60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Relations fondamentales

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$

Résolution et aire

- Deux éléments suffisent (hors angle droit)
- Aire : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

QCM — Trigonométrie dans le triangle rectangle

Une seule réponse correcte par question.

1. Dans un triangle rectangle, $\alpha = 30°$ et l'hypoténuse $= 10$. Le côté opposé à α vaut :

a) $5\sqrt{3}$
b) 5
c) $10\sqrt{3}$
d) $\frac{10}{\sqrt{3}}$

2. $\cos 45°$ vaut exactement :

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) 1

3. Dans un triangle rectangle en B, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ et $b = 8$. Le côté a vaut :

a) 6
b) $\frac{32}{3}$
c) $\frac{3}{4}$
d) 10

4. $\sin^2 60° + \cos^2 60°$ vaut :

a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{1}{4}$
c) 1
d) $\sqrt{3}$

5. Un observateur voit le sommet d'une tour sous un angle d'élévation de $25°$, à 60 m de la base. La hauteur de la tour est approximativement :

a) 25 m
b) 28 m
c) 54 m
d) 66 m

6. $\sin(90° - \alpha)$ est égal à :

a) $\sin\alpha$
b) $-\sin\alpha$
c) $\cos\alpha$
d) $\tan\alpha$

7. L'aire d'un triangle de côtés 6 et 9 avec angle inclus $60°$ vaut :

a) 27
b) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$
c) 54

d) $27\sqrt{3}$

8. Dans un triangle rectangle en B, $\alpha = 50°$ et $a = 7$. L'hypoténuse vaut approximativement :

a) $5{,}4$
b) $9{,}1$
c) $10{,}9$
d) $8{,}4$

Réponses : 1-b 2-c 3-a 4-c 5-b 6-c 7-b 8-b

Deuxième partie

Deuxième année

Chapitre 11

Géométrie analytique

Paris, 1637. René Descartes, alité par la fièvre, observe une mouche se déplacer au plafond. Il se demande comment décrire sa position avec précision. Deux nombres suffisent : la distance au mur du fond, la distance au mur latéral. L'idée semble triviale. Elle va pourtant unifier pour toujours la géométrie et l'algèbre. Désormais, une courbe est une équation, et une équation est une courbe. La droite, le cercle, la parabole — tous deviennent des objets qu'on peut calculer, pas seulement contempler.

11.1 Rappels : distance et milieu

Proposition 11.1 — *distance entre deux points.*
La distance entre $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ est :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Proposition 11.2 — *milieu d'un segment.*
Le milieu M de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

11.2 Équation d'une droite

Définition 11.3 — *formes d'une droite.*

- **Forme explicite** : $y = ax + b$
- **Forme générale** : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$
- **Forme normale** : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite

Proposition 11.4 — *distance d'un point à une droite.*
La distance du point $P(x_0, y_0)$ à la droite $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est :

$$d = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Exemple 11.1. Distance du point $P(3, 1)$ à la droite $2x - y + 1 = 0$:

$$d = \frac{|2(3) - 1 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

11.3 Équation d'un cercle

Définition 11.5 — *équation cartésienne d'un cercle.*
Le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Développée : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$.

Proposition 11.6 — *forme générale d'un cercle.*
Toute équation de la forme $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ représente un cercle de centre $\Omega\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{D^2+E^2}{4} - F}$, à condition que $\frac{D^2+E^2}{4} - F > 0$.

Exemple 11.2. $x^2+y^2-4x+6y-3 = 0$. Centre : $(2, -3)$. Rayon : $r = \sqrt{4+9+3} = \sqrt{16} = 4$.

11.4 Intersections

Proposition 11.7 — *droite et cercle.*

Pour trouver les intersections d'une droite et d'un cercle, on substitue l'équation de la droite dans celle du cercle. On obtient une équation du second degré dont le discriminant Δ indique :

- $\Delta > 0$: deux points d'intersection (sécante)
- $\Delta = 0$: un point (tangente)
- $\Delta < 0$: aucun (extérieure)

Exemple 11.3. Intersection de $y = x+1$ et $x^2+y^2 = 5$: $x^2+(x+1)^2 = 5 \Rightarrow 2x^2+2x-4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$. $\Delta = 9 > 0$: $x = 1$ ou $x = -2$. Points : $(1,2)$ et $(-2,-1)$.

Faisceaux de droites. L'ensemble de toutes les droites passant par un point $P(a,b)$ forme un **faisceau**. Si deux droites d_1 et d_2 sont d'équations $f_1(x,y) = 0$ et $f_2(x,y) = 0$, toute droite du faisceau passant par leur intersection s'écrit :

$$\lambda f_1(x,y) + \mu f_2(x,y) = 0, \quad (\lambda,\mu) \neq (0,0).$$

Ceci permet de trouver élégamment des droites satisfaisant des conditions supplémentaires.

Exercices

Exercice 11.1. Soient $A(1,3)$, $B(5,6)$, $C(-2,1)$.

a) Calculer AB, AC, BC.

b) Trouver le milieu de $[AB]$.

c) Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice 11.2. Trouver l'équation de la droite :

a) passant par $A(2,5)$ et $B(-1,2)$

b) perpendiculaire à $3x - y + 2 = 0$ passant par $P(1,4)$

c) équidistante de $A(0,0)$ et $B(4,2)$ (médiatrice de $[AB]$)

Exercice 11.3. Trouver le centre et le rayon :

a) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

Exercice 11.4. Trouver les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite $y = 2x$.

Exercice 11.5. Montrer que la droite $y = 2x-5$ est tangente au cercle $x^2+y^2 = 5$ et trouver le point de tangence.

Résumé du chapitre

Distance et milieu
- $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Milieu : $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Droites
- Explicite : $y = ax + b$ Générale : $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$
- Distance de $P(x_0, y_0)$ à $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$: $d = \frac{|\alpha x_0+\beta y_0+\gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Cercles
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — centre $\Omega(a, b)$, rayon r
- Forme générale : $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
- Droite/cercle : substituer et analyser Δ

QCM — Géométrie analytique

Une seule réponse correcte par question.

1. La distance entre $A(1, 2)$ et $B(4, 6)$ est :

a) 5
b) 7
c) $\sqrt{7}$
d) 25

2. Le milieu de $[AB]$ avec $A(-2, 4)$ et $B(6, 0)$ est :

a) $(4, 2)$
b) $(2, 2)$
c) $(2, 4)$
d) $(4, 4)$

3. Le centre du cercle $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ est :

a) $(-2, 1)$
b) $(4, -2)$

c) $(2, -1)$
d) $(-4, 2)$

4. La droite $y = x + 3$ est par rapport au cercle $x^2 + y^2 = 4$:

a) Sécante
b) Tangente
c) Extérieure
d) Confondue

5. La distance du point $P(1, 1)$ à la droite $3x + 4y - 5 = 0$ est :

a) $\frac{2}{5}$
b) 2
c) $\frac{6}{5}$
d) 1

6. Quelle équation représente un cercle de rayon 3 centré en $(1, -2)$?

a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$
b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
c) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
d) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

7. La médiatrice de $[AB]$ avec $A(0, 0)$ et $B(2, 0)$ a pour équation :

a) $y = 1$
b) $x = 0$
c) $x = 1$
d) $y = x$

8. Combien de points d'intersection ont $y = x$ et $x^2 + y^2 = 1$?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

Réponses : 1-a 2-b 3-c 4-c 5-a 6-b 7-c 8-c

Chapitre 12

La géométrie pour démontrer

Les Éléments d'Euclide commencent par cinq postulats. Le cinquième — dit « postulat des parallèles » — a tourmenté les mathématiciens pendant deux mille ans. Il semblait moins évident que les quatre autres. Des générations ont tenté de le démontrer à partir des quatre premiers, en vain. Au XIX^{e} siècle, on découvrit qu'on pouvait le nier et obtenir une géométrie cohérente : la géométrie hyperbolique. La leçon : en géométrie, ce qu'on démontre dépend de ce qu'on admet. Rien n'est gratuit. Mais dans notre cadre euclidien, les outils sont puissants et les démonstrations, élégantes.

12.1 Congruence des triangles

Définition 12.1 — *triangles congruents.*

Deux triangles sont **congruents** s'ils ont les mêmes angles et les mêmes côtés (ils sont superposables).

Proposition 12.2 — *critères de congruence.*

Deux triangles sont congruents si :

- **CCC** : trois côtés égaux deux à deux
- **CAC** : deux côtés et l'angle inclus égaux
- **ACA** : deux angles et le côté inclus égaux
- **ACC** : angle droit, hypoténuse et un côté égaux

12.2 Similitude des triangles

Proposition 12.3 — *critères de similitude.*

Deux triangles sont semblables si :

- **AA** : deux angles égaux
- **SAS** : deux côtés proportionnels et angle inclus égal
- **SSS** : trois côtés proportionnels

Remarque 12.1. Congruence ⇒ similitude (rapport $k = 1$), mais pas l'inverse.

12.3 Quadrilatères remarquables

Définition 12.4 — *quadrilatères.*

- **Parallélogramme** : côtés opposés parallèles deux à deux
- **Rectangle** : parallélogramme avec un angle droit
- **Losange** : parallélogramme avec quatre côtés égaux
- **Carré** : rectangle et losange
- **Trapèze** : une seule paire de côtés parallèles

Proposition 12.5 — *propriétés du parallélogramme.*

Dans un parallélogramme $ABCD$:

- Les côtés opposés sont égaux : $AB = CD$, $BC = DA$
- Les diagonales se coupent en leur milieu
- Les angles opposés sont égaux

Proposition 12.6 — *propriétés du rectangle.*

Dans un rectangle, les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu. Réciproque : si les diagonales d'un parallélogramme sont égales, c'est un rectangle.

Proposition 12.7 — *propriétés du losange.*

Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Réciproque : si les diagonales d'un parallélogramme sont perpendiculaires, c'est un losange.

12.4 Lieux géométriques

Définition 12.8 — *lieu géométrique*.
Un **lieu géométrique** est l'ensemble de tous les points satisfaisant une propriété donnée.

Proposition 12.9 — *lieux classiques*.

- Points équidistants de deux points A et B : **médiatrice** de $[AB]$
- Points équidistants de deux droites : **bissectrice** de l'angle formé
- Points à distance r d'un point O : **cercle** de centre O et rayon r
- Points voyant $[AB]$ sous angle droit : **cercle** de diamètre $[AB]$

12.5 Constructions à la règle et au compas

Les constructions classiques utilisent uniquement :
- La règle non graduée (tracer des droites)
- Le compas (tracer des cercles, reporter des longueurs)

Proposition 12.10 — *constructions fondamentales*.

- Médiatrice d'un segment
- Bissectrice d'un angle
- Perpendiculaire à une droite par un point
- Parallèle à une droite par un point
- Division d'un segment en n parties égales

Problèmes de construction impossibles. Trois problèmes ont occupé les Grecs pendant des siècles :
- **Quadrature du cercle** : construire un carré d'aire égale à un cercle donné
- **Duplication du cube** : construire un cube de volume double d'un cube donné
- **Trisection de l'angle** : diviser un angle quelconque en trois parties égales

Ces trois constructions sont **impossibles** à la règle et au compas seuls — fait démontré au XIX^{e} siècle grâce à la théorie de Galois.

Exercices

Exercice 12.1. Dans chaque cas, déterminer si les triangles sont congruents et citer le critère utilisé :

a) ABC et DEF avec $AB = DE = 5, BC = EF = 7, AC = DF = 9$

b) GHI et JKL avec $\widehat{G} = \hat{J} = 50°$, $GH = JK = 6$, $\widehat{H} = \widehat{K} = 70°$

c) MNP et QRS rectangles en N et R, $MN = QR = 3$, hypoténuses $MP = QS = 5$

Exercice 12.2. Soit $ABCD$ un parallélogramme avec $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(5, 3)$.

a) Trouver les coordonnées de D.

b) Vérifier que les diagonales se coupent en leur milieu.

c) Est-ce un rectangle ? un losange ?

Exercice 12.3. Décrire et construire le lieu géométrique des points M du plan équidistants de $A(1, 0)$ et $B(5, 0)$. Trouver son équation.

Exercice 12.4. Démontrer que les diagonales d'un rectangle sont égales.

Exercice 12.5. Dans le triangle ABC, $\widehat{A} = 50°$, $\widehat{B} = 70°$. Un triangle DEF a $\widehat{D} = 50°$ et $\widehat{F} = 60°$. Les triangles sont-ils semblables ?

Résumé du chapitre

Congruence (triangles superposables)
- CCC, CAC, ACA, ACC (rectangle)

Similitude (triangles proportionnels)
- AA, SAS, SSS
- Rapport k : côtés $\times k$, aires $\times k^2$

Quadrilatères
- Parallélogramme : diagonales se coupent en leur milieu
- Rectangle : diagonales égales
- Losange : diagonales perpendiculaires
- Carré : les deux à la fois

Lieux géométriques classiques
- Équidistant de A et B → médiatrice de $[AB]$
- Angle droit sur $[AB]$ → cercle de diamètre $[AB]$

QCM — La géométrie pour démontrer

Une seule réponse correcte par question.

1. Deux triangles ont trois côtés égaux deux à deux. Ils sont :

a) Semblables seulement
b) Congruents (critère CCC)
c) Ni congruents ni semblables
d) Semblables mais pas forcément congruents

2. Critère de similitude AA signifie :

a) Deux côtés et un angle égaux
b) Deux angles égaux suffisent
c) Trois angles égaux nécessaires
d) Deux côtés adjacents égaux

3. Dans un parallélogramme, les diagonales :

a) Sont perpendiculaires
b) Sont égales
c) Se coupent en leur milieu
d) Forment un angle de $90°$

4. Un losange est un parallélogramme dont :

a) Les angles sont droits
b) Les diagonales sont égales
c) Les quatre côtés sont égaux
d) Les diagonales se coupent en leur milieu

5. Le lieu des points équidistants de A et B est :

a) La droite AB
b) Le cercle de diamètre $[AB]$
c) La médiatrice de $[AB]$
d) La bissectrice de $\widehat{AOB}$

6. Si les diagonales d'un parallélogramme sont égales, c'est :

a) Un losange
b) Un carré
c) Un rectangle
d) Un trapèze

7. Deux triangles ont des angles $40°$, $60°$, $80°$ et des côtés dans le rapport 2. Ils sont :

a) Congruents
b) Semblables mais non congruents
c) Ni l'un ni l'autre
d) Congruents et semblables

8. La trisection d'un angle à la règle et au compas :

a) Est toujours possible
b) Est possible seulement pour $90°$
c) Est impossible en général
d) Est possible avec un rapporteur

Réponses : 1-b 2-b 3-c 4-c 5-c 6-c 7-b 8-c

Chapitre 13

Fonctions polynomiales

> *Au XVI^e siècle, les algébristes italiens se lançaient des défis publics : résoudre des équations cubiques en moins de temps que l'adversaire. Tartaglia découvrit une méthode pour le degré 3, la confia sous serment à Cardan, qui la publia quand même. Un scandale mathématique. Mais derrière la dispute, une vérité profonde : les polynômes de degré 3 et 4 ont des formules de résolution. Degree 5 ? Abel démontra en 1824 qu'il n'y en a pas. Pas de formule. Jamais. Les polynômes, simples en apparence, cachent des abîmes.*

13.1 Généralités

Définition 13.1 — *polynôme*.
Un **polynôme** de degré n est une fonction :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

avec $a_n \neq 0$. Le coefficient a_n est le **coefficient dominant**.

Proposition 13.2 — *allure générale*.
Pour $|x| \to +\infty$, $P(x)$ se comporte comme $a_n x^n$:

- n pair, $a_n > 0 : P(x) \to +\infty$ des deux côtés
- n impair, $a_n > 0 : P(x) \to -\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite
- Signs inversés si $a_n < 0$

13.2 Division euclidienne

Théorème 13.3 — *division euclidienne des polynômes.*
Pour tout polynôme A et tout polynôme $B \neq 0$, il existe des polynômes Q (quotient) et R (reste) uniques tels que :

$$A = B \cdot Q + R, \qquad \deg R < \deg B.$$

Exemple 13.1. Diviser $A(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ par $B(x) = x - 2$:

$$2x^3 - 3x^2 + x - 5 = (x-2)(2x^2 + x + 3) + 1.$$

Reste : $R = 1$.

13.3 Théorème du reste et des racines

Théorème 13.4 — *du reste.*
Le reste de la division de $P(x)$ par $(x - a)$ est $P(a)$.

Théorème 13.5 — *des racines.*
a est racine de P (i.e. $P(a) = 0$) si et seulement si $(x - a)$ divise $P(x)$.

Exemple 13.2. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$: donc $(x - 1)$ divise P. Division : $P(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

13.4 Factorisation sur $\mathbb{R}$

Proposition 13.6 — *factorisation complète.*
Tout polynôme à coefficients réels se factorise sur $\mathbb{R}$ en un produit de facteurs linéaires $(x - a)$ et de trinômes irréductibles $(x^2 + bx + c)$ avec $\Delta < 0$.

Multiplicité des racines. Si $(x-a)^k$ divise P mais pas $(x-a)^{k+1}$, on dit que a est une racine de **multiplicité** k. Géométriquement : la courbe est tangente à l'axe des x en a si $k \geq 2$ (elle ne le traverse pas si k est pair). *Exemple.* $P(x) = (x-1)^2(x+2)$: racine double en 1 (tangence), racine simple en -2 (traversée).

Exercices

Exercice 13.1. Effectuer les divisions euclidiennes :

a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ par $(x + 1)$

b) $2x^3 - x^2 + 3x - 1$ par $(x^2 + 1)$

Exercice 13.2. Factoriser complètement :

a) $P(x) = x^3 - 7x + 6$ sachant que 1 est racine

b) $Q(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Exercice 13.3. Étudier le signe de $P(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x - 3)$.

Exercice 13.4. Trouver un polynôme de degré 3, coefficient dominant 2, avec racines -1, 0 et 3.

Exercice 13.5. Sans effectuer la division, trouver le reste de la division de $P(x) = x^{100} - 3x^{50} + 2$ par $(x - 1)$.

Résumé du chapitre

Division euclidienne
- $A = B \cdot Q + R$ avec $\deg R < \deg B$
- Reste de P divisé par $(x - a)$: $R = P(a)$

Racines
- $P(a) = 0 \iff (x - a)$ divise P
- Stratégie : tester des valeurs entières simples ($\pm 1, \pm 2 \dots$)
- Polynôme de degré n : au plus n racines réelles

Factorisation
- Trouver une racine a, diviser par $(x - a)$, recommencer
- Facteurs irréductibles sur ℝ : linéaires ou trinômes $\Delta < 0$

QCM — Fonctions polynomiales

Une seule réponse correcte par question.

1. Le reste de la division de $P(x) = x^3 - 2x + 1$ par $(x - 1)$ est :

a) 0

b) 1
c) -2
d) 2

2. $x = 2$ est racine de $P(x) = x^3 - 8$. Alors :

a) $(x + 2)$ divise P
b) $(x - 2)$ divise P
c) $P(2) = 1$
d) $(x^2 - 4)$ divise P

3. Le polynôme $P(x) = x^4 + 1$ a :

a) 4 racines réelles
b) 2 racines réelles
c) 1 racine réelle
d) Aucune racine réelle

4. $(x - 1)(x + 2)^2$ s'annule en :

a) $x = 1$ seulement
b) $x = -2$ seulement
c) $x = 1$ et $x = -2$
d) $x = -1$ et $x = 2$

5. Pour $x \to +\infty$, $P(x) = -3x^5 + x^2 - 1$ tend vers :

a) $+\infty$
b) $-\infty$
c) -1
d) 0

6. Le quotient de $x^3 - 1$ par $(x - 1)$ est :

a) $x^2 + x + 1$
b) $x^2 - x + 1$
c) $x^2 + 1$
d) $x^2 - 1$

7. Un polynôme de degré 3 peut avoir :

a) 0 ou 2 racines réelles
b) 1 ou 3 racines réelles
c) Exactement 3 racines réelles
d) Au plus 2 racines réelles

8. $P(x) = (x - 1)^2(x + 3)$ change de signe en :

a) $x = 1$ et $x = -3$
b) $x = -3$ seulement

c) $x = 1$ seulement
d) Ni en 1 ni en -3

Réponses : 1-a 2-b 3-d 4-c 5-b 6-a 7-b 8-b

Chapitre 14

Fonctions rationnelles

L'asymptote est une idée étrange : une droite qu'une courbe approche indéfiniment sans jamais la toucher. Le mot vient du grec asumptotos — « qui ne tombe pas ensemble ». Les Grecs connaissaient déjà l'hyperbole et ses asymptotes. Mais c'est avec l'analyse moderne qu'on comprend pourquoi : une fonction rationnelle, quand son dénominateur s'annule, explose vers l'infini. Quand x part à l'infini, elle s'approche d'une droite. L'infini, en mathématiques, a plusieurs vitesses.

14.1 Définition et domaine

Définition 14.1 — *fonction rationnelle.*
Une **fonction rationnelle** est un quotient de polynômes :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

définie pour $Q(x) \neq 0$. Son domaine est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid Q(x) = 0\}$.

14.2 Asymptotes

Définition 14.2 — *asymptote verticale.*
La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** de f si $|f(x)| \to +\infty$ quand $x \to a$. Cela se produit quand $Q(a) = 0$ et $P(a) \neq 0$.

Définition 14.3 — *asymptote horizontale.*
La droite $y = L$ est une **asymptote horizontale** si $f(x) \to L$ quand $x \to \pm\infty$.
- $\deg P < \deg Q$: asymptote $y = 0$
- $\deg P = \deg Q$: asymptote $y = \frac{a_n}{b_n}$ (rapport des coefficients dominants)
- $\deg P > \deg Q$: pas d'asymptote horizontale

Définition 14.4 — *asymptote oblique.*
Si $\deg P = \deg Q + 1$, la division euclidienne donne :

$$f(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

et $y = ax + b$ est une **asymptote oblique**.

Exemple 14.1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. Division : $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$. Asymptote verticale : $x = 1$. Asymptote oblique : $y = x + 1$.

14.3 Étude complète

Pour étudier une fonction rationnelle :
1. Domaine de définition
2. Asymptotes (verticales, horizontale ou oblique)
3. Signe du numérateur et du dénominateur
4. Tableau de variations (dérivée — au chapitre suivant)
5. Graphe

Exemple 14.2. $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- AV : $x = -1$; AH : $y = 2$ (degrés égaux, $\frac{2}{1} = 2$)
- Zéro : $x = \frac{3}{2}$

Décomposition en éléments simples. Toute fraction rationnelle avec $\deg P < \deg Q$ se décompose en somme de fractions simples du type :

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}.$$

Exemple. $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}$.

Exercices

Exercice 14.1. Déterminer le domaine et les asymptotes de :

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+x}{x-2}$

Exercice 14.2. Étudier le signe de $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x-2}$.

Exercice 14.3. Résoudre :

a) $\dfrac{x+1}{x-2} = 3$

b) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x} = 2 \quad (x \neq 0, -1)$

Exercice 14.4. Trouver l'asymptote oblique de $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$ et la distance du point $(3, f(3))$ à cette asymptote.

Exercice 14.5. Résoudre $\dfrac{x+2}{x-1} \leq 2$.

Résumé du chapitre

Asymptotes

- **Verticale** $x = a$: $Q(a) = 0$, $P(a) \neq 0$
- **Horizontale** : deg $P \leq$ deg Q — limite à l'infini
- **Oblique** : deg $P =$ deg $Q + 1$ — quotient de la division euclidienne

Étude du signe

- Factoriser P et Q
- Tableau de signes : zéros de P et pôles de Q
- Le signe change aux zéros simples, pas aux zéros doubles

Inéquations

- Ramener à $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$, jamais multiplier par le dénominateur sans étudier son signe

QCM — Fonctions rationnelles

Une seule réponse correcte par question.

1. L'asymptote horizontale de $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$:

a) $y = 0$
b) $y = 1$
c) $y = 3$
d) $y = -2$

2. Le domaine de $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ est :

a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
c) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
d) $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ admet :

a) Une asymptote horizontale $y = 0$
b) Une asymptote oblique $y = x - 1$
c) Une asymptote oblique $y = x + 1$
d) Aucune asymptote

4. L'équation $\dfrac{2}{x+1} = 1$ a pour solution :

a) $x = 1$
b) $x = 2$
c) $x = 3$
d) $x = -1$

5. $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ est positive pour :

a) $x \in (-2, 3)$
b) $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
c) $x \in (-\infty, 3)$
d) $x \in (3, +\infty)$

6. Si $\deg P < \deg Q$, alors $f = P/Q$ admet :

a) Une asymptote oblique
b) L'asymptote horizontale $y = 0$
c) Aucune asymptote
d) Une asymptote verticale en $x = 0$

7. La solution de $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 0$ est :

a) $[-1, 1]$
b) $(-1, 1)$
c) $[-1, 1)$
d) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ admet :

a) Une AV en $x = 1$
b) Une AH en $y = 0$ et aucune AV
c) Une AH en $y = 1$
d) Deux AV en $x = \pm 1$

Réponses : 1-c 2-c 3-b 4-a 5-b 6-b 7-c 8-b

Chapitre 15

Fonctions exponentielles

1798. Thomas Malthus publie son Essai sur le principe de population : si rien ne l'arrête, une population croît de manière exponentielle. Une bactérie se divise en deux toutes les vingt minutes : en un jour, une seule bactérie donne 2^{72} descendants — plus que le nombre d'atomes dans votre corps. La croissance exponentielle est la croissance la plus rapide qui existe. Et la décroissance exponentielle — le carbone 14, les médicaments dans le sang — est la plus douce des disparitions. La même fonction, les deux visages du temps.

15.1 La fonction exponentielle a^x

Définition 15.1 — *fonction exponentielle de base a.*
Pour $a > 0$, $a \neq 1$, la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \mapsto a^x$$

est la **fonction exponentielle de base a**.

Proposition 15.2 — *propriétés algébriques.*
Pour $a > 0$, $a \neq 1$, et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Proposition 15.3 — *monotonie*.

- $a > 1$: f strictement croissante, $f(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$
- $0 < a < 1$: f strictement décroissante, $f(x) \to +\infty$ quand $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$

Dans les deux cas : $f(x) > 0$ pour tout x, $f(0) = 1$, asymptote horizontale $y = 0$.

15.2 Le nombre e

Définition 15.4 — *nombre* e.

Le nombre $e \approx 2{,}71828\ldots$ est défini comme la base pour laquelle la tangente au graphe de a^x en $(0, 1)$ a une pente exactement égale à 1. C'est la **base naturelle** de l'exponentielle.

La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est la plus importante de toutes les fonctions exponentielles.

15.3 Modélisation

Proposition 15.5 — *modèles exponentiels*.

- **Croissance** : $N(t) = N_0 \cdot a^t$, avec $a > 1$ et **temps de doublement** T_2 tel que $a^{T_2} = 2$
- **Décroissance** : $N(t) = N_0 \cdot a^t$, avec $0 < a < 1$ et **demi-vie** $T_{1/2}$ tel que $a^{T_{1/2}} = \frac{1}{2}$

Exemple 15.1. Une population de bactéries double toutes les 3 heures. Partie de 500 individus, combien en 12 heures ? $N(12) = 500 \cdot 2^{12/3} = 500 \cdot 2^4 = 8000$.

Comparaison croissances polynomiale et exponentielle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a > 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

L'exponentielle « l'emporte toujours » sur tout polynôme. De même, e^x croît plus vite que x^{1000}.

Exercices

Exercice 15.1. Simplifier sans calculatrice :

a) $2^3 \cdot 2^5 \div 2^4$

b) $(3^2)^3 \div 3^4$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

d) $\frac{6^{10}}{2^{10} \cdot 3^{10}}$

Exercice 15.2. Résoudre (sans logarithme) :

a) $2^x = 32$

b) $3^{2x-1} = 27$

c) $4^x = 8$

Exercice 15.3. Un isotope radioactif a une demi-vie de 8 jours. On part de 200 g.

a) Combien reste-t-il après 24 jours ?

b) Après combien de jours reste-t-il moins de 10 g ?

Exercice 15.4. Tracer l'allure des courbes de $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$ et $h(x) = 3 \cdot 2^x - 1$. Préciser les asymptotes et les ordonnées à l'origine.

Exercice 15.5. Un placement à intérêts composés de 1000 CHF à 3% annuel donne après t ans : $C(t) = 1000 \cdot 1{,}03^t$.

a) Quel capital après 10 ans ? après 20 ans ?

b) En quelle année le capital double-t-il (approximativement) ?

Résumé du chapitre

Propriétés algébriques

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad (a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Graphe de a^x

- Passe par $(0, 1)$, toujours > 0
- Asymptote horizontale $y = 0$

- $a > 1$: croissante $0 < a < 1$: décroissante

Modèles

- Doublement : $N(t) = N_0 \cdot 2^{t/T_2}$
- Demi-vie : $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$
- Intérêts composés : $C(t) = C_0 \cdot (1 + r)^t$

QCM — Fonctions exponentielles

Une seule réponse correcte par question.

1. $2^3 \cdot 4^2$ est égal à :

a) 2^7
b) 2^8
c) 8^5
d) 6^5

2. La solution de $3^x = 81$ est :

a) $x = 3$
b) $x = 4$
c) $x = 27$
d) $x = \frac{1}{4}$

3. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ est :

a) Croissante et positive
b) Décroissante et positive
c) Croissante et négative
d) Décroissante et négative

4. L'asymptote horizontale de $f(x) = 2^x + 3$ est :

a) $y = 0$
b) $y = 2$
c) $y = 3$
d) $y = 5$

5. Une population double tous les 5 ans. Après 15 ans à partir de 100 individus :

a) 600
b) 800
c) 300

d) 1000

6. $(e^2)^3 \cdot e^{-4}$ vaut :

a) e^2
b) e^{-6}
c) e^{10}
d) e^{-2}

7. La solution de $5^{2x-1} = 125$ est :

a) $x = 1$
b) $x = 2$
c) $x = \frac{3}{2}$
d) $x = 3$

8. $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$ sont :

a) L'une l'inverse de l'autre
b) Symétriques par rapport à l'axe des y
c) Égales
d) Perpendiculaires

Réponses : 1-a 2-b 3-b 4-c 5-b 6-a 7-b 8-b

Chapitre 16

Fonctions composées et réciproques

Mettre des chaussettes, puis des chaussures. Pour défaire : enlever les chaussures, puis les chaussettes. Dans l'ordre inverse. C'est exactement l'idée derrière la fonction réciproque : défaire ce qu'une fonction a fait, dans l'ordre inverse. Si f encode un message secret, f^{-1} le décode. Si f élève au carré, f^{-1} extrait la racine carrée. Toute la cryptographie moderne repose sur le fait que certaines fonctions sont très faciles à calculer dans un sens — et pratiquement impossibles à inverser.

16.1 Composition de fonctions

Définition 16.1 — *fonction composée.*

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$. La **composée** $g \circ f$ est la fonction :

$$g \circ f : A \to C, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

On lit « g rond f » ou « g après f ».

Remarque 16.1. En général, $g \circ f \neq f \circ g$. La composition n'est pas commutative.

Exemple 16.1. $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+1$. $(g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2+1$. $(f \circ g)(x) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

16.2 Fonction réciproque

Définition 16.2 — *fonction bijective.*

Une fonction $f : A \to B$ est **bijective** si :

- **Injective** : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (pas deux antécédents distincts pour une même image)
- **Surjective** : tout $y \in B$ a au moins un antécédent

Définition 16.3 — *fonction réciproque*.
Si $f : A \to B$ est bijective, sa **fonction réciproque** $f^{-1} : B \to A$ est définie par :
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Proposition 16.4 — *propriétés*.

- $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ (i.e. $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in A$)
- $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$
- Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $y = x$

Exemple 16.2. $f(x) = 2x + 3$: résoudre $y = 2x + 3$: $x = \frac{y-3}{2}$, donc $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.
Vérification : $f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x+3)-3}{2} = x$. ✓

16.3 Construction de la réciproque

Méthode :
1. Écrire $y = f(x)$
2. Exprimer x en fonction de y
3. Renommer : $f^{-1}(x) = \ldots$
4. Vérifier le domaine de f^{-1}

Remarque 16.2. Une fonction strictement monotone sur un intervalle est bijective sur cet intervalle — donc elle y admet une réciproque.

Critère de bijectivité. f est bijective $\iff$ toute droite horizontale coupe le graphe exactement en un point. Pour $f(x) = x^2$: pas bijective sur $\mathbb{R}$ (la droite $y = 4$ coupe en $x = \pm 2$). Mais bijective sur $[0, +\infty)$ avec réciproque $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Exercices

Exercice 16.1. Soient $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2$. Calculer :

a) $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(2)$

c) $(f \circ f)(x)$

Exercice 16.2. Trouver la réciproque :

a) $f(x) = 5x - 2$

b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \quad (x \neq 1)$

c) $h(x) = \sqrt{x+3} \quad (x \geq -3)$

Exercice 16.3. Soit $f(x) = 2^x$.

a) Le point $(3, 8)$ est-il sur le graphe de f ?

b) Quel point du graphe de f^{-1} correspond à $(3, 8)$?

c) Que vaut $f^{-1}(8)$?

Exercice 16.4. Décomposer $h(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$ en composée de deux fonctions simples f et g telles que $h = g \circ f$.

Exercice 16.5. La fonction $f(x) = x^2 - 4x + 5$ est-elle bijective sur $\mathbb{R}$? Sur quel intervalle est-elle bijective ? Trouver sa réciproque sur cet intervalle.

Résumé du chapitre

Composition

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ — appliquer f puis g
- Non commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général

Fonction réciproque

- Existe $\iff$ f bijective (injective + surjective)
- Méthode : isoler x dans $y = f(x)$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(y)) = y$
- Graphe : symétrique par rapport à $y = x$
- Monotone stricte $\Rightarrow$ bijective sur son domaine

QCM — Fonctions composées et réciproques

Une seule réponse correcte par question.

1. Avec $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$, $(g \circ f)(2)$ vaut :

a) 5
b) 9
c) 6
d) 3

2. La réciproque de $f(x) = \frac{x+2}{3}$ est :

a) $3x + 2$
b) $3x - 2$
c) $\frac{3}{x+2}$
d) $\frac{x-2}{3}$

3. Le graphe de f^{-1} est obtenu depuis celui de f par :

a) Symétrie par rapport à l'axe des x
b) Symétrie par rapport à l'axe des y
c) Symétrie par rapport à $y = x$
d) Translation de vecteur $(1, 1)$

4. $f(x) = x^2$ est bijective sur :

a) $\mathbb{R}$
b) $(-\infty, 0]$
c) $[0, +\infty)$
d) $[-1, 1]$

5. Si $f^{-1}(3) = 7$, alors :

a) $f(3) = 7$
b) $f(7) = 3$
c) $f(3) = \frac{1}{7}$
d) $f(7) = \frac{1}{3}$

6. $(f \circ g)(x)$ signifie :

a) Appliquer f puis g
b) Appliquer g puis f
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $\frac{f(x)}{g(x)}$

7. La réciproque de $f(x) = e^x$ est :

a) e^{-x}
b) $\ln x$
c) $\frac{1}{e^x}$
d) x^e

8. Une fonction strictement décroissante est :

a) Jamais bijective
b) Toujours bijective sur son domaine
c) Bijective seulement si son domaine est $\mathbb{R}$
d) Bijective seulement si elle est continue

Réponses : 1-b 2-b 3-c 4-c 5-b 6-b 7-b 8-b

Chapitre 17

Fonctions logarithmiques

> *Édimbourg, 1614. John Napier publie sa Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio — la description du merveilleux canon des logarithmes. Son invention : remplacer les multiplications par des additions.* $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$. *Pour les astronomes de l'époque, qui calculaient à la main des tables de positions planétaires, c'était une révolution. Kepler dit que Napier lui avait donné deux vies de travail. Aujourd'hui, les logarithmes sont partout : les décibels, le pH, l'échelle de Richter, la perception du son, la complexité des algorithmes. Napier ne pouvait pas imaginer tout cela.*

17.1 Définition

Définition 17.1 — *logarithme de base a.*
Pour $a > 0$, $a \neq 1$, le **logarithme de base a** est la réciproque de $x \mapsto a^x$:

$$\log_a x = y \iff a^y = x, \qquad x > 0.$$

Définition 17.2 — *logarithme naturel.*
Le **logarithme naturel** (ou népérien) est :

$$\ln x = \log_e x, \qquad x > 0.$$

Le **logarithme décimal** est $\log_{10} x$, noté $\log x$ en pratique.

17.2 Propriétés algébriques

Théorème 17.3 — *propriétés du logarithme*.
Pour $x, y > 0$ et $r \in \mathbb{R}$:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$
$$\log_a(x^r) = r \log_a x.$$

Valeurs particulières : $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

Proposition 17.4 — *changement de base*.

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a}.$$

17.3 Graphe et propriétés

Proposition 17.5 — *propriétés de* ln.

- Domaine : $(0, +\infty)$
- ln est strictement croissante
- $\ln x < 0$ pour $x \in (0, 1)$, $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ pour $x > 1$
- $\ln x \to -\infty$ quand $x \to 0^+$ (asymptote verticale $x = 0$)
- $\ln x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ (mais lentement)

Proposition 17.6 — *relations* ln *et* exp.

$$e^{\ln x} = x \quad (x > 0), \qquad \ln(e^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

17.4 Équations et inéquations

Exemple 17.1. Résoudre $\ln(2x - 1) = 3$: $2x - 1 = e^3 \Rightarrow x = \frac{e^3+1}{2}$.

Résoudre $2^x = 5$: $x \ln 2 = \ln 5 \Rightarrow x = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2{,}32$.

Échelles logarithmiques. La perception humaine de l'intensité sonore est logarithmique : une augmentation de 10 dB correspond à une multiplication de l'intensité par 10. L'échelle de Richter est logarithmique : un séisme de magnitude 7 libère 10 fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 6. Le pH est $-\log_{10}[\mathrm{H}^+]$: une différence d'une unité = facteur 10 de concentration.

Exercices

Exercice 17.1. Calculer sans calculatrice :

a) $\log_2 32$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$

c) $\ln e^5$

d) $e^{\ln 7}$

Exercice 17.2. Simplifier :

a) $\ln(e^2 \cdot e^3)$

b) $\log\left(\frac{100}{x^2}\right)$

c) $2\ln 3 - \ln 9 + \ln 1$

Exercice 17.3. Résoudre :

a) $\ln x = 4$

b) $e^{2x-1} = 5$

c) $\log_2(x+3) = 4$

d) $3^x = 20$

Exercice 17.4. Résoudre $\ln(x^2 - 3) > \ln(2x)$ pour $x > 0$.

Exercice 17.5. Un capital de 5000 CHF est placé à 4% annuel composé. En combien d'années double-t-il ?

Résumé du chapitre

Définition

- $\log_a x = y \iff a^y = x \quad (x > 0)$
- $\ln = \log_e$, $\log = \log_{10}$
- Changement de base : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Propriétés

- $\log(xy) = \log x + \log y$
- $\log(x/y) = \log x - \log y$
- $\log(x^r) = r \log x$
- $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln x} = x$

Équations exponentielles

- $a^x = b \Rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$
- Prendre le logarithme des deux membres

QCM — Fonctions logarithmiques

Une seule réponse correcte par question.

1. $\log_3 81$ vaut :

a) 3
b) 4
c) 27
d) $\frac{1}{4}$

2. $\ln e^{-2}$ vaut :

a) e^{-2}
b) -2
c) 2
d) $\frac{1}{2}$

3. $\log 1000 + \log 0{,}01$ vaut :

a) 5
b) 3
c) 1
d) $2{,}98$

4. La solution de $2^x = 10$ est :

a) $\frac{\log 2}{\log 10}$
b) $\frac{\ln 10}{\ln 2}$
c) $\log 8$
d) 5

5. Le domaine de $f(x) = \ln(3 - x)$ est :

a) $\mathbb{R}$
b) $(3, +\infty)$
c) $(-\infty, 3)$
d) $(-\infty, 3]$

6. $2\ln 5 - \ln 25$ vaut :

a) $\ln 10$
b) $\ln(-15)$
c) 0
d) $\ln 5$

7. La solution de $\ln(x + 2) = 1$ est :

a) $x = e - 2$
b) $x = e + 2$
c) $x = 1$
d) $x = e^2 - 2$

8. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ est :

a) Faux
b) La formule de changement de base
c) Vraie seulement pour $a = e$
d) Vraie seulement pour $x > 1$

Réponses : 1-b 2-b 3-c 4-b 5-c 6-c 7-a 8-b

Chapitre 18

Trigonométrie dans le triangle quelconque

> *Un navigateur au large, sans repère visible, doit déterminer sa position. Il connaît deux distances et l'angle entre elles, ou deux angles et une distance. La loi des sinus et la loi des cosinus lui donnent toutes les autres mesures. Ces formules, connues des astronomes arabes dès le X^e siècle, permettaient de calculer les distances entre étoiles sans jamais les atteindre. Aujourd'hui, les mêmes lois guident les GPS, les radars, les satellites. La géométrie du triangle quelconque est la géométrie du monde réel.*

18.1 Loi des sinus

Théorème 18.1 — *loi des sinus.*
Dans tout triangle ABC de côtés a, b, c et d'angles α, β, γ opposés :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

Exemple 18.1. Dans ABC : $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$, $a = 8$. $\gamma = 60°$. $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{8\sin 70°}{\sin 50°} \approx 9{,}8$.

18.2 Loi des cosinus

Théorème 18.2 — *loi des cosinus.*

Dans tout triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

(et de même pour β et γ par permutation circulaire)

Remarque 18.1. Pour $\alpha = 90°$: $\cos 90° = 0$, on retrouve Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$. La loi des cosinus est la généralisation de Pythagore à tout triangle.

Exemple 18.2. Triangle avec $b = 5$, $c = 7$, $\alpha = 60°$: $a^2 = 25 + 49 - 2(5)(7)\cos 60° = 74 - 35 = 39$. $a = \sqrt{39} \approx 6{,}24$.

18.3 Résolution de triangles

Proposition 18.3 — *cas possibles.*

- **CAC** : deux côtés et l'angle inclus → loi des cosinus pour le troisième côté
- **CCC** : trois côtés → loi des cosinus pour un angle
- **ACA** : deux angles et un côté → loi des sinus
- **CCA** : deux côtés et un angle non inclus → loi des sinus (attention : cas ambiguë possible)

18.4 Aire d'un triangle

Proposition 18.4 — *formule de l'aire.*

L'aire du triangle ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Cas SSA — ambiguïté. Quand on connaît deux côtés a, b et l'angle α (non inclus), il peut y avoir 0, 1 ou 2 triangles solutions.

- Si $a < b\sin\alpha$: aucun triangle
- Si $a = b\sin\alpha$: un triangle rectangle
- Si $b\sin\alpha < a < b$: deux triangles
- Si $a \geq b$: un seul triangle

Exercices

Exercice 18.1. Dans ABC : $\alpha = 42°$, $\beta = 78°$, $c = 15$. Trouver γ, a et b.

Exercice 18.2. Dans ABC : $b = 6$, $c = 9$, $\alpha = 110°$. Calculer a puis les angles β et γ.

Exercice 18.3. Calculer l'aire du triangle ABC avec :

a) $a = 8$, $b = 11$, $\gamma = 35°$

b) $a = 5$, $b = 7$, $c = 9$

Exercice 18.4. Un triangle a des côtés $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$. Trouver ses trois angles.

Exercice 18.5. Deux rangers A et B, distants de 3 km, observent un incendie F. A mesure un angle de 52° et B un angle de 68° (depuis la droite AB, du même côté). À quelle distance de A l'incendie se trouve-t-il ?

Résumé du chapitre

Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- Utiliser quand on connaît un côté et l'angle opposé
- Cas ACA et CCA (attention au cas ambiguë)

Loi des cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

- Cas CAC (deux côtés et angle inclus)
- Cas CCC (trois côtés → trouver les angles)
- Généralise Pythagore ($\alpha = 90° \Rightarrow$ Pythagore)

Aire

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

QCM — Trigonométrie dans le triangle quelconque

Une seule réponse correcte par question.

1. Dans ABC, $a = 10$, $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$. b vaut approximativement :

a) $7{,}1$
b) $14{,}1$
c) $12{,}2$
d) $8{,}7$

2. La loi des cosinus généralise :

a) La loi des sinus
b) Le théorème de Thalès
c) Le théorème de Pythagore
d) La formule de l'aire

3. Dans ABC, $b = 4$, $c = 6$, $\alpha = 60°$. a^2 vaut :

a) 28
b) 52
c) 24
d) 76

4. L'aire de ABC avec $b = 5$, $c = 8$, $\alpha = 30°$ est :

a) 20
b) 10
c) $\sqrt{3}$
d) $5\sqrt{3}$

5. Dans ABC, $a = b = c = 6$. Les angles valent :

a) $30°$ chacun
b) $45°$ chacun
c) $60°$ chacun
d) $90°$ chacun

6. Pour quel cas utilise-t-on la loi des sinus ?

a) CCC
b) CAC
c) ACA
d) Aucun

7. Dans ABC, $\alpha = 90°$, $b = 3$, $c = 4$. La loi des cosinus donne $a =$?

a) 1
b) 5
c) 7
d) $\sqrt{7}$

8. Le rayon du cercle circonscrit à un triangle est relié aux côtés par :

a) $R = \frac{a}{2}$
b) $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$
c) $R = \frac{\sin\alpha}{2a}$
d) $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$ et $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$

Réponses : 1-b 2-c 3-a 4-b 5-c 6-c 7-b 8-d

Chapitre 19

Fonctions trigonométriques

> *Une roue de foire tourne lentement. Un passager, parti du bas, monte, atteint le sommet, redescend, revient au bas — et recommence. Sa hauteur varie de manière régulière, périodique, douce. Si on trace sa hauteur en fonction du temps, on obtient une courbe en vague : le sinus. Fourier, au XIX^e siècle, démontra quelque chose de stupéfiant : toute fonction périodique raisonnable — le son d'une flûte, le courant électrique, la lumière — peut s'écrire comme somme de sinus et cosinus. Les fonctions trigonométriques ne décrivent pas que les triangles. Elles décrivent les ondes.*

19.1 Le cercle trigonométrique

Définition 19.1 — *cercle trigonométrique*.

Le **cercle trigonométrique** est le cercle unitaire de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens antihoraire.
Pour un angle θ (en radians ou en degrés), le point $M(\theta)$ sur le cercle a pour coordonnées :

$$M(\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta).$$

19.2 Radian

Définition 19.2 — *radian*.

Le **radian** est l'unité d'angle définie par : un angle d'un radian intercepte un arc de longueur 1 sur le cercle unité. La conversion :

$$\alpha_{\text{rad}} = \alpha_{\circ} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Proposition 19.3 — *valeurs remarquables.*

$\theta°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
θ_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

19.3 Fonctions sin, cos, tan

Proposition 19.4 — *propriétés de* sin *et* cos.

- Périodiques de période 2π : $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ pour tout θ
- sin impaire : $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- cos paire : $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ et $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

Définition 19.5 — *fonction tangente.*

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, définie pour $\cos\theta \neq 0$, c'est-à-dire $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Périodique de période π.

19.4 Transformations et graphes

Proposition 19.6 — *forme générale.*

La fonction $f(\theta) = A\sin(B\theta + C) + D$ a :

- **Amplitude** : $|A|$
- **Période** : $\frac{2\pi}{|B|}$
- **Déphasage** : $-\frac{C}{B}$
- **Décalage vertical** : D

19.5 Formules d'addition

Théorème 19.7 — *formules d'addition.*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Corollaire 19.8 — *formules de duplication.*

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Tangente, cotangente. $\tan\theta$ a des asymptotes verticales en $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
La **cotangente** $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ est définie pour $\sin\theta \neq 0$.
Identités : $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ et $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$.

Exercices

Exercice 19.1. Convertir :

a) $150°$ en radians

b) $\frac{5\pi}{4}$ en degrés

c) $-\frac{\pi}{3}$ en degrés

Exercice 19.2. Sans calculatrice :

a) $\sin\frac{3\pi}{4}$

b) $\cos\frac{4\pi}{3}$

c) $\tan\frac{5\pi}{6}$

Exercice 19.3. Résoudre sur $[0, 2\pi)$:

a) $\sin\theta = \frac{1}{2}$

b) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan\theta = \sqrt{3}$

Exercice 19.4. Identifier l'amplitude, la période et le déphasage de :

a) $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{4})$

b) $g(x) = -2\cos(\frac{x}{3}) + 1$

Exercice 19.5. En utilisant les formules d'addition, calculer exactement :

a) $\sin 75° = \sin(45° + 30°)$

b) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

Résumé du chapitre

Cercle unité et radian
- $M(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ sur le cercle unité
- $\alpha° \to \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$ rad
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Propriétés
- sin et cos : période 2π, valeurs dans $[-1, 1]$
- sin impaire, cos paire
- tan = sin / cos : période π

Forme $A\sin(B\theta + C) + D$
- Amplitude $|A|$, période $\frac{2\pi}{|B|}$, déphasage $-C/B$, décalage D

Formules d'addition
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

QCM — Fonctions trigonométriques

Une seule réponse correcte par question.

1. $270°$ en radians vaut :
a) $\frac{3\pi}{2}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) 3π

d) $\frac{\pi}{270}$

2. $\sin \frac{5\pi}{6}$ vaut :

a) $-\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. La période de $f(x) = \cos(3x)$ est :

a) 3π
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) 6π
d) $\frac{\pi}{3}$

4. $\sin(-\frac{\pi}{4})$ vaut :

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $-\frac{1}{2}$

5. L'amplitude de $f(x) = -4\sin(x) + 2$ est :

a) 2
b) -4
c) 4
d) 6

6. Les solutions de $\cos\theta = 0$ sur $[0, 2\pi)$ sont :

a) $\theta = 0$ et $\theta = \pi$
b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ seulement
c) $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$
d) $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$

7. $\sin(2\theta)$ vaut :

a) $2\sin\theta$
b) $\sin^2\theta$
c) $2\sin\theta\cos\theta$
d) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

8. La fonction cos est :

a) Paire et périodique de période π
b) Impaire et périodique de période 2π
c) Paire et périodique de période 2π
d) Ni paire ni impaire

Réponses : 1-a 2-c 3-b 4-b 5-c 6-c 7-c 8-c

Troisième partie

Troisième année

Chapitre 20

Prérequis d'analyse

Zénon d'Élée, au Ve siècle avant notre ère, propose un paradoxe resté célèbre : Achille, le plus rapide des guerriers grecs, ne peut jamais rattraper une tortue qui a une avance sur lui. Car quand il atteint la position initiale de la tortue, elle a avancé. Quand il atteint ce nouveau point, elle a encore avancé. Et ainsi de suite, à l'infini. Le paradoxe semble insoluble. Il faut attendre deux mille ans et l'invention du calcul infinitésimal pour comprendre : une somme infinie de termes peut converger vers une valeur finie. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$. *Achille rattrape bien la tortue. L'infini, dompté.*

20.1 Suites numériques

Définition 20.1 — *suite numérique.*
Une **suite numérique** est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$. On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).

Définition 20.2 — *modes de définition.*

- **Terme général** : formule explicite $u_n = f(n)$
- **Récurrence** : $u_{n+1} = g(u_n)$ avec un terme initial u_0 (ou u_1)

Exemple 20.1. $u_n = \frac{1}{n+1} : u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{3}, \ldots$
$u_0 = 1, u_{n+1} = 2u_n + 1 : u_1 = 3, u_2 = 7, u_3 = 15, \ldots$

20.2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 20.3 — *suite arithmétique.*

Une suite (u_n) est **arithmétique** de raison r si $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n. Son terme général est :

$$u_n = u_0 + nr.$$

La somme des $n+1$ premiers termes est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Définition 20.4 — *suite géométrique.*

Une suite (u_n) est **géométrique** de raison $q \neq 0$ si $u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout n. Son terme général est :

$$u_n = u_0 \cdot q^n.$$

La somme des $n+1$ premiers termes (pour $q \neq 1$) est :

$$S_n = u_0\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exemple 20.2. Arithmétique : $u_0 = 3, r = 5 : 3, 8, 13, 18, \ldots, u_n = 3 + 5n$.
Géométrique : $u_0 = 2, q = 3 : 2, 6, 18, 54, \ldots, u_n = 2 \cdot 3^n$.

20.3 Continuité intuitive

Définition 20.5 — *continuité intuitive.*

Une fonction f est **continue** en a si son graphe ne présente pas de « saut » en a : on peut tracer la courbe sans lever le crayon. Formellement (anticipation) : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemple 20.3. $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0. $g(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty)$.

Suites récurrentes et point fixe. Pour la suite $u_{n+1} = g(u_n)$, un **point fixe** est une valeur ℓ telle que $g(\ell) = \ell$. Si la suite converge, elle converge vers un point fixe.
Méthode de Newton. Pour résoudre $f(x) = 0$, on pose :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Cette suite converge très rapidement vers une racine.

Exercices

Exercice 20.1. Calculer les cinq premiers termes et le terme général :

a) Suite arithmétique : $u_1 = 7, r = -3$

b) Suite géométrique : $u_1 = 4, q = \frac{1}{2}$

c) $u_0 = 1, u_{n+1} = u_n^2 + 1$

Exercice 20.2. Calculer :

a) $\sum_{k=1}^{100} k$ (somme des entiers de 1 à 100)

b) $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10}$

c) La somme des termes pairs de 2 à 100

Exercice 20.3. Identifier le type de chaque suite et trouver le terme général :

a) $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$

b) $5, 15, 45, 135, \ldots$

c) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Exercice 20.4. Un emprunt de $10\,000$ CHF est remboursé par versements annuels constants de $1\,200$ CHF, sans intérêt.

a) Quel est le solde après n années ?

b) Après combien d'années la dette est-elle soldée ?

Exercice 20.5. Parmi ces fonctions, lesquelles ont une discontinuité ? En quel point ?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $g(x) = \lfloor x \rfloor$ (partie entière)

c) $h(x) = \sin x$

Résumé du chapitre

Suites

- Arithmétique : $u_n = u_0 + nr$, somme : $(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$
- Géométrique : $u_n = u_0 \cdot q^n$, somme : $u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- Récurrente : $u_{n+1} = g(u_n)$, point fixe si convergence

Continuité

- Intuition : pas de saut sur le graphe
- Discontinuités typiques : division par zéro, partie entière, valeur absolue à l'origine

---

QCM — Prérequis d'analyse

Une seule réponse correcte par question.

1. Une suite arithmétique de raison -2 et $u_0 = 10$. u_5 vaut :

a) 0
b) 20
c) -2
d) 8

2. La somme $1 + 3 + 5 + \cdots + 19$ (entiers impairs) vaut :

a) 90
b) 100
c) 110
d) 120

3. Suite géométrique : $u_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$. u_4 vaut :

a) $\frac{2}{9}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{6}{27}$
d) 2

4. $\sum_{k=0}^{4} 2^k$ vaut :

a) 30
b) 31
c) 32

d) 16

5. La suite $u_n = (-1)^n$ est :

a) Arithmétique
b) Géométrique de raison -1
c) Croissante
d) Ni arithmétique ni géométrique

6. Une suite récurrente converge vers ℓ. Alors :

a) $\ell = 0$ toujours
b) ℓ est un point fixe de g
c) $\ell = u_0$
d) ℓ est toujours rationnel

7. La fonction $f(x) = \frac{1}{x-2}$ est discontinue en :

a) $x = 0$
b) $x = 1$
c) $x = 2$
d) $x = -2$

8. Dans une suite géométrique, $u_0 = 1000$ et chaque terme est 10% de moins que le précédent. La raison est :

a) $0{,}1$
b) $0{,}9$
c) $-0{,}1$
d) $1{,}1$

Réponses : 1-a 2-b 3-a 4-b 5-b 6-b 7-c 8-b

Chapitre 21

Limites

> *Augustin-Louis Cauchy, Paris, 1821. Dans son Cours d'analyse, il pose enfin ce que tout le monde utilisait sans définir : la notion de limite. Avant lui, Newton et Leibniz calculaient avec des « quantités infiniment petites » — des nombres plus petits que tout réel, mais pas nuls. Cela marchait, mais personne ne savait exactement pourquoi. Cauchy remplaça ces fantômes par une définition précise : $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - L| < \varepsilon$. La rigueur moderne était née.*

21.1 Limite d'une suite

Définition 21.1 — *limite d'une suite.*
La suite (u_n) a pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ (on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$) si les termes u_n s'approchent arbitrairement de ℓ quand n grandit.
Si ℓ existe et est fini, la suite **converge**. Sinon, elle **diverge**.

Proposition 21.2 — *limites usuelles de suites.*

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ pour $k > 0$
- $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ si $|q| < 1$
- $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$
- $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ pour $k > 0$

21.2 Limite d'une fonction

Définition 21.3 — *limite en un point.*
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a, et on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si $f(x)$ s'approche de L quand x s'approche de a (sans nécessairement atteindre a).

Définition 21.4 — *limite à l'infini.*
On note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ si $f(x)$ s'approche de L quand x grandit sans borne.

21.3 Opérations sur les limites

Proposition 21.5 — *règles de calcul.*
Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = m$ (finies), alors :

$$\lim(f+g) = \ell + m, \qquad \lim(fg) = \ell m, \qquad \lim \frac{f}{g} = \frac{\ell}{m} \text{ si } m \neq 0.$$

Définition 21.6 — *formes indéterminées.*
Certaines limites ne peuvent pas être calculées directement :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Ces formes nécessitent une analyse supplémentaire.

Exemple 21.1. $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$: forme $\frac{0}{0}$. Factoriser : $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \to 2$.

21.4 Continuité

Définition 21.7 — *continuité.*
f est **continue en** a si :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

f est continue sur un intervalle si elle l'est en chaque point.

Théorème 21.8 — *valeurs intermédiaires.*
Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f(c) = 0$.

Limite remarquable.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Démonstration géométrique : encadrer $\sin x$ par l'arc et la tangente sur le cercle unité, puis appliquer le théorème des gendarmes. Cette limite est fondamentale pour dériver sin.

Exercices

Exercice 21.1. Déterminer la limite des suites :

a) $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$

b) $v_n = \dfrac{n^2-1}{2n^2+3}$

c) $w_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 5$

Exercice 21.2. Calculer les limites :

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-1}{x^2+x}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Exercice 21.3. Montrer que $f(x) = x^3 - 2x - 5$ admet une racine dans l'intervalle $[2, 3]$.

Exercice 21.4. Retrouver les asymptotes de $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$ par le calcul de limites.

Exercice 21.5. Lever les formes indéterminées :

a) $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ *(utiliser* $\sin^2 + \cos^2 = 1$*)*

Résumé du chapitre

Limites usuelles

- $\frac{1}{n^k} \to 0$, $q^n \to 0$ si $|q| < 1$, $n^k \to +\infty$
- Fractions rationnelles : diviser par la plus haute puissance

Formes indéterminées

- $\frac{0}{0}$: factoriser $\frac{\infty}{\infty}$: diviser $\infty - \infty$: conjugué

Continuité et TVI

- Continue en $a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- TVI : f continue, $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés ⇒ racine dans (a, b)

QCM — Limites

Une seule réponse correcte par question.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{n-1}$ vaut :

a) 3
b) 2
c) $+\infty$
d) 0

2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ vaut :

a) 0
b) 3
c) 6
d) $+\infty$

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}$ vaut :

a) $+\infty$
b) 1
c) 3
d) 0

4. $\frac{0}{0}$ est :

a) Toujours égal à 1
b) Toujours égal à 0
c) Une forme indéterminée
d) Toujours infini

5. f est continue en a si :

a) $f(a) = 0$
b) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$
c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
d) $f'(a)$ existe

6. Le TVI garantit une racine dans (a, b) si :

a) $f(a) = f(b) = 0$
b) f est croissante sur $[a, b]$
c) f continue et $f(a) \cdot f(b) < 0$
d) $f(a) > 0$ seulement

7. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 + x} - x)$ vaut :

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) $+\infty$
d) 1

8. La suite $u_n = (-1)^n$:

a) Converge vers 0
b) Converge vers 1
c) Converge vers -1
d) Diverge

Réponses : 1-b 2-c 3-d 4-c 5-c 6-c 7-b 8-d

Chapitre 22

Dérivation — outils et premières applications

> *Londres, 1666. La grande peste oblige Isaac Newton à quitter Cambridge et à se retirer à Woolsthorpe, chez sa mère. Deux années d'isolement forcé. Il en ressort avec le calcul différentiel, la loi de la gravitation universelle et la décomposition de la lumière. La dérivée, pour Newton, était une vitesse : comment vite change une quantité ? À Berlin, au même moment, Leibniz arrive aux mêmes idées par un chemin différent, avec une notation différente. La dispute de priorité durera des décennies. Mais la notation de Leibniz — $\frac{dy}{dx}$ — a gagné.*

22.1 Taux de variation et nombre dérivé

Définition 22.1 — *taux de variation.*

Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ est :

$$\tau(a, h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

Géométriquement, c'est la pente de la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$.

Définition 22.2 — *nombre dérivé.*
La fonction f est **dérivable en** a si la limite :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a. Géométriquement, $f'(a)$ est la pente de la **tangente** au graphe de f en $(a, f(a))$.

Proposition 22.3 — *équation de la tangente.*
La tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

22.2 Dérivées des fonctions usuelles

Proposition 22.4 — *tableau des dérivées.*

$f(x)$	$f'(x)$
c (constante)	0
x^n $(n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

22.3 Règles opératoires

Proposition 22.5 — *règles de dérivation.*
Pour f et g dérivables, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(\lambda f)' &= \lambda f' \\
(f+g)' &= f' + g' \\
(fg)' &= f'g + fg' \quad \text{(règle du produit)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \text{(règle du quotient)}
\end{aligned}$$

Proposition 22.6 — *dérivée de la composée (règle de chaîne).*
Si $h = g \circ f$, alors :
$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Exemple 22.1. $(e^{3x})' = 3e^{3x}$. $(\sin(x^2))' = 2x\cos(x^2)$. $(\ln(2x+1))' = \frac{2}{2x+1}$.

22.4 Applications

Proposition 22.7 — *dérivée et vitesse.*
Si $x(t)$ est la position d'un objet au temps t, alors sa **vitesse** est $v(t) = x'(t)$ et son **accélération** est $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

Dérivées des fonctions réciproques. Si $g = f^{-1}$, alors :
$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$
Applications : $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercices

Exercice 22.1. Par définition (limite du taux de variation), calculer $f'(a)$:

a) $f(x) = x^2$, $a = 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$

Exercice 22.2. Calculer $f'(x)$:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 1$

b) $f(x) = (x^2 + 1)(2x - 3)$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

d) $f(x) = e^{x^2}\sin x$

Exercice 22.3. Dériver (règle de chaîne) :

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $g(x) = \cos(3x - \pi)$

c) $h(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$

d) $k(x) = (x^3 + x)^5$

Exercice 22.4. Trouver l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ au point d'abscisse $x = 1$.

Exercice 22.5. Un objet se déplace selon $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en mètres, t en secondes).

a) Trouver la vitesse $v(t)$ et l'accélération $a(t)$.

b) Quand l'objet est-il à l'arrêt ?

c) Quand l'accélération est-elle nulle ?

Résumé du chapitre

Nombre dérivé

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad = \text{pente de la tangente en } a$$

Dérivées usuelles

- $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\quad (e^x)' = e^x$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$

Règles

- $(fg)' = f'g + fg'$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Chaîne : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Tangente en $(a, f(a))$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

QCM — Dérivation I

Une seule réponse correcte par question.

1. La dérivée de $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$ est :

a) $5x^4 - 6x$

b) $5x^4 - 3x$
c) $x^4 - 6x + 2$
d) $5x^4 - 6x + 2$

2. $(e^{2x})'$ vaut :

a) e^{2x}
b) $2xe^{2x}$
c) $2e^{2x}$
d) e^{2x-1}

3. La pente de la tangente à $f(x) = x^2$ en $x = 3$ est :

a) 3
b) 6
c) 9
d) 12

4. $(\ln(3x))'$ vaut :

a) $\frac{3}{x}$
b) $\frac{1}{3x}$
c) $\frac{1}{x}$
d) $3\ln x$

5. La règle du produit : $(fg)' = ?$

a) $f'g'$
b) $f'g + fg'$
c) $f'g - fg'$
d) $(f + g)'$

6. $(\cos(x^2))'$ vaut :

a) $-\sin(x^2)$
b) $-2x\sin(x^2)$
c) $2x\cos(x^2)$
d) $-\sin(2x)$

7. L'équation de la tangente à $y = e^x$ en $x = 0$ est :

a) $y = x$
b) $y = x + 1$
c) $y = e^x$
d) $y = 1$

8. $\left(\frac{1}{x^2}\right)'$ vaut :

a) $\frac{-2}{x^3}$
b) $\frac{2}{x^3}$
c) $\frac{-1}{2x}$
d) $-2x$

Réponses : 1-a 2-c 3-b 4-c 5-b 6-b 7-b 8-a

Chapitre 23

Dérivation — étude de fonctions et optimisation

Un architecte veut construire une boîte sans couvercle à partir d'un carré de carton de 60 cm de côté, en découpant des carrés aux coins et en repliant. Quelle taille de découpe maximise le volume ? Ce problème d'optimisation est typique : il y a une quantité à maximiser, une contrainte géométrique, et une variable. Fermat fut l'un des premiers à comprendre, au XVII^{e} siècle, que les extrema se trouvent là où la tangente est horizontale — là où la dérivée s'annule. Nous allons formaliser cette intuition.

23.1 Dérivée et monotonie

Théorème 23.1 — *signe de la dérivée et monotonie.*

Soit f dérivable sur un intervalle I.

- $f'(x) > 0$ sur $I \Rightarrow f$ strictement croissante
- $f'(x) < 0$ sur $I \Rightarrow f$ strictement décroissante
- $f'(x) = 0$ sur $I \Rightarrow f$ constante

23.2 Extrema

Définition 23.2 — *extremum local.*

f admet un **maximum local** en a si $f(x) \leq f(a)$ pour x proche de a. Un **minimum local** est défini de manière analogue.

Proposition 23.3 — *condition nécessaire.*

Si f est dérivable et admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. (Réciproque fausse : $f'(a) = 0$ n'implique pas un extremum.)

Proposition 23.4 — *condition suffisante.*

Si f' change de signe en a :

- f' passe de $+$ à $-$: maximum local en a
- f' passe de $-$ à $+$: minimum local en a
- f' ne change pas de signe : point d'inflexion

23.3 Étude complète de fonction

La méthode standard :

1. Domaine de définition
2. Limites aux bords du domaine (asymptotes)
3. Calcul de f', résolution de $f'(x) = 0$
4. Tableau de variations
5. Graphe

Exemple 23.1. $f(x) = x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. $f' < 0$ sur $(-1, 1)$, $f' > 0$ sur $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Maximum local : $f(-1) = 2$. Minimum local : $f(1) = -2$.

23.4 Problèmes d'optimisation

Exemple 23.2. Boîte sans couvercle : carré de côté 60 cm, on découpe des carrés de côté x aux coins. $V(x) = x(60-2x)^2$, $x \in (0, 30)$. $V'(x) = (60-2x)^2 + x \cdot 2(60-2x)(-2) = (60-2x)[(60-2x)-4x] = (60-2x)(60-6x)$. $V' = 0$: $x = 30$ (rejeté) ou $x = 10$. Maximum : $V(10) = 10 \cdot 40^2 = 16\,000$ cm^3.

Dérivée seconde et convexité. $f''(x) = (f')'(x)$ est la **dérivée seconde**.

- $f'' > 0$ sur I : f **convexe** (courbe « en U »)
- $f'' < 0$ sur I : f **concave** (courbe « en ∩ »)
- $f''(a) = 0$ avec changement de signe : **point d'inflexion**

Théorème de Rolle. Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercices

Exercice 23.1. Étudier les variations et trouver les extrema :

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Exercice 23.2. Parmi tous les rectangles de périmètre 40 cm, trouver celui qui a l'aire maximale.

Exercice 23.3. Étude complète de $f(x) = xe^{-x}$.

Exercice 23.4. Le coût de production de x unités est $C(x) = x^3-6x^2+15x+10$ (en centaines de CHF). Le coût marginal est $C'(x)$.

a) Calculer $C'(x)$.

b) Pour quelle valeur de x le coût marginal est-il minimal ?

Exercice 23.5. **[MA2]** Appliquer le théorème de Rolle à $f(x) = x^3-x$ sur $[-1, 1]$. Trouver le c garanti par le théorème.

Résumé du chapitre

Dérivée et monotonie
- $f' > 0 \Rightarrow$ croissante $f' < 0 \Rightarrow$ décroissante
- Extremum local possible seulement si $f' = 0$
- Changement de signe de f' détermine le type

Étude complète
1. Domaine 2. Limites/asymptotes 3. f' et tableau 4. Graphe

Optimisation
- Exprimer la quantité à optimiser en fonction d'une seule variable
- Trouver les zéros de la dérivée
- Vérifier qu'il s'agit bien d'un extremum

QCM — Dérivation II

Une seule réponse correcte par question.

1. $f'(a) = 0$ signifie que f admet en a :

a) Toujours un maximum
b) Toujours un minimum
c) Peut-être un extremum, peut-être pas
d) Toujours un point d'inflexion

2. $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Le minimum est atteint en :

a) $x = 0$
b) $x = 2$
c) $x = 4$
d) $x = -1$

3. Si $f' > 0$ sur (a, b) alors f est :

a) Décroissante sur (a, b)
b) Croissante sur (a, b)
c) Constante sur (a, b)
d) Convexe sur (a, b)

4. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. La valeur maximale est :

a) -5
b) 4
c) 5
d) 3

5. Pour un problème d'optimisation, si f' passe de $-$ à $+$ en x_0, alors $f(x_0)$ est :

a) Un maximum local
b) Un minimum local
c) Un point d'inflexion
d) Un zéro de f

6. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Sur quel intervalle est-elle décroissante ?

a) $(-\infty, -1)$
b) $(-1, 1)$
c) $(1, +\infty)$
d) $\mathbb{R}$ entier

7. Parmi les rectangles de périmètre fixé, l'aire maximale est atteinte pour :

a) Un rectangle allongé
b) Un carré
c) Un cercle
d) Cela dépend du périmètre

8. La dérivée seconde $f''(a) > 0$ indique que f est :

a) Croissante en a
b) Décroissante en a
c) Convexe (en U) en a
d) Concave en a

Réponses : 1-c 2-b 3-b 4-b 5-b 6-b 7-b 8-c

Chapitre 24

Combinatoire et probabilités

Été 1654. Le chevalier de Méré, joueur professionnel, pose une question à Blaise Pascal : est-il plus avantageux de parier sur l'obtention d'au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou sur l'obtention d'au moins un double-six en vingt-quatre lancers de deux dés ? Pascal écrit à Fermat. Fermat répond. Une correspondance de quelques mois donne naissance à la théorie des probabilités. Une question de jeu. Un outil universel. Aujourd'hui : météo, médecine, finance, physique quantique. Tout ce qui est incertain s'exprime en probabilités.

24.1 Dénombrement

Proposition 24.1 — *principe multiplicatif*.
Si une expérience se fait en k étapes successives, avec n_1 choix à la première, n_2 à la deuxième, etc., le nombre total de résultats est $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

Définition 24.2 — *permutations*.
Le nombre de façons d'ordonner n objets distincts est :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1.$$

Convention : $0! = 1$.

Définition 24.3 — *arrangements*.
Le nombre d'arrangements de k objets parmi n (ordre important) :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Définition 24.4 — *combinaisons.*
Le nombre de façons de choisir k objets parmi n (ordre sans importance) :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Proposition 24.5 — *triangle de Pascal.*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

24.2 Espace de probabilité

Définition 24.6 — *probabilité.*
Un **espace de probabilité** est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ où :
- Ω est l'**univers** (ensemble des issues)
- $\mathcal{F}$ est l'ensemble des événements
- $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ satisfait : $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$

Proposition 24.7 — *propriétés.*

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\varnothing) = 0$

24.3 Probabilité conditionnelle et Bayes

Définition 24.8 — *probabilité conditionnelle.*
La **probabilité de A sachant B** (avec $P(B) > 0$) :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Définition 24.9 — *indépendance.*
A et B sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Théorème 24.10 — *Bayes.*

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Exemple 24.1. Un test médical détecte une maladie avec probabilité $0{,}95$ (sensibilité), et donne 5% de faux positifs. La maladie touche 1% de la population. Probabilité d'être malade si le test est positif ?

$$P(M \mid +) = \frac{0{,}95 \times 0{,}01}{0{,}95 \times 0{,}01 + 0{,}05 \times 0{,}99} \approx 16\%.$$

Paradoxes probabilistes. Le **problème de Monty Hall** : vous choisissez une porte parmi trois (une voiture, deux chèvres). L'animateur ouvre une porte avec une chèvre. Faut-il changer ? Oui : la probabilité de gagner en changeant est $\frac{2}{3}$. Contre-intuitif, mais démontrable par Bayes.

Exercices

Exercice 24.1.

a) Combien de mots de 3 lettres distinctes peut-on former avec l'alphabet (26 lettres) ?

b) Un comité de 4 personnes est choisi parmi 10. Combien de comités possibles ?

c) Combien d'anagrammes du mot MATHS ?

Exercice 24.2. On lance deux dés équilibrés.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 7 ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Exercice 24.3. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire deux boules successivement sans remise.

a) $P(2 \text{ rouges})$?

b) $P(2\text{e rouge} \mid 1\text{ère rouge})$?

c) Les deux tirages sont-ils indépendants ?

Exercice 24.4. Une usine a trois machines : A (40% de la production, 2% de défauts), B (35%, 3%), C (25%, 5%). Une pièce défectueuse est choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de C ?

Exercice 24.5. Calculer $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{3}$, puis vérifier par le triangle de Pascal que $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.

Résumé du chapitre

Dénombrement

- Permutations de n : $n!$
- Arrangements de k parmi n : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Combinaisons : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Probabilités

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Conditionnelle : $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Indépendance : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Bayes : $P(A \mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

QCM — Combinatoire et probabilités

Une seule réponse correcte par question.

1. $\binom{5}{2}$ vaut :

a) 5
b) 10
c) 20
d) 25

2. Le nombre d'anagrammes de « CHAT » est :

a) 12
b) 16
c) 24
d) 48

3. $P(\overline{A}) = 0{,}3$. Alors $P(A) = ?$

a) $0{,}3$
b) $0{,}7$
c) $1{,}3$
d) $-0{,}3$

4. A et B indépendants, $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$. $P(A \cap B) = ?$

a) $0{,}9$
b) $0{,}1$
c) $0{,}2$
d) $0{,}45$

5. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est défini si :

a) $P(A) > 0$
b) $P(B) > 0$
c) $P(A \cap B) > 0$
d) Toujours

6. Un groupe de 3 est formé parmi 7 personnes. Le nombre de groupes possibles est :

a) 21
b) 35
c) 210
d) 343

7. La formule de Bayes permet de :

a) Calculer $P(A \cup B)$
b) Inverser la conditionnelle : calculer $P(A \mid B)$ depuis $P(B \mid A)$
c) Montrer que deux événements sont indépendants
d) Calculer $n!$

8. $P(A \cup B)$ avec $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}2$:

a) $1{,}1$
b) $0{,}9$
c) $0{,}3$
d) $0{,}8$

Réponses : 1-b 2-c 3-b 4-c 5-b 6-b 7-b 8-b

Chapitre 25

Géométrie vectorielle

1844. Hermann Grassmann publie sa Théorie de l'extension : un langage pour décrire les forces, les déplacements, les rotations dans l'espace. Personne ne comprend. Le texte est trop abstrait, trop en avance. Trente ans plus tard, les physiciens redécouvrent l'idée : un vecteur est à la fois une direction et une intensité. La mécanique, l'électromagnétisme, la relativité — tout se formule en vecteurs. Aujourd'hui, les vecteurs sont partout : dans les moteurs de jeux vidéo, les prévisions météo, les algorithmes de recommandation. Grassmann avait raison, trop tôt.

25.1 Vecteurs dans le plan

Définition 25.1 — *vecteur*.

Un **vecteur** $\vec{v}$ est caractérisé par une direction, un sens et une longueur (norme). Deux segments orientés sont équivalents s'ils ont même direction, sens et longueur. $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur de A vers B.

Définition 25.2 — *coordonnées d'un vecteur*.

Dans un repère orthonormé, si $A = (x_1, y_1)$ et $B = (x_2, y_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

La **norme** : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Proposition 25.3 — *opérations.*

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \qquad \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}.$$

25.2 Produit scalaire

Définition 25.4 — *produit scalaire.*

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta,$$

où θ est l'angle entre les vecteurs. En coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd.$$

Proposition 25.5 — *applications du produit scalaire.*

- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$

25.3 Vecteurs dans l'espace

Définition 25.6 — *vecteur dans* $\mathbb{R}^3$.

Un vecteur de l'espace a trois composantes : $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = a\alpha + b\beta + c\gamma$.

Proposition 25.7 — *équation de plan.*

Un plan de vecteur normal $\vec{n} = (A, B, C)$ passant par $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Produit vectoriel. Le **produit vectoriel** de $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ est :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}.$$

Il est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et sa norme est $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$. Application : aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

Exercices

Exercice 25.1. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer :

a) $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

d) L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Exercice 25.2. Trouver toutes les valeurs de k telles que $\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ soient perpendiculaires.

Exercice 25.3. Soients $A(1, 2)$, $B(4, 6)$, $C(7, 2)$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

c) L'angle en A est-il droit ?

Exercice 25.4. Trouver l'équation du plan passant par $P(1, 2, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2, -1, 4)$.

Exercice 25.5. Les points $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(5, 9)$ sont-ils colinéaires ?

Résumé du chapitre

Vecteurs

- $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
- Norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Opérations : addition composante par composante, multiplication scalaire

Produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$
- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Angle : $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Espace

- Norme : $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Plan : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0M} = 0$

QCM — Géométrie vectorielle

Une seule réponse correcte par question.

1. $\overrightarrow{AB}$ avec $A(2, 3)$ et $B(5, 1)$:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\|\vec{u}\|$ avec $\vec{u} = (3, -4)$:

a) 1
b) 7
c) 5
d) $\sqrt{7}$

3. $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (3, -1)$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = ?$

a) 1
b) 5
c) -1
d) 3

4. $\vec{u} = (2, k)$ et $\vec{v} = (3, 6)$ perpendiculaires. $k = ?$

a) 1
b) -1
c) -3

d) 3

5. L'angle entre $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$:

a) $0°$
b) $45°$
c) $90°$
d) $180°$

6. $A(1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(2, 1)$ forment un triangle :

a) Rectangle en A
b) Rectangle en C
c) Équilatéral
d) Isocèle non rectangle

7. La norme de $\vec{u} = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ est :

a) 1
b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) 3

8. Le plan d'équation $2x - y + 3z = 6$ a pour vecteur normal :

a) $(6, 0, 0)$
b) $(2, -1, 3)$
c) $(2, 1, 3)$
d) $(-2, 1, -3)$

Réponses : 1-a 2-c 3-a 4-b 5-c 6-d 7-c 8-b

Quatrième partie

Quatrième année

Chapitre 26

Intégration

Archimède, au III^e siècle avant notre ère, voulait calculer l'aire d'un segment parabolique. Sa méthode : l'inscrire dans des rectangles de plus en plus fins, calculer leur somme, puis passer à la limite. Il ne le savait pas, mais il inventait l'intégrale. Deux mille ans plus tard, Newton et Leibniz découvrirent le miracle : l'intégrale est l'opération inverse de la dérivée. Ce lien — le théorème fondamental de l'analyse — est l'une des plus grandes découvertes de l'histoire des mathématiques. Il transforme un problème géométrique (une aire) en un problème algébrique (une primitive).

26.1 Primitive

Définition 26.1 — *primitive.*
F est une **primitive** de f sur I si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Proposition 26.2 — *primitives usuelles.*

$f(x)$	$F(x)$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

Remarque 26.1. Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I, et deux primitives diffèrent d'une constante.

26.2 Intégrale de Riemann

Définition 26.3 — *intégrale définie.*
L'**intégrale** de f de a à b est :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f. On note $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Proposition 26.4 — *interprétation géométrique.*
Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, l'intégrale est l'aire sous la courbe. En général :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{aire(au-dessus)} - \text{aire(au-dessous)}.$$

26.3 Théorème fondamental

Théorème 26.5 — *fondamental de l'analyse.*
Si f est continue sur $[a, b]$, alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

26.4 Techniques d'intégration

Proposition 26.6 — *linéarité.*
$\int(\lambda f + \mu g)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f\,\mathrm{d}x + \mu \int g\,\mathrm{d}x$.

Proposition 26.7 — *substitution.*
$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,du$ avec $u = g(x)$.

Proposition 26.8 — *intégration par parties.*
$\int u\,dv = uv - \int v\,du$, ou :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

26.5 Applications

Proposition 26.9 — *aire entre deux courbes.*
L'aire entre f et g sur $[a, b]$ (avec $f \geq g$) :

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx.$$

Intégrales impropres. Si f est continue sur $[a, +\infty)$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Exemples. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = 1$ (converge). $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx = +\infty$ (diverge).

Exercices

Exercice 26.1. Calculer les primitives :

a) $\int (3x^2 - 2x + 1) \, dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

c) $\int e^{2x} \, dx$

d) $\int \sin(3x) \, dx$

Exercice 26.2. Calculer les intégrales :

a) $\int_0^2 (x^2 - x) \, dx$

b) $\int_0^\pi \sin x \, dx$

c) $\int_1^e \frac{1}{x} \, dx$

Exercice 26.3. Par substitution :

a) $\int x\sqrt{x^2 + 1} \, dx$

b) $\int_0^1 2xe^{x^2} \, dx$

Exercice 26.4. Par parties :

a) $\int xe^x \, \mathrm{d}x$

b) $\int_1^e x \ln x \, \mathrm{d}x$

Exercice 26.5. Calculer l'aire de la région bornée par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$.

Résumé du chapitre

Primitive

- $F' = f$; deux primitives diffèrent d'une constante
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ donc $\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Intégrale définie

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- Aire sous la courbe si $f \geq 0$

Techniques

- Substitution : $u = g(x)$, $du = g'(x) \, \mathrm{d}x$
- Par parties : $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

QCM — Intégration

Une seule réponse correcte par question.

1. Une primitive de $f(x) = 3x^2$ est :

a) $6x$
b) x^3
c) $x^3 + 5$
d) $3x^3$

2. $\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$ vaut :

a) e
b) $e - 1$
c) 1
d) $e + 1$

3. Une primitive de $\cos x$ est :

a) $-\sin x$

b) $\sin x$
c) $-\cos x$
d) $\tan x$

4. $\int_1^2 \frac{1}{x}$ dx vaut :

a) $\ln 2$
b) 1
c) $\frac{1}{2}$
d) 2

5. Le théorème fondamental dit que si $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ alors :

a) $F(x) = f(x)$
b) $F'(x) = f(x)$
c) $F'(x) = f'(x)$
d) $F(x) = f'(x)$

6. $\int \frac{2x}{x^2+1}$ dx vaut :

a) $\frac{x^2}{x^2+1} + C$
b) $\ln(x^2+1) + C$
c) $2\ln(x^2+1) + C$
d) $\arctan x + C$

7. L'aire entre $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0, 1]$:

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) 1

8. La technique « par parties » s'écrit :

a) $\int fg = \int f \cdot \int g$
b) $\int u\,dv = uv + \int v\,du$
c) $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
d) $\int f(g(x)) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Réponses : 1-b 2-b 3-b 4-a 5-b 6-b 7-a 8-c

Chapitre 27

Fonctions logarithme et exponentielle — étude analytique

> *Qu'est-ce que e ? Euler le définit par une limite : $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Un banquier dirait : c'est la valeur d'un placement d'une unité à 100% d'intérêt, composé en continu. Un analyste dirait : c'est la seule base pour laquelle la dérivée de a^x est exactement a^x — la fonction qui est sa propre dérivée. Un probabiliste : c'est $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Toutes ces définitions sont équivalentes. e est le nombre le plus naturel de l'analyse.*

27.1 Définition analytique de ln

Définition 27.1 — *logarithme naturel.*

Pour $x > 0$, le **logarithme naturel** est défini par :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Proposition 27.2 — *propriétés déduites.*

- $\ln 1 = 0$ (intégrale nulle)
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (théorème fondamental)
- ln est strictement croissante
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(x^r) = r \ln x$

Proposition 27.3 — *limites de* ln.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Croissances comparées :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

27.2 La fonction exponentielle

Définition 27.4 — *exponentielle.*
La fonction exp est la réciproque de ln :

$$\exp(x) = e^x, \qquad e = \exp(1) \approx 2{,}71828.$$

Proposition 27.5 — *propriétés de* exp.

- $(e^x)' = e^x$ — seule fonction égale à sa dérivée
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$
- $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$; $\ln(e^x) = x$ pour tout x

27.3 Équations différentielles à variables séparables

Définition 27.6 — *équation différentielle.*
Une **équation différentielle** est une équation reliant une fonction inconnue $y(t)$ et ses dérivées.

Proposition 27.7 — *équation* $y' = ky$.
Les solutions de $y' = ky$ ($k \in \mathbb{R}$) sont :

$$y(t) = Ce^{kt}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $y(0) = y_0$ donne $C = y_0$.

Exemple 27.1. Population : $N' = 0{,}03N$, $N(0) = 1000$. Solution : $N(t) = 1000e^{0{,}03t}$. Doublement : $e^{0{,}03t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23$ ans.

Développements limités. Au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Ces formules permettent d'approcher e^x et $\ln(1+x)$ par des polynômes, et de calculer des limites en formes indéterminées.

Exercices

Exercice 27.1. Simplifier :

a) $e^{\ln 3 + \ln 5}$

b) $\ln(e^2 \cdot e^{-1})$

c) $e^{3\ln 2}$

d) $\ln \sqrt{e}$

Exercice 27.2. Étudier complètement $f(x) = x \ln x$ sur $(0, +\infty)$.

Exercice 27.3. Résoudre :

a) $y' = -2y$, $y(0) = 5$

b) $y' = y + 1$

c) Une substance se désintègre à un taux proportionnel à sa masse : $m' = -0{,}1m$, $m(0) = 200$ g. Quand restera-t-il 50 g ?

Exercice 27.4. Calculer :

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x$

b) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$

Exercice 27.5. Calculer les limites :

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Résumé du chapitre

Définitions analytiques

- $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\exp = \ln^{-1}$ $\quad (e^x)' = e^x$

Croissances comparées

- $\frac{\ln x}{x} \to 0$, $\frac{x^n}{e^x} \to 0$, $x \ln x \to 0$ (en 0^+)

Équation différentielle

- $y' = ky \Rightarrow y = Ce^{kt}$
- Condition initiale $y(0) = y_0 \Rightarrow C = y_0$

QCM — Fonctions ln et exp

Une seule réponse correcte par question.

1. $(\ln x)' = ?$

a) e^x
b) x
c) $\frac{1}{x}$
d) $\ln x$

2. La seule solution de $y' = y$ avec $y(0) = 3$ est :

a) $y = 3x$
b) $y = 3e^x$
c) $y = e^{3x}$
d) $y = 3 \ln x$

3. $e^{\ln 7} = ?$

a) $\ln 7$
b) $7e$
c) 7
d) e^7

4. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = ?$

a) $+\infty$
b) $-\infty$
c) 0
d) 1

5. $\int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = ?$

a) $e - 1$
b) 1
c) e
d) $\frac{1}{e}$

6. $f(x) = e^{-x^2}$ est :

a) Croissante sur $\mathbb{R}$
b) Décroissante sur $\mathbb{R}$
c) Croissante sur $(-\infty, 0)$, décroissante sur $(0, +\infty)$
d) Croissante sur $(0, +\infty)$, décroissante sur $(-\infty, 0)$

7. La solution de $N' = 2N$, $N(0) = 100$ double en :

a) $t = 1$
b) $t = \frac{\ln 2}{2}$
c) $t = 2 \ln 2$
d) $t = \frac{1}{2}$

8. $\ln x$ est défini pour :

a) Tout $x \in \mathbb{R}$
b) $x > 0$
c) $x \geq 0$
d) $x \neq 0$

Réponses : 1-c 2-b 3-c 4-c 5-b 6-c 7-b 8-b

Chapitre 28

Nombres complexes [MA2]

> *Milan, 1545. Gerolamo Cardan publie son Ars Magna. En résolvant des équations cubiques, il rencontre des expressions comme $\sqrt{-1}$ — des racines de nombres négatifs. Il les appelle « nombres sophistiqués » et les manipule à contrecœur, comme des fantômes algébriques. Son élève Bombelli ira plus loin : il posera des règles de calcul cohérentes pour ces objets mystérieux. Deux siècles plus tard, Euler leur donnera le nom qui restera : nombres imaginaires. Et Gauss montrera qu'ils ne sont pas une curiosité mais une nécessité : tout polynôme de degré n a exactement n racines dans $\mathbb{C}$.*

28.1 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 28.1 — *nombre complexe.*
L'ensemble des **nombres complexes** est

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\},$$

où i est l'**unité imaginaire** vérifiant $i^2 = -1$. Pour $z = a + bi$:

- $a = \mathrm{Re}(z)$ est la **partie réelle**
- $b = \mathrm{Im}(z)$ est la **partie imaginaire**
- $\overline{z} = a - bi$ est le **conjugué**
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le **module**

Proposition 28.2 — *opérations algébriques.*
Soient $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$.

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

Exemple 28.1. $(2+3i)(1-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$.
$\dfrac{1+i}{2-i} = \dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2+i+2i+i^2}{4+1} = \dfrac{1+3i}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i.$

28.2 Forme trigonométrique

Définition 28.3 — *forme trigonométrique.*
Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

où $r = |z| > 0$ est le module et $\theta = \arg(z)$ est l'**argument** (angle avec l'axe réel positif).

Proposition 28.4 — *multiplication en forme trigonométrique.*
Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$:

$$z_1z_2 = r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big).$$

Multiplier = multiplier les modules, additionner les arguments.

28.3 Forme exponentielle et formule d'Euler

Théorème 28.5 — *formule d'Euler.*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

En particulier : $e^{i\pi} + 1 = 0$ (identité d'Euler, souvent citée comme la plus belle formule des mathématiques).

Définition 28.6 — *forme exponentielle.*
$z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Proposition 28.7 — *formules de Moivre.*

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

c'est-à-dire :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

28.4 Racines n-ièmes

Proposition 28.8 — *racines n-ièmes de l'unité.*
Les n racines n-ièmes de l'unité sont :

$$\omega_k = e^{2\pi ik/n} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Elles forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Théorème 28.9 — *théorème fondamental de l'algèbre.*
Tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicité).

Exercices

Exercice 28.1. Calculer et mettre sous forme $a + bi$:

a) $(3 - 2i)^2$

b) $\dfrac{2+i}{1-3i}$

c) $(1 + i)^4$

Exercice 28.2. Trouver le module et l'argument de :

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = -\sqrt{3} + i$

c) $z_3 = -4$

Exercice 28.3. Trouver les racines carrées de $z = 3 + 4i$.

Exercice 28.4. En utilisant la formule d'Euler, exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

Exercice 28.5. Trouver les trois racines cubiques de l'unité et les représenter dans le plan complexe.

Résumé du chapitre

Forme algébrique $z = a + bi$

- $i^2 = -1$ $\quad \overline{z} = a - bi$ $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$

Forme trigonométrique / exponentielle

- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
- Multiplication : modules $\times$, arguments $+$
- Formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Racines n-ièmes

- n racines régulièrement espacées sur le cercle
- Théorème fondamental : tout polynôme degré n a n racines dans $\mathbb{C}$

QCM — Nombres complexes [MA2]

Une seule réponse correcte par question.

1. i^3 vaut :

a) 1
b) -1
c) i
d) $-i$

2. Le module de $3 - 4i$ est :

a) 1
b) 5
c) 7
d) $\sqrt{7}$

3. $(1 + i)^2$ vaut :

a) 2
b) $2i$
c) $1 + 2i$
d) -2

4. L'argument de $-i$ est :

a) 0

b) $\frac{\pi}{2}$
c) $-\frac{\pi}{2}$
d) π

5. La formule d'Euler donne $e^{i\pi} = ?$

a) 1
b) -1
c) i
d) 0

6. Le conjugué de $\frac{1}{i}$ est :

a) i
b) $-i$
c) 1
d) -1

7. Les racines carrées de -4 sont :

a) ± 2
b) $\pm 2i$
c) $2i$ seulement
d) $\pm\sqrt{2}i$

8. Combien de racines cubiques a $z = 8$?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 8

Réponses : 1-d 2-b 3-b 4-c 5-b 6-a 7-b 8-c

Chapitre 29

Algèbre linéaire

1750. Gabriel Cramer publie sa règle pour résoudre des systèmes d'équations linéaires. Mais c'est Carl Friedrich Gauss qui, au XIXe siècle, généralise et systématise : toute résolution d'un système linéaire passe par des opérations élémentaires sur les lignes. Une méthode universelle, mécanique, que les ordinateurs exécutent à des milliards d'opérations par seconde. L'algèbre linéaire est le cœur du calcul numérique : moteurs de recherche, intelligence artificielle, graphisme 3D, simulations physiques — tout repose sur la résolution de systèmes linéaires et la manipulation de matrices.

29.1 Systèmes linéaires et méthode de Gauss

Définition 29.1 — *système linéaire*.

Un **système de m équations à n inconnues** s'écrit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où : A est la matrice $m \times n$ des coefficients, $\mathbf{x}$ le vecteur des inconnues, $\mathbf{b}$ le vecteur des termes constants.

Proposition 29.2 — *méthode de Gauss*.

On transforme le système par opérations élémentaires sur les lignes :

- Échanger deux lignes
- Multiplier une ligne par un scalaire non nul
- Ajouter un multiple d'une ligne à une autre

On obtient une forme échelonnée, puis on remonte (**pivot de Gauss**).

29.2 Matrices

Définition 29.3 — *matrice*.

Une **matrice** $m \times n$ est un tableau de mn réels disposés en m lignes et n colonnes. $(A)_{ij} = a_{ij}$ est l'élément à la ligne i, colonne j.

Proposition 29.4 — *opérations matricielles*.

- **Addition** : $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (mêmes dimensions)
- **Produit scalaire** : $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$
- **Produit matriciel** : $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ (A est $m \times p$, B est $p \times n$)

Remarque 29.1. Le produit matriciel n'est pas commutatif : $AB \neq BA$ en général.

29.3 Déterminants

Définition 29.5 — *déterminant* 2×2.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Définition 29.6 — *déterminant* 3×3 *(règle de Sarrus)*.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Proposition 29.7 — *matrice inverse*.

Une matrice carrée A est **inversible** si $\det A \neq 0$. Son inverse A^{-1} vérifie $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
Pour 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

MA2 — Approfondissement

Valeurs propres et vecteurs propres. $\vec{v} \neq \vec{0}$ est un **vecteur propre** de A pour la **valeur propre** λ si :

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

> Les valeurs propres sont les racines du **polynôme caractéristique** $\det(A - \lambda I) = 0$. La diagonalisation de A (si possible) : $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.

Exercices

Exercice 29.1. Résoudre par la méthode de Gauss :

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$

Exercice 29.2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer AB, BA et A^2.

Exercice 29.3. Calculer les déterminants :

a) $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 29.4. Trouver l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et vérifier $AA^{-1} = I$.

Exercice 29.5. **[MA2]** Trouver les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Résumé du chapitre

Systèmes et Gauss

- Opérations : échanger, multiplier, combiner des lignes
- Forme échelonnée puis remontée

Matrices

- Produit : $(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$
- Non commutatif : $AB \neq BA$ en général

Déterminant et inverse

- $\det(2 \times 2) = ad - bc$
- Inversible $\iff$ $\det \neq 0$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

QCM — Algèbre linéaire

Une seule réponse correcte par question.

1. $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = ?$

a) 5
b) 11
c) 8
d) 14

2. Le produit matriciel AB est défini si :

a) A et B sont carrées
b) Le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B
c) A et B ont les mêmes dimensions
d) $\det A \neq 0$

3. Une matrice A est inversible si et seulement si :

a) A est carrée
b) $\det A \neq 0$
c) A est symétrique
d) $\det A = 1$

4. La solution de $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$:

a) $(1, 2)$
b) $(2, 1)$
c) $(3, 0)$
d) $(0, 3)$

5. AB et BA sont :

a) Toujours égaux
b) Jamais égaux
c) Égaux si A et B sont diagonales
d) Toujours égaux si $\det A = \det B$

6. L'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Un système 3×3 avec $\det A = 0$:

a) A toujours une solution unique
b) N'a jamais de solution
c) A soit aucune, soit une infinité de solutions
d) A exactement deux solutions

8. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont :

a) Toujours nulles
b) Les éléments diagonaux
c) Les éléments non diagonaux
d) Toujours positives

Réponses : 1-a 2-b 3-b 4-b 5-c 6-c 7-c 8-b

Chapitre 30

Compléments d'algèbre linéaire [MA2]

1844, encore Grassmann. Son Ausdehnungslehre — la théorie de l'extension — pose les bases de ce qu'on appellera bien plus tard les espaces vectoriels. L'idée : il existe des objets qu'on peut additionner et multiplier par des scalaires, et qui vérifient quelques règles simples. Les vecteurs géométriques, bien sûr. Mais aussi les polynômes, les fonctions continues, les matrices, les suites. Tous ces objets si différents obéissent aux mêmes lois algébriques. Un seul cadre pour les unifier : l'espace vectoriel.

30.1 Espaces vectoriels

Définition 30.1 — *espace vectoriel*.

Un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ est un ensemble V muni d'une addition et d'une multiplication scalaire vérifiant les huit axiomes :

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. Il existe $\vec{0}$ tel que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. Il existe $-\vec{u}$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
6. $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
7. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
8. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

Exemple 30.1. $\mathbb{R}^n$, les polynômes $\mathbb{R}[x]$, les fonctions continues $\mathcal{C}([a,b])$, les matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ sont tous des espaces vectoriels.

30.2 Sous-espaces, base, dimension

Définition 30.2 — *sous-espace vectoriel.*

$W \subseteq V$ est un **sous-espace** si :

- $\vec{0} \in W$
- $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$
- $\vec{u} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \vec{u} \in W$

Définition 30.3 — *famille libre, génératrice, base.*

Une famille $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est :

- **libre** (linéairement indépendante) si : $\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0$
- **génératrice** si tout vecteur de V est combinaison linéaire des $\vec{v}_i$
- une **base** si elle est libre et génératrice

La **dimension** de V est le nombre de vecteurs dans une base.

30.3 Applications linéaires

Définition 30.4 — *application linéaire.*

$f : V \to W$ est **linéaire** si :

$$f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}).$$

Définition 30.5 — *noyau et image.*

- $\ker f = \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$ (**noyau**)
- $\operatorname{Im} f = \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$ (**image**)

Théorème 30.6 — *théorème du rang.*

$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V.$$

30.4 Diagonalisation

Définition 30.7 — *valeurs et vecteurs propres.*

λ est **valeur propre** de A si $\det(A - \lambda I) = 0$. Le vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ vérifiant $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ est un **vecteur propre**.

Proposition 30.8 — *diagonalisation*.
A est **diagonalisable** s'il existe une base de vecteurs propres. Alors :

$$A = PDP^{-1},$$

où D est diagonale (valeurs propres sur la diagonale) et P la matrice des vecteurs propres en colonnes.

Exemple 30.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Valeurs propres : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Vecteur propre pour $\lambda_1 = 2 : (A - 2I)\vec{v} = \vec{0} : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0}$; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_2 = 3 : \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercices

Exercice 30.1. Parmi ces ensembles, lesquels sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$?

a) $W_1 = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$

b) $W_2 = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$

c) $W_3 = \{(x, y) \mid xy = 0\}$

Exercice 30.2. Les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 2)$ et $\vec{v}_2 = (3, 5)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$? Si oui, exprimer $(4, 7)$ dans cette base.

Exercice 30.3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 30.4. Vérifier que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x - 3y)$ est linéaire. Trouver sa matrice dans la base canonique.

Exercice 30.5. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, trouver $\ker f_A$ et $\operatorname{Im} f_A$, puis vérifier le théorème du rang.

Résumé du chapitre

Espace vectoriel

- 8 axiomes : addition et multiplication scalaire
- Exemples : $\mathbb{R}^n$, polynômes, fonctions continues
- Sous-espace : stable par $+$ et $\cdot$, contient $\vec{0}$

Base et dimension

- Famille libre + génératrice = base
- dim V = nombre de vecteurs dans une base
- Test : det $\neq 0 \iff$ base de $\mathbb{R}^n$

Applications linéaires

- $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$
- Théorème du rang : dim ker f + dim Im f = dim V

Diagonalisation

- Valeurs propres : $\det(A - \lambda I) = 0$
- $A = PDP^{-1}$ si n vecteurs propres indépendants

QCM — Compléments d'algèbre linéaire [MA2]

Une seule réponse correcte par question.

1. $\{(x, y) \mid 2x - y = 0\}$ est :

a) Un sous-espace de $\mathbb{R}^2$
b) Pas un sous-espace (ne contient pas $\vec{0}$)
c) Pas un sous-espace (non stable par $+$)
d) Un espace vectoriel de dimension 2

2. La dimension de $\mathbb{R}^3$ est :

a) 1
b) 2
c) 3
d) ∞

3. $f(x, y) = (x + y, 2x)$ est-elle linéaire ?

a) Oui
b) Non, car $f(0,0) \neq (0,0)$
c) Non, car pas de multiplication scalaire
d) On ne peut pas savoir

4. Le noyau de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - y$:

a) $\{(0,0)\}$
b) $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
c) $\mathbb{R}^2$
d) $\{(1,0)\}$

5. Si A a valeurs propres 2 et 3, det A = ?

a) 5
b) 6
c) 1
d) $\sqrt{6}$

6. Le théorème du rang dit :

a) $\dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f$
b) $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$
c) $\dim \ker f \cdot \dim \operatorname{Im} f = \dim V$
d) $\dim \ker f = \dim V$

7. Une matrice 2×2 est diagonalisable si :

a) Elle est symétrique
b) Elle a 2 valeurs propres distinctes
c) Son déterminant est non nul
d) Ses coefficients sont entiers

8. Les polynômes de degré ≤ 2 forment un espace vectoriel de dimension :

a) 2
b) 3
c) 4
d) ∞

Réponses : 1-a 2-c 3-a 4-b 5-b 6-b 7-b 8-b

Chapitre 31

Suites et séries [MA2]

Achille et la tortue, encore. Zénon nous dit qu'Achille ne peut jamais rattraper la tortue car il doit d'abord atteindre sa position initiale, puis la suivante, et ainsi de suite — une infinité d'étapes. Mais voilà : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ *Ce n'est pas une somme infinie qui diverge vers l'infini. C'est une somme infinie qui converge vers* 1. *Comprendre quand une somme infinie a un sens, quand elle converge, quand elle diverge — c'est le cœur de la théorie des séries. Et la réponse à Zénon : Achille rattrape bien la tortue, en un temps fini, somme d'une infinité de durées finies.*

31.1 Convergence des suites

Définition 31.1 — *limite d'une suite.*

(u_n) **converge** vers ℓ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Proposition 31.2 — *critères de convergence.*

- Toute suite monotone bornée converge
- Théorème des gendarmes : $a_n \leq u_n \leq b_n$ et $a_n, b_n \to \ell \Rightarrow u_n \to \ell$
- Suite de Cauchy : critère sans connaître la limite

31.2 Séries numériques

Définition 31.3 — *série*.
La **série** de terme général a_n est la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

La série **converge** si (S_n) converge. Sa **somme** est $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Proposition 31.4 — *condition nécessaire*.
Si $\sum a_k$ converge, alors $a_k \to 0$. (La réciproque est fausse : $\sum \frac{1}{k}$ diverge bien que $\frac{1}{k} \to 0$.)

31.3 Série géométrique

Théorème 31.5 — *série géométrique*.
Pour $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Pour $|q| \geq 1$: la série diverge.

Exemple 31.1. $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

$0{,}\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots = \frac{3/10}{1-1/10} = \frac{1}{3}.$

31.4 Critères de convergence

Proposition 31.6 — *critère de d'Alembert*.
Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$:

- $L < 1$: $\sum a_n$ converge absolument
- $L > 1$: $\sum a_n$ diverge
- $L = 1$: pas de conclusion

Proposition 31.7 — *critère de comparaison.*
Si $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout n :
- $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
- $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

Exemple 31.2. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (par comparaison ou critère de Riemann — résultat : $\frac{\pi^2}{6}$).
$\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Proposition 31.8 — *séries de Riemann.*
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercices

Exercice 31.1. Étudier la convergence des suites :

a) $u_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2-2}$

b) $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

c) $w_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 31.2. Calculer les sommes :

a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

b) $\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

c) Montrer que $0{,}\overline{9} = 1$.

Exercice 31.3. Appliquer le critère de d'Alembert :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$

Exercice 31.4. Étudier la convergence par comparaison :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

Exercice 31.5. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge-t-elle ? Donner la réponse et trois exemples (un convergent, un divergent, un cas limite).

Résumé du chapitre

Convergence des suites

- Monotone bornée ⇒ converge
- Gendarmes : $a_n \le u_n \le b_n$, $a_n, b_n \to \ell \Rightarrow u_n \to \ell$

Séries

- $\sum a_k$ converge ⇒ $a_k \to 0$ (nécessaire, non suffisant)
- Géométrique : $\sum q^k = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$
- Riemann : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$
- Harmonique : $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Critères

- D'Alembert : $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L < 1$: converge, $L > 1$: diverge
- Comparaison : $0 \le a_n \le b_n$

QCM — Suites et séries [MA2]

Une seule réponse correcte par question.

1. $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = ?$

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) 3

d) $\frac{2}{3}$

2. La série $\sum \frac{1}{n}$:

a) Converge vers 1
b) Converge vers $\ln 2$
c) Diverge
d) Converge vers π

3. Si $\sum a_n$ converge, alors a_n :

a) Tend vers 1
b) Tend vers 0
c) Est positif
d) Est décroissant

4. $\sum \frac{1}{n^3}$:

a) Diverge
b) Converge ($\alpha = 3 > 1$)
c) Converge vers 1
d) On ne sait pas

5. Critère de d'Alembert : $L = 0{,}5$ implique :

a) Divergence
b) Convergence
c) Pas de conclusion
d) Convergence vers $0{,}5$

6. $0{,}\overline{3}$ en fraction :

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{3}{10}$
d) $\frac{1}{3{,}3}$

7. Une suite monotone croissante et majorée :

a) Diverge toujours
b) Converge toujours
c) Peut converger ou diverger
d) Converge vers 0

8. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (série télescopique) vaut :

a) $\frac{\pi^2}{6}$

b) 2
c) 1
d) $\ln 2$

Réponses : 1-b 2-c 3-b 4-b 5-b 6-b 7-b 8-c

Chapitre 32

Probabilités — variables aléatoires et lois

> *Carl Friedrich Gauss, 1809. En analysant les erreurs de mesure des astronomes, il remarque quelque chose : les erreurs ne sont pas aléatoires dans tous les sens. Elles se distribuent symétriquement autour de zéro, avec de petites erreurs bien plus fréquentes que de grandes. La courbe qu'il dessine — en cloche, symétrique, s'étalant à l'infini — porte aujourd'hui son nom : la loi normale. Elle décrit la hauteur des humains, les variations boursières, les résultats des examens, les fluctuations quantiques. Pourquoi ? Le théorème central limite répond : la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes converge toujours vers une loi normale.*

32.1 Variables aléatoires discrètes

Définition 32.1 — *variable aléatoire discrète.*

Une **variable aléatoire discrète** X est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ prenant un nombre fini ou dénombrable de valeurs $x_1, x_2, \ldots$
Sa **loi** est donnée par les probabilités : $p_k = P(X = x_k)$, avec $\sum_k p_k = 1$.

Définition 32.2 — *espérance et variance.*

$$E(X) = \sum_k x_k p_k \qquad \text{(espérance, « moyenne »)}$$

$$V(X) = E\big[(X - E(X))^2\big] = E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad \text{(variance)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \qquad \text{(écart-type)}$$

32.2 Loi binomiale

Définition 32.3 — *loi binomiale.*
On répète n fois une épreuve de Bernoulli indépendante avec probabilité de succès p. Le nombre de succès X suit une **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

$E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$.

Exemple 32.1. On lance 10 fois une pièce équilibrée. X = nombre de piles. $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$. $P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 24{,}6\%$. $E(X) = 5$, $\sigma(X) = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4}} \approx 1{,}58$.

32.3 Loi de Poisson

Définition 32.4 — *loi de Poisson.*
La **loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ modélise le nombre d'événements rares dans un intervalle :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$E(X) = \lambda$, $V(X) = \lambda$.

Exemple 32.2. Un central téléphonique reçoit en moyenne 3 appels par minute. $P(X = 0) = e^{-3} \approx 5\%$. $P(X \geq 1) = 1 - e^{-3} \approx 95\%$.

32.4 Loi normale

Définition 32.5 — *loi normale.*
X suit une **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$. La courbe est en cloche, symétrique autour de μ.

Proposition 32.6 — *règle des σ.*
Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68\%$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95\%$
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\%$

Proposition 32.7 — *standardisation*.

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ (loi normale standard). On lit les probabilités dans la table de Φ.

Théorème central limite. Si $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d. d'espérance μ et d'écart-type σ, alors pour n grand :

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1).$$

Conséquence : la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est approximée par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ pour n grand.

Exercices

Exercice 32.1. X prend les valeurs -1, 0, 1, 2 avec probabilités $0{,}1$, $0{,}3$, $0{,}4$, $0{,}2$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 32.2. On tire 8 cartes avec remise d'un jeu de 52. $X =$ nombre d'as.

a) Quelle loi suit X ?

b) $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X \geq 2)$?

c) $E(X)$ et $\sigma(X)$?

Exercice 32.3. Un site reçoit en moyenne 5 visites par minute. On modélise par une loi de Poisson.

a) $P(X=0)$? $P(X=5)$?

b) $P(X \geq 2)$?

Exercice 32.4. Les notes d'un examen suivent $\mathcal{N}(12,4)$ (moyenne 12, écart-type 2).

a) Quelle proportion obtient entre 10 et 14 ?

b) Quelle proportion obtient plus de 16 ?

Exercice 32.5. $X \sim \mathcal{N}(100, 25)$. Calculer $P(90 \leq X \leq 110)$ en standardisant et utilisant $\Phi(2) \approx 0{,}977$.

Résumé du chapitre

Variables aléatoires

- $E(X) = \sum x_k p_k \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \sigma = \sqrt{V}$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

- $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- $E = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

- $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$
- $E = V = \lambda$

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- Courbe en cloche, symétrique en μ
- Règle 68%-95%-99,7%
- Standardisation : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

QCM — Probabilités II

Une seule réponse correcte par question.

1. $X \sim \mathcal{B}(10, 0{,}3)$. $E(X) = ?$

a) $0{,}3$
b) 3
c) 7
d) $\sqrt{3}$

2. $P(X = 3)$ pour $X \sim \mathcal{B}(5, 0{,}5)$:

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{5}{16}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{3}{8}$

3. Pour une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$: $P(X = 0) = ?$

a) 0
b) e^{-2}
c) $2e^{-2}$
d) $\frac{1}{2}$

4. $X \sim \mathcal{N}(50, 16)$. $P(42 \leq X \leq 58) \approx ?$

a) 68%
b) 95%
c) 99,7%
d) 50%

5. La variance de $\mathcal{B}(n, p)$ est :

a) np
b) np^2
c) $np(1-p)$
d) $\sqrt{np}$

6. Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit :

a) $\mathcal{N}(\mu, 1)$
b) $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
c) $\mathcal{N}(0, 1)$
d) $\mathcal{B}(1, 0{,}5)$

7. La loi de Poisson modélise :

a) Le résultat d'un seul lancer de dé
b) Le nombre de succès en n essais
c) Le nombre d'événements rares par unité de temps
d) La durée entre deux événements

8. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Si $E(X) = 2$ et $E(X^2) = 5$:

a) $V(X) = 1$
b) $V(X) = 3$
c) $V(X) = 9$
d) $V(X) = 7$

Réponses : 1-b 2-b 3-b 4-b 5-c 6-c 7-c 8-a