La combinatoire sur une équation diophantienne

Robinson Cartez

L'énoncé

Combien de solutions, en nombres entiers positifs, a l'équation suivante ?

$$x + y + z = 8$$

De quoi il s'agit ?

Les équations diophantiennes sont des équations polynomiales à une ou plusieurs inconnues, dont les solutions sont cherchées parmis les nombres entiers ou éventuellement rationnels (des fractions). Les coefficients de l'équation étant eux-mêmes des nombres entiers.

Si les énoncés paraissent simples, en général les méthodes pour les résoudre peuvent devenir complexes et parfois il a fallu l'effort conjoint de plusieurs mathématiciens pour venir à bout de certaines d'entre elles, comme par exemple le "Dernier théorème de Fermat" [1].

Ce type d'équations doit son nom à Diophante d'Alexandrie, un mathématicien grec du III^e siècle qui s'est intéressé à des questions de cette nature.

Dans l'équation ci-dessus, il s'agit de compter le nombre de triplets (x, y, z) qui vérifient l'équation. Dans le cas présent, il s'agit de nombres entiers positifs $(1, 2, 3, \ldots)$.

Un exemple de triplet vérifiant l'équation est $(6, 1, 1)$, car

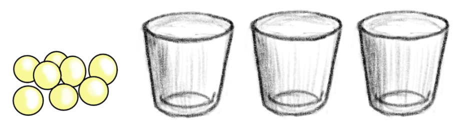
$$6 + 1 + 1 = 8$$

Ci-après nous présentons une méthode de résolution générale de ce genre de problèmes, appliquée pour le coup à l'équation ci-dessus.

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Dernier_théorème_de_Fermat

Un peu de combinatoire

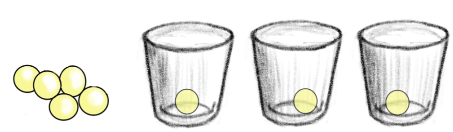
Afin de compter le nombre de solutions, et pour ne pas en oublier, nous allons changer de registre : supposons qu'on veut placer 8 billes dans 3 verres. Vous l'aurez remarqué : les variables x, y et z de l'énoncé se sont transformées en trois verres.



Ce changement de registre est possible, car il s'agit de simples additions entre des nombres entiers. Si l'équation diophantienne avait été $x^2 + y + z^2 = 2009$, il aurait fallu utiliser une autre méthode.

Puisque l'énoncé impose des entiers non nuls, chaque verre contiendra au minimum une bille. Le but est de compter de combien de manières différentes peut-on placer les 8 billes dans 3 verres.

Ainsi, placer une bille dans chaque verre traduit le fait que x, y et z doivent être au minimum égaux à 1. Avant de commencer à compter le nombre de façons de ranger ces 8 billes dans les 3 verres, nous réduisons le nombre de billes de trois unités : une par verre.



Nous avons transformé le problème de départ en un problème équivalent : placer 5 $(= 8 - 3)$ billes dans 3 verres.

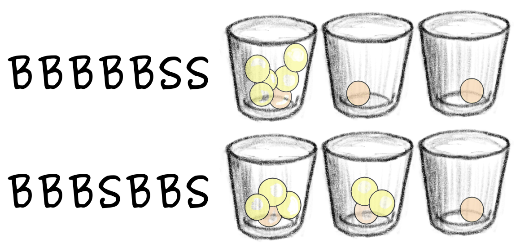
Puisque ce nouveau problème est équivalent au problème de départ, sa solution est solution du problème d'origine.

Mais nous pouvons encore nous faciliter la tâche de comptage et modéliser comme suit : au lieu de compter le placement de billes dans les verres, nous allons compter le nombre de mots que l'on peut former avec 7 $(= 5 + 2)$ lettres :

$$\mathrm{BBBBBSS}$$

où les B correspondent aux billes (cinq) et les S aux séparations (deux) (qui elles-mêmes correspondent aux deux signes "+" du problème d'origine).

C'est un modèle qui colle bien à la situation. En effet, le "mot" ci-dessus est bien une des solutions trouvée plus haut :



Dans le dessin ci-dessus, nous voyons en rose les 3 billes fixées au départ. Les espaces entre les verres correspondent aux S du mot de gauche et chaque B correspond à une des cinq billes à placer, en jaune dans le dessin..

Pour compter le nombre de mots de 7 lettres (5 B et 2 S), on utilise la **combinatoire**.

Par définition la factorielle d'un entier naturel est le produit de tous les entiers entre 1 et le nombre en question. Par exemple la factorielle de 4, qui se note 4!, le nombre suivi du point d'exclamation "!", vaut

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Pour des raisons pratiques, on pose que la factorielle de zéro est égale à un : $0! = 1$.

Ainsi, en combinatoire, on apprend que le nombre de permutations de n lettres différentes vaut $n!$. Donc, pour un mot de 7 lettres, le nombre de mots différents est donné par le nombre de permutations de ces sept lettres dans mot. Peu importe que les mots résultant de chacune des permutations aient un sens ou pas : ce qui nous intéresse est de compter le nombre de combinaisons de ces sept lettres et pas la signification des mots qui en résultent.

Cependant, cette définition ne fonctionne pas si le mot comporte deux ou plusieurs fois la même lettre. En effet, pour trois lettres ABA il n'y a que trois mots différents, malgré le fait que $3! = 6$: AAB, ABA, BAA.

On rappelle que pour trois lettres différentes ABC nous avons six mots différents : ABC, BAC, BCA, CBA, CAB, ACB. Si on remplace le C de ces mots par un deuxième A on aura : ABA, BAA, BAA, ABA, AAB, AAB.

Sur cet exemple on remarque que le premier mot est le même que le quatrième ; que le deuxième est le même que le troisième ; que le cinquième est le même que le sixième. La théorie combinatoire nous dit qu'il faut alors **diviser** le nombre de permutations par la factorielle du nombre de lettres qui sont répétées. Ainsi le nombre de mots ou anagrammes du mot ABA est :

$$\frac{3!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 3$$

où le $2!$ correspond aux deux A du mot.

Le calcul final

Donc, nous avons le mot

$$\mathrm{BBBBBSS}$$

et nous voudrions savoir combien d'anagrammes peut-on former avec cette suite de lettres. Comme il y a une répétition de cinq B nous devons diviser par $5!$, mais aussi par $2!$, puisque nous avons deux lettres S. En tout cela fait sept lettres, et le nombre de mots différents que l'on peut créer est de

$$\frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} = 21$$

La réponse au problème de départ, à savoir

Combien de solutions, en nombres entiers positifs, a l'équation suivante ?

$$x + y + z = 8$$

est de 21.

Questions

a) Combien de solutions, en nombres entiers positifs, a l'équation suivante ?

$$x + y + z = 15$$

b) Combien de solutions, en nombres entiers positifs, a l'équation suivante ?

$$x + y + z = 100$$