

MATH  
EMAT  
IQUE  
4<sup>e</sup>

Cours de mathématiques de 4<sup>ème</sup> année

A.F. - R.C.

7 mars 2024



# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Théorie des ensembles et ensembles de nombres</b>	<b>1-1</b>
1.1 Théorie des ensembles	1-2
1.1.1 Définitions et propriétés	1-2
1.1.2 Opérations entre ensembles	1-6
1.2 Ensembles de nombres	1-11
1.2.1 Des entiers naturels aux réels	1-11
1.2.2 Les nombres réels	1-13
1.2.3 Intervalles	1-15
1.2.4 Valeur approchée	1-18
1.2.5 Diagrammes de Carroll	1-19
<b>2 Calcul algébrique avec les nombres réels</b>	<b>2-1</b>
2.1 Priorité des opérations	2-2
2.2 Règle des parenthèses	2-2
2.3 Produit	2-2
2.4 Fractions	2-4
2.4.1 Opérations sur les fractions	2-4
2.4.2 Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple	2-6
2.5 Proportions	2-8
2.6 Puissances $n^{\text{ième}}$	2-12
2.6.1 Définition	2-12
2.6.2 Propriétés	2-13
2.7 Racines $n^{\text{ième}}$	2-14
2.7.1 Définition	2-14
2.7.2 Propriétés	2-15
2.7.3 Calculs avec des racines	2-16
2.7.4 Remarque importante sur la racine carrée	2-17
2.8 Inégalités	2-19
<b>3 Équations</b>	<b>3-1</b>
3.1 Calcul littéral	3-2
3.1.1 Monômes	3-3
3.1.2 Polynômes	3-4
3.1.3 Opérations sur les monômes et polynômes	3-5

3.1.4	Factorisation de polynômes . . . . .	3-7
3.1.5	Division de polynômes . . . . .	3-10
3.2	Équations à une inconnue de degré 1 et 2 . . . . .	3-13
3.2.1	Équations du premier degré . . . . .	3-13
3.2.2	Équations du deuxième degré . . . . .	3-14
3.3	Équations à une inconnue de degré 3 . . . . .	3-15
3.4	Équations linéaires à 2 inconnues . . . . .	3-18
3.4.1	Équations du premier degré - droites . . . . .	3-18
3.4.2	Position relative de deux droites . . . . .	3-26
3.5	Systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues . . . . .	3-27
3.5.1	Interprétation géométrique . . . . .	3-27
3.5.2	Méthode de résolution . . . . .	3-29
3.6	Preuves . . . . .	3-32
3.6.1	Méthode/formule de Viète . . . . .	3-32
3.6.2	Théorème du reste . . . . .	3-33
3.6.3	Méthode des déterminants . . . . .	3-34
<b>4</b>	<b>Fonctions polynomiales de degré 2 et 3</b> . . . . .	<b>4-1</b>
4.1	Généralités sur les fonctions . . . . .	4-2
4.2	Fonctions polynomiales de degré 2 . . . . .	4-6
4.2.1	Définition . . . . .	4-6
4.2.2	Représentations graphiques . . . . .	4-7
4.2.3	Optimum d'une fonction quadratique . . . . .	4-16
4.3	Fonctions polynomiales de degré 3 . . . . .	4-18
4.3.1	Définition . . . . .	4-18
4.3.2	Représentations graphiques . . . . .	4-18
4.3.3	Optimum d'une fonction cubique . . . . .	4-26
4.3.4	Preuves informelles . . . . .	4-28
<b>5</b>	<b>Suites et séries</b> . . . . .	<b>5-1</b>
5.1	Introduction . . . . .	5-2
5.2	Suites et sommes arithmétiques . . . . .	5-4
5.2.1	Définition . . . . .	5-4
5.2.2	Sommes finies de termes de suites arithmétiques . . . . .	5-4
5.3	Suites et sommes géométriques . . . . .	5-5
5.3.1	Définition . . . . .	5-5
5.3.2	Sommes finies de termes de suites géométriques . . . . .	5-6
<b>6</b>	<b>Nomenclature, angles et polygones</b> . . . . .	<b>6-1</b>
6.1	Qu'est-ce que la géométrie ? . . . . .	6-2
6.2	Les angles et leurs mesure . . . . .	6-3
6.3	Les polygones . . . . .	6-7
6.4	Somme des angles dans un polygone . . . . .	6-12



<b>7</b>	<b>Pythagore et Thalès</b>	<b>7-1</b>
7.1	Le théorème de Pythagore . . . . .	7-2
7.2	Le théorème de Thalès . . . . .	7-9
<b>8</b>	<b>Trigonométrie dans un triangle quelconque</b>	<b>8-1</b>
8.1	Introduction . . . . .	8-2
8.2	Rappels . . . . .	8-3
8.3	Théorèmes relatifs aux triangles quelconques . . . . .	8-5
8.4	Exercices . . . . .	8-10
<b>9</b>	<b>Cercles et disques</b>	<b>9-1</b>
9.1	Définitions et rappels . . . . .	9-2
9.2	Périmètre et aire du disque . . . . .	9-4
9.3	Démonstration du calcul de l'aire du disque . . . . .	9-6
9.4	Longueur d'un arc et aire d'un secteur . . . . .	9-7
9.5	Exercices . . . . .	9-9
<b>10</b>	<b>Volumes</b>	<b>10-1</b>
10.1	Généralités . . . . .	10-2
10.2	Parallélépipède rectangle et cube . . . . .	10-3
10.3	Cylindre droit . . . . .	10-3
10.4	Sphère . . . . .	10-5
10.5	Cône droit . . . . .	10-5
10.6	Pyramide . . . . .	10-6
10.7	Exercices . . . . .	10-7
<b>11</b>	<b>Probabilités</b>	<b>11-1</b>
11.1	Introduction . . . . .	11-2
11.2	Expérience aléatoire, événements . . . . .	11-3
11.2.1	Rappel : opérations de la théorie des ensembles . . . . .	11-4
11.2.2	Opérations sur les événements . . . . .	11-4
11.3	Notion de probabilité et axiomes . . . . .	11-5
11.3.1	Probabilités 'combinatoires' . . . . .	11-5
11.3.2	Axiomes des probabilités . . . . .	11-6
11.4	Probabilités conditionnelles . . . . .	11-10
11.5	Épreuves successives . . . . .	11-12
11.6	Théorème de Bayes . . . . .	11-14
<b>12</b>	<b>Exercices et problèmes</b>	<b>12-1</b>
12.1	Série 1 . . . . .	12-2
12.2	Série 2 . . . . .	12-6
12.3	Série 3 . . . . .	12-9
12.4	Série 4 . . . . .	12-12

*Table des matières*

12.5 Série 5 . . . . .	12-15
12.6 Série 6 . . . . .	12-17
12.7 Série 7 . . . . .	12-19
12.8 Série 8 . . . . .	12-21
12.9 Série 9 . . . . .	12-23
12.10 Série 10 . . . . .	12-25
12.11 Série 11 . . . . .	12-28
12.12 Série 12 . . . . .	12-30
12.13 Série 13 . . . . .	12-33
12.14 Série 14 . . . . .	12-36

# Table des figures

1.1	$\bar{A}$ le complémentaire de $A$ . . . . .	1-5
1.2	L'union de $A$ et $B$ . . . . .	1-6
1.3	L'intersection de $A$ et $B$ . . . . .	1-7
1.4	Les ensembles $A$ et $B$ sont disjoint . . . . .	1-8
1.5	Principe d'inclusion et d'exclusion . . . . .	1-9
1.6	La différence des ensembles $A$ et $B$ . . . . .	1-10
1.7	Les ensembles de nombres . . . . .	1-13
1.8	La droite réelle . . . . .	1-13
1.9	Représentation des intervalles . . . . .	1-16
1.10	Intersection, union et différence d'intervalles . . . . .	1-17
1.11	Un diagramme de Venn représentant un ensemble de référence $U$ contenant 4 ensembles $A, B, C$ et $D$ ; par exemple, ici, la notation $ABD$ désigne l'ensemble $A \cap B \cap D$ des éléments qui possèdent les caractéristiques de $A, B$ et $D$ . . . . .	1-19
1.12	Diagramme de Carroll pour deux ensembles $A$ et $B$ . . . . .	1-20
1.13	Digramme de Carroll pour deux <b>partitions</b> de l'ensemble de référence $U$ . . . . .	1-21
3.1	Position des polynômes lors d'une division euclidienne . . . . .	3-11
3.2	Division du polynôme $6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2$ par le polynôme $x^2 + 2$ . . . . .	3-11
3.3	Diviseurs de $a_0 = -1$ et de $a_3 = 2$ . . . . .	3-17
3.4	Augmentation des ordonnées . . . . .	3-19
3.5	Équation de la droite $y = mx + p$ . . . . .	3-20
3.6	Équation de la droite $y = 2x + 1$ . . . . .	3-21
3.7	Équation de droite connaissant la pente et un point . . . . .	3-22
3.8	Graphique de la droite $y = 4x - 1$ . . . . .	3-23
3.9	Pente d'une droite comme rapport de variations verticale et horizontale . . . . .	3-24
3.10	Pente comme la tangente d'un angle . . . . .	3-24
3.11	Graphique d'une droite verticale . . . . .	3-25
3.12	Graphique d'une droite horizontale . . . . .	3-25
3.13	Graphique de deux droites perpendiculaires . . . . .	3-27
3.14	Graphique de deux droites sécantes : Le système sous-jacent a une solution . . . . .	3-28
3.15	Graphique de deux droites parallèles : Le système sous-jacent n'a pas de solution . . . . .	3-28
3.16	Graphique de deux droites confondues : le système sous-jacent a une infinité de solutions (pourquoi ?) . . . . .	3-29
4.1	René Descartes (1596 – 1650) . . . . .	4-2

Table des figures

4.2	latitude-longitude d'un point	4-3
4.3	vitesse-temps	4-3
4.4	Pierre de Fermat (1601 – 1665)	4-3
4.5	Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813)	4-3
4.6	Fonction paire	4-5
4.7	Fonction impaire	4-5
4.8	Fonction croissante	4-6
4.9	Fonction décroissante	4-6
4.10	Parabole $2x^2 + x - 1$	4-7
4.11	Parabole avec $a > 0$	4-8
4.12	Parabole avec $a < 0$	4-8
4.13	Nombre de solutions selon le signe de $\Delta$	4-8
4.14	Forme de la parabole selon le coefficient $a$	4-9
4.15	Position de la parabole selon $a$ et $\Delta$	4-10
4.16	Déplacement du sommet d'une parabole	4-12
4.17	Graphique de la parabole $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$	4-16
4.18	Plan pour la construction des enclos	4-17
4.19	Graphique de deux cubiques dont l'orientation dépend de $a$	4-18
4.20	Graphique de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	4-19
4.21	Les zéros d'une cubique : $x$ tels que $f(x) = 0$	4-20
4.22	La cubique $f(x) = -0,5x^3 + 2x^2 - x + 1$	4-21
4.23	La cubique $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 1$	4-23
4.24	La cubique $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$	4-23
4.25	La cubique $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$	4-26
4.26	Construction d'une boîte sans couvercle	4-27
6.1	<b>Thalès</b> de Milet (~ 625 – 547 av. J.-C.)	6-2
6.2	<b>Pythagore</b> de Samos (~ 565 – 495 av. J.-C.)	6-2
6.3	<b>Euclide</b> d'Alexandrie (~ 330 – 275 av. J.-C.)	6-2
6.4	Angle $AOB$	6-4
6.5	Un rapporteur d'angles.	6-4
6.6	Angle plat.	6-5
6.7	Angle droit	6-5
6.8	Angles droits, différentes notations.	6-5
6.9	Angles supplémentaires.	6-5
6.10	Angles complémentaires.	6-5
6.11	Angles issus de deux droites parallèles et une sécante.	6-6
6.12	Un polygone.	6-7
6.13	Polygones convexes et concaves.	6-8
6.14	Un triangle.	6-8
6.15	Un triangle rectangle.	6-9
6.16	Un triangle isocèle.	6-9
6.17	Un triangle équilatéral.	6-9

6.18 Un quadrilatère. . . . .	6-9
6.19 Polygones réguliers particuliers. . . . .	6-10
6.20 Cercles inscrit et circonscrit. . . . .	6-11



# Liste des tableaux





# Avant-propos

Question : combien de mois  
comptent 28 jours ?

Réponse du mathématicien :  
tous !

---

*(Kevin HOUSTON, Comment  
penser comme un  
mathématicien)*

## Le pouvoir des mathématiques

Les mathématiques constituent l'outil le plus puissant dont nous disposons. Elles interviennent partout. Nous pouvons les utiliser pour envoyer l'homme sur la Lune. Nous les utilisons également pour calculer la dose d'insuline pour un diabétique. Il est difficile de s'en passer.

Et malgré cela les personnes qui font des mathématiques ou qui les aiment sont considérées comme des geeks ou des nerds<sup>1</sup>. Et pour beaucoup les mathématiques sont inutiles ! Régulièrement les enfants en âge scolaire se plaignent : "Quand est-ce que cela va me servir ?"

Pourquoi donc certain(e)s désirent-ils(elles) devenir un(e) mathématicien(ne) ? Comme dit plus haut les mathématiques constituent un formidable outil. Les professions utilisant les mathématiques sont souvent bien rémunérées, ce qui est impressionnant. Ce sont souvent les mêmes réflexions que l'on entend quand un non-mathématicien rencontre un mathématicien : "Je n'ai pas aimé les mathématiques à l'école. J'étais nul en la matière." Une autre réflexion largement répandue : "Vous devez vraiment être doué !"

## L'objet du cours

Conjointement à ce qui est déjà mentionné au plan d'étude (chapitres 5.1 à 5.5), l'objectif de ce cours est de vous révéler quelques secrets du raisonnement mathématique, une manière de raisonner et de produire des mathématiques qui fonctionnent - et pas seulement un ensemble de techniques.

Quel que soit votre niveau, l'approche des mathématiques de cette année de maturité spécialisée va réclamer de vous de nouvelles façons d'étudier ainsi qu'un développement de vos capacités à raisonner à la façon d'un mathématicien, en d'autres termes d'acquérir une aptitude propre à la pensée mathématique.

À la lecture du cours, quelques aspects paraîtront subtils, d'autres sembleront tomber sous le sens. Certains concepts vont sembler compliqués, aussi ne vous inquiétez pas si vous ne les comprenez pas tout de suite.

## Quelques conseils

- *Allez-y.* Ce que vous ferez sera probablement le plus déterminant quant au résultat de vos réflexions. Selon un ancien proverbe : "Le professeur ouvre la porte, mais c'est par vous-même que vous entrez."

---

1. néologisme désignant des personnes passionnées par les sciences et l'informatique, les jeux de rôles et les heroïc fantasy, et de ce fait souvent peu socialisées.

- *Soyez actif.* Faites tous les exercices.
- *Pensez par vous-même.*
- *Observez.*
- *Acceptez de vous tromper.* Les mathématiques sont difficiles, mais la récompense en vaut la peine.
- *N'apprenez pas par coeur - cherchez à comprendre.* Il est facile de retenir ce que l'on a vraiment bien compris.
- *Développez votre intuition.*
- *Travaillez avec d'autres.* Partagez avec d'autres votre travail de compréhension mathématique. Ce n'est pas une compétition.
- *Faites des retours en arrière.* Faites le point sur ce que vous avez appris. Demandez-vous comment vous auriez pu faire mieux.

**Nota bene** Le dernier ouvrage mentionné dans la liste des ouvrages suggérés dans Le plan d'études existe désormais en version française :

Kevin Houston, *Comment penser comme un mathématicien*, De Boeck Supérieur s.a. 2011

Cet ouvrage –incontournable pour qui s'intéresse aux mathématiques et/ou Les enseigne – a été source d'inspiration pour le présent avant-propos.

Bon cours!  
A.F.



# 1 Théorie des ensembles et ensembles de nombres

La somme de trois nombres entiers consécutifs peut-elle être un nombre premier ?

---

*(Problème N°180, La feuille à problèmes, juin 96)*

Il est possible de trouver deux nombres positifs tels qu'en ajoutant leur somme, leur produit et leur différence, on obtienne 1992.

Trouvez de tels couples de nombres.

Trouvez tous les couples.

---

*(Problème N°151, La feuille à problèmes, juin 96)*

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Théorie des ensembles</b>	<b>1-2</b>
1.1.1	Définitions et propriétés	1-2
1.1.2	Opérations entre ensembles	1-6
<b>1.2</b>	<b>Ensembles de nombres</b>	<b>1-11</b>
1.2.1	Des entiers naturels aux réels	1-11
1.2.2	Les nombres réels	1-13
1.2.3	Intervalles	1-15
1.2.4	Valeur approchée	1-18
1.2.5	Diagrammes de Carroll	1-19

---

## 1.1 Théorie des ensembles

### 1.1.1 Définitions et propriétés

#### Définition 1.1.1 : Ensemble

Un **ensemble** est une collection d'objets qui sont ses **éléments**.

On adopte souvent (mais pas obligatoirement) des lettres majuscules pour désigner les ensembles et des lettres minuscules pour désigner les éléments.

#### Définition 1.1.2 : Relation d'appartenance

Si  $a$  est un élément de l'ensemble  $A$ , on dit que  $a$  **appartient** à  $A$  et on écrit

$$a \in A$$

Si  $b$  n'est pas un élément de  $A$ , on dit que  $b$  **n'appartient pas** à  $A$  et on écrit

$$b \notin A$$

La théorie des ensembles est en fait une théorie de cette relation d'appartenance. D'où l'importance de décrire avec précision un ensemble, de sorte qu'il n'y ait aucune ambiguïté sur l'appartenance ou la non appartenance d'un objet à cet ensemble.

#### Description d'un ensemble

Il y a essentiellement deux manières de décrire un ensemble : en extension et en compréhension.

**en extension** la manière la plus simple de décrire un ensemble est de citer ses éléments. Ceux-ci sont écrits entre deux accolades et séparés les uns des autres par des virgules. L'ordre dans lequel ils figurent n'a pas d'importance.

#### Exemple

L'ensemble  $A$  constitué des lettres  $a, b, c$  et  $d$  s'écrit

$$A = \{a, b, c, d\}$$

**en compréhension** si un ensemble comporte un grand nombre d'éléments, il est impossible de les énumérer et il faut dès lors recourir à une description sous forme de critère d'appartenance. Dans une telle situation, il est important de spécifier quel est l'ensemble initial, dit **ensemble universel** ou **ensemble de référence**, d'où proviennent les éléments.

**Exemple**

L'ensemble des nombres  $x$  qui vérifient le critère  $x > 5$  est différent selon que l'on admet pour  $x$  d'être entier ou rationnel

$$A = \{x \mid x \text{ entier et } x > 5\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ rationnel et } x > 5\}$$

ainsi,  $\frac{26}{5}$  est un élément de  $B$  et n'est pas un élément de  $A$ , ce que l'on note respectivement  $\frac{26}{5} \in B$  et  $\frac{26}{5} \notin A$ .

**Ensembles particuliers**

**L'ensemble vide** qui par, définition, ne contient aucun élément. On le note  $\emptyset$ . Ainsi, un ensemble défini par une proposition contradictoire est égal à l'ensemble vide.

**Exemple**

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$$

**Le singleton** est un ensemble qui n'a qu'un seul élément. C'est le cas de l'ensemble

$$A = \{a\}$$

car il n'y a qu'un objet, à savoir  $a$ , pour lequel on puisse écrire  $a \in A$ .

**Définition 1.1.3 : Relation d'inclusion**

Si tous les éléments d'un ensemble  $A$  sont aussi les éléments d'un ensemble  $B$  (supposé non vide), on dit que  $A$  est **inclus** dans  $B$  et on écrit

$$A \subseteq B$$

On dit aussi que  $A$  est un **sous-ensemble** de  $B$  ou que  $A$  est une **partie** de  $B$ .

Par définition, on peut écrire

$$A \subseteq B \iff (\forall)(x \in A \implies x \in B)$$

où  $\forall x$  est un **quantificateur** universel qui se lit "pour tout  $x$ ".

## Exemple

Si  $A$  est l'ensemble des chiffres du système décimal et si  $B$  est l'ensemble des nombres pairs compris entre 2 et 8, on a

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

et la relation  $B \subseteq A$ .

On vérifie sans peine que tout ensemble est inclus dans lui-même. Quel que soit l'ensemble  $A$ , on peut écrire

$$A \subseteq A$$

Une partie  $B$  de  $A$  qui serait distinct de  $A$  est appelée un **sous-ensemble** de  $A$  et on écrit une relation d'inclusion stricte

$$B \subset A$$

L'**égalité** entre deux ensembles,  $A = B$ , est réalisée s'ils ont exactement les mêmes éléments. Cette propriété est établie dès lors que l'on a vérifié qu'à la fois  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq A$ . C'est ainsi que démontrer l'égalité entre deux ensembles requiert souvent la démonstration des deux inclusions séparément.

**Remarque** Il est important de bien saisir ce que représente la négation de l'inclusion : dès qu'au moins un élément de  $A$  n'est pas élément de  $B$  alors  $A$  n'est pas inclus dans  $B$ , ou de manière équivalente

$$A \not\subseteq B \iff (\exists x)(x \in A \text{ et } x \notin B)$$

où  $\exists x$  est un **quantificateur** universel qui se lit "il existe un élément  $x$ ".

Donc, l'expression ci-dessus veut dire : " **$A$  n'est pas inclus dans  $B$  si et seulement si, il existe un  $x$  appartenant à  $A$  et n'appartenant pas à  $B$** ".

## Exemple

L'ensemble  $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$  n'est pas un sous-ensemble de l'ensemble  $B$  des nombres pairs car  $A$  contient au moins un élément, par exemple 7, tel que  $7 \in A$  et  $7 \notin B$ .

**Remarque** La relation d'appartenance ( $\in$ ) est une relation qui lie un ensemble à ses éléments. La relation d'inclusion ( $\subseteq$ ) est une relation qui lie deux ensembles. Ainsi, il n'y a pas de sens à écrire  $3 \subseteq A$  ou encore  $A \in B$  si  $A$  et  $B$  sont des ensembles.



**Définition 1.1.4 : Complément d'un ensemble**

Si d'un ensemble de référence  $U$  on extrait certains éléments pour former l'ensemble  $A$ , on détermine en même temps l'**ensemble complémentaire** de  $A$  par rapport à  $U$ , noté  $\bar{A}$ . Cet ensemble  $\bar{A}$  est constitué des éléments de  $U$  qui n'ont pas été repris dans  $A$ , autrement dit  $\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ et } x \notin A\}$ .

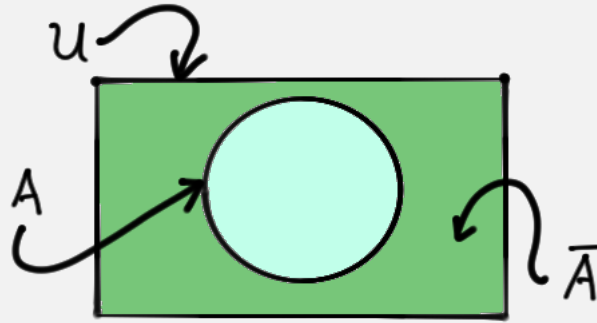


Fig. 1.1.  $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$

En particulier,  $\overline{\emptyset} = U$ ,  $\overline{U} = \emptyset$  et  $\overline{\bar{A}} = A$ .

### 1.1.2 Opérations entre ensembles

Effectuer des opérations sur deux ou plusieurs ensembles donnés permet d'en obtenir d'autres. Les principales opérations sont l'union, l'intersection et la différence.

#### Union et intersection d'ensembles

Voici leurs définition et des exemples d'utilisation.

##### Définition 1.1.5 : Union d'ensembles

L'**union** de deux ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cup B$ , est l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins l'un de ces ensembles

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

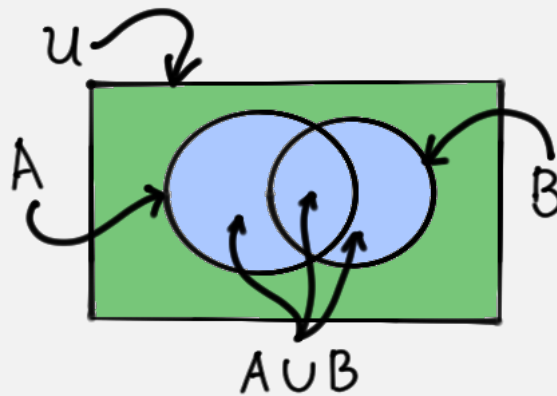


Fig. 1.2. L'union de  $A$  et  $B$

##### Exemple

$$\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$$

**Définition 1.1.6 : Intersection d'ensembles**

L'**intersection** de deux ensembles  $A$  et  $B$ , notée  $A \cap B$ , est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à  $A$  et à  $B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

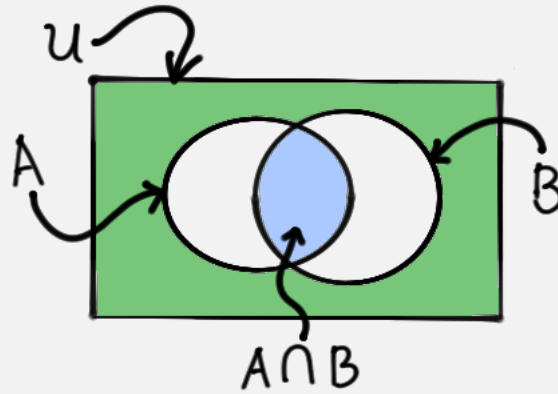


Fig. 1.3. L'intersection de  $A$  et  $B$

**Exemple**

$$\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$$

$$\{1, 2, 3\} \cap \emptyset = \emptyset$$

**Définition 1.1.7 : Disjonction d'ensembles**

Si deux ensembles n'ont aucun élément en commun, on dit qu'ils sont **disjoints**

$$A \cap B = \emptyset$$

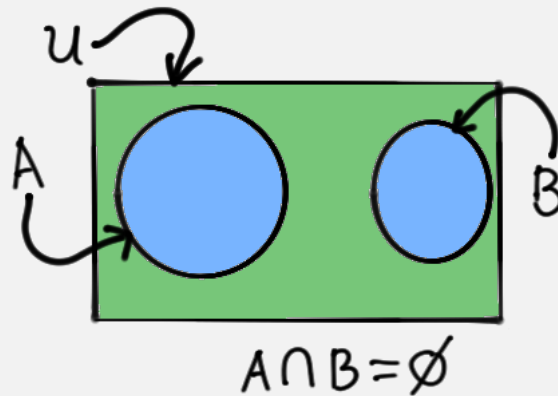


Fig. 1.4. Les ensembles  $A$  et  $B$  sont disjoint

**Exemple**

$$\{1, 2\} \cap \{3, 4, 5\} = \emptyset$$

**Relation entre réunion et intersection**

Comme en l'arithmétique pour l'addition et la multiplication des nombres, la réunion et l'intersection d'ensembles peuvent se suivre dans une expression mathématique, ainsi nous avons la

- distributivité de l'intersection sur l'union :  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- distributivité de l'union sur l'intersection :  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Remarque** L'intersection est prioritaire sur la réunion, c'est-à-dire que  $A \cap B \cup C = (A \cap B) \cup C$  et **non**  $A \cap (B \cup C)$ .

- Les lois de De Morgan (Auguste de De Morgan, mathématicien et logicien anglais (1806-1871)) nous disent que le complément d'une intersection est la réunion des compléments et le complément d'une union est l'intersection des compléments

**Théorème 1.1.1 : Lois de De Morgan**

Soient deux ensembles  $A$  et  $B$ , alors

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (1.1)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (1.2)$$

**Principe d'inclusion et d'exclusion**

Soient  $A$  et  $B$  des ensembles. Alors

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

où  $|\dots|$  désigne le **cardinal** (c'est-à-dire le nombre d'éléments) de l'ensemble concerné. Pour mieux visualiser ce qui se produit, observons la figure ci-dessous

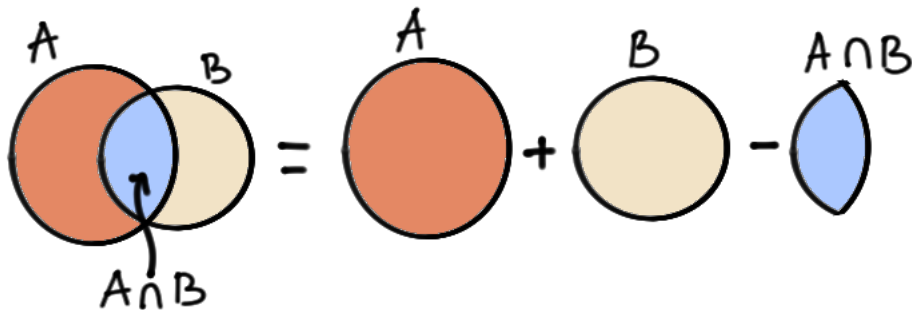


Fig. 1.5. Principe d'inclusion et d'exclusion

On commence à estimer la taille de la réunion  $A \cup B$  par  $|A| + |B|$ . Mais de cette manière on a compté les éléments de l'intersection  $A \cap B$  deux fois, donc on doit les exclure de la somme, c'est-à-dire soustraire  $|A \cap B|$ .

**Différence d'ensembles**

La différence entre deux ensembles est définie comme suit

**Définition 1.1.8 : Différence d'ensembles**

On emploie la notation  $A \setminus B$  pour désigner l'ensemble des éléments de  $A$  qui n'appartiennent pas à  $B$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

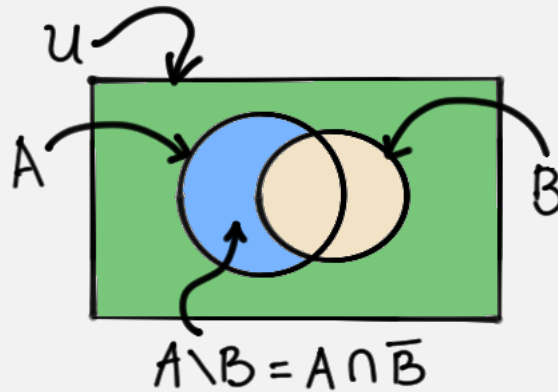


Fig. 1.6. La différence des ensembles  $A$  et  $B$

Il est clair que  $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ .

**Le produit cartésien**

Le produit cartésien de deux ensembles est défini comme suit

**Définition 1.1.9 : Le produit cartésien**

Le **produit cartésien** de deux ensembles  $A$  et  $B$  est défini par

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}$$

C'est l'ensemble des **couples ordonnés**  $(x, y)$  que l'on peut former en prenant  $x$  dans  $A$  et  $y$  dans  $B$ . La notation "X" provient de ce que si  $A$  a 3 éléments et si  $B$  en a 2, l'ensemble  $A \times B$  en aura  $3 \cdot 2 = 6$ .

**Exemple**

Si  $A = \{1, 2, 3\}$  et  $B = \{c, d\}$ , alors

$$A \times B = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d), (3, c), (3, d)\}$$

Lorsque  $A = B = \mathbb{R}$ , le produit cartésien de  $A$  par  $B$  est

$$A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

autrement dit, tous les points du plan cartésien.

## 1.2 Ensembles de nombres

### 1.2.1 Des entiers naturels aux réels

Les nombres les plus familiers sont ceux qui servent à compter :  $0, 1, 2, 3, \dots$  (cette suite de nombre ne s'arrête jamais). On les appelle les **entiers naturels**. Ils sont entiers et positifs et leur ensemble est représenté par le symbole  $\mathbb{N}$ , et on note

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

#### Définition 1.2.1 : Nombre premier et composé

Un **nombre premier** est un entier naturel distinct de 1 et qui possède **exactement** deux diviseurs, 1 et lui-même. Un nombre qui n'est pas premier est dit **composé**.

#### Exemple

Les nombres  $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, 1789, \dots, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, \dots$  sont des nombres premiers.

**Remarque** "Existe-t-il une infinité de nombre premier?", voilà une question bien naturelle à laquelle Euclide d'Alexandrie (mathématicien grec, ~ 300 av. J-C.) a répondu par l'affirmative, il y a de cela plus de 2000 ans. Cependant, à ce jour (janvier 2018), le plus grand nombre premier connu s'élève à  $2^{77\ 232\ 917} - 1$  et, lorsqu'il est écrit en base 10, comporte 23 249 425 chiffres !

Il existe aussi des nombres entiers négatifs comme  $-1, -2, -3, \dots$ . L'ensemble des composé des nombres entiers positifs, des entiers négatifs et de l'entier nul, 0, est nommé ensemble des **entiers relatif**, désigné par le symbole  $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

La somme et le produit de deux nombres entiers sont des nombres entiers.

À côté des entiers, il y a aussi les nombres **rationnels** tels que  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{22}{7}, -\frac{2}{3}, \dots$ , qui peuvent s'écrire comme le quotient  $\frac{p}{q}$  de deux entiers  $p$  et  $q$  où  $q \neq 0$ . Cet ensemble des nombres rationnels est noté par le symbole  $\mathbb{Q}$ . Un nombre rationnel admet une infinité de représentation, car

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{33}{99} = \dots$$

Cependant, un nombre rationnel est généralement noté sous la forme  $\frac{p}{q}$  dite **irréductible**, c'est-à-dire que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux (ils n'ont pas de facteur commun

## 1 Théorie des ensembles et ensembles de nombres

autre que 1). La division de  $p$  par  $q$  donne l'**expression décimale** du nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ . Cette expression comporte un nombre fini de décimales comme

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

(c'est le cas lorsque le dénominateur de la fraction ne renferme pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5) ou bien un nombre infini, mais périodique, de décimales comme

$$\frac{91}{110} = 0,827272727 \dots$$

Inversement, on peut montrer qu'un nombre décimal périodique (dont tous les chiffres décimaux ne sont pas des 9 à partir d'un certain rang) est engendré par la division de deux entiers, il est donc un nombre rationnel.

Il est clair qu'un nombre entier est un nombre rationnel, car il peut être mis sous forme d'une fraction (par exemple  $4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2}$  ou sous forme décimale périodique (par exemple  $1 = 0,999999 \dots$ )).

Enfin, les nombres dont la suite des chiffres décimaux est illimitée et non périodique sont appelés **irrationnels** : on entend par là qu'ils n'appartiennent pas à l'ensemble  $\mathbb{Q}$ , car il est démontré qu'ils ne peuvent pas s'écrire comme le quotient de deux entiers. Tels sont, par exemple,  $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ ,  $\sqrt{3} = 1,73205080 \dots$ ,  $\sqrt{5} = 2,23606797 \dots$ ,  $\pi = 3,14159265 \dots$  et  $e = 2,7182818284 \dots$ . Cet ensemble de nombres (qui n'est pas désigné par un symbole particulier) joint à l'ensemble des rationnels constitue l'ensemble des nombres **réels**, noté par le symbole  $\mathbb{R}$ .

Ces quatre ensembles de nombres sont liés par les inclusions  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , qui peuvent se traduire par le diagramme ci-dessous où ont été adjoints, à des fins de connaissance générale, deux ensembles supplémentaires<sup>1</sup>.

---

1. Ce diagramme généralisé inclut, d'une part, l'ensemble des nombres **décimaux** (désigné par  $\mathbb{D}$ ) possédant un développement décimal limité (sorte de subdivision de l'ensemble  $\mathbb{Q}$ ) et, d'autre part, l'ensemble des nombres **complexes** (désigné par  $\mathbb{C}$ ) qui constitue une extension de l'ensemble des nombres réels contenant un nombre noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$  ; d'où, plus généralement, les inclusions  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .



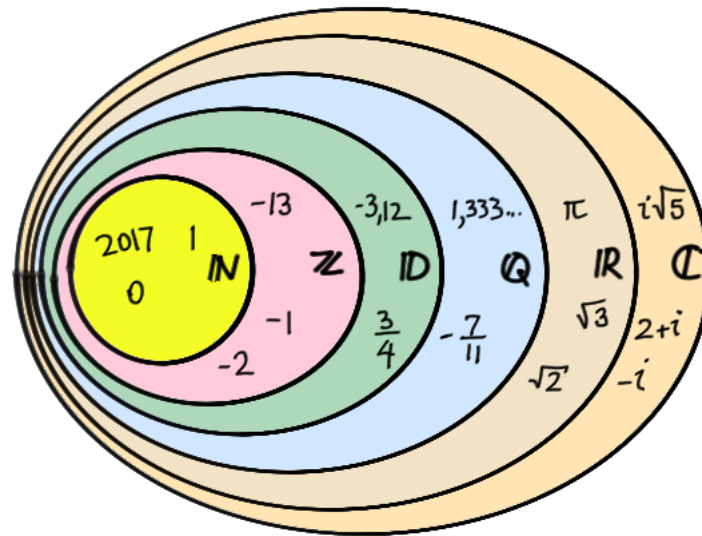


Fig. 1.7. Les ensembles de nombres

### 1.2.2 Les nombres réels

Il est habituel de représenter un nombre réel par un point de la droite, appelée **droite réelle**. Sur cette droite, les nombres positifs figurent à droite du point associé à 0, appelé **origine**, et les négatifs à gauche de ce point, tel que sur la représentation suivante

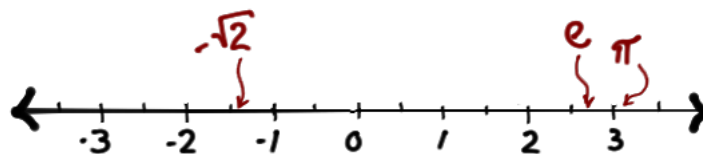


Fig. 1.8. La droite réelle

#### Addition et multiplication

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est doté de deux lois, l'addition et la multiplication, notées respectivement "+" et "·", qui le munissent d'une structure de **corps commutatif**. Cela signifie que les propriétés suivantes sont satisfaites lorsqu'on travaille avec des nombres de cet ensemble.

**Associativité** Pour tout  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ , on peut écrire

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

## 1 Théorie des ensembles et ensembles de nombres

Lorsqu'on écrit par exemple  $x_1 + x_2 + x_3$ , la notation est *a priori* ambiguë, car on ne sait pas si elle signifie  $x_1 + (x_2 + x_3)$  ou  $(x_1 + x_2) + x_3$ . Mais pour une loi associative, cette ambiguïté n'a pas d'importance, parce que, dans les deux cas, le résultat est le même.

**Éléments neutres** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$x + 0 = 0 + x = x$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

**Inverses** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $x + y = y + x = 0$ , on note  $y = -x$  ;  
pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$  il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $x \cdot y = y \cdot x = 1$ , on note  $y = \frac{1}{x}$ .

**Commutativité** Pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , on a

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

**Distributivité** Pour tout  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ , on a

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3)$$

$$(x_1 + x_2) \cdot x_3 = (x_1 \cdot x_3) + (x_2 \cdot x_3)$$

### L'ordre

L'ensemble  $\mathbb{R}$  est muni d'une relation  $x \leq y$  qui vérifie les propriétés suivantes.

**Structure d'ordre** La relation, notée " $\leq$ ", est

(i) **réflexive** : c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$x \leq x$$

(ii) **transitive** : c'est-à-dire que pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z$$

(iii) **antisymétrique** : c'est-à-dire que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y$$

**L'ordre est total** Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x$$

**L'ordre est compatible avec "+" et "."** En effet, l'ordre dans cet ensemble vérifie les deux conditions suivantes

(i) Pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

(ii) Pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ,

$$(x \leq y \text{ et } 0 \leq z) \implies x \cdot z \leq y \cdot z$$

**Remarque** On notera indifféremment  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ . De même, on utilise les notations  $x < y$  pour signifier que  $x \leq y$  et  $x \neq y$ , ainsi que  $x > y$  pour signifier que  $x \geq y$  et  $x \neq y$

### Notations

Nous utiliserons les notations suivantes :

$\mathbb{R}^*$  désigne l'ensemble des réels non nuls ;

$\mathbb{R}_+^*$  désigne l'ensemble des réels positifs non nuls ;

$\mathbb{R}_+$  désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls ;

$\mathbb{R}_-^*$  désigne l'ensemble des réels négatifs non nuls ;

$\mathbb{R}_-$  désigne l'ensemble des réels négatifs ou nuls ;

$\mathbb{N}^*$  désigne l'ensemble des entiers positifs non nuls.

### 1.2.3 Intervalles

L'ensemble des nombres réels situés entre deux nombres  $a$  et  $b$  donnés, appelés **extrémités**, avec  $a < b$ , constitue un **intervalle**. On distingue trois types d'intervalles :

## 1 Théorie des ensembles et ensembles de nombres

1. **L'intervalle ouvert**  $]a, b[$  auquel les points  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas. Il est défini par

$$]a, b[ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x < b\}$$

2. **L'intervalle fermé**  $[a, b]$  auquel les points  $a$  et  $b$  appartiennent. Il est défini par

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a \leq x \leq b\}$$

3. **L'intervalle semi-ouvert à gauche**  $]a, b]$  ne contenant pas le point  $a$  et défini par

$$]a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x \leq b\}$$

4. **L'intervalle semi-ouvert à droite**  $[a, b[$  qui ne contient pas le point  $b$ . Il est défini par

$$[a, b[ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a \leq x < b\}$$

La longueur de ces intervalles est  $b - a$ .



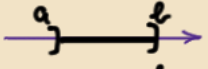

Représentation		
Intervalle	algébrique	graphique
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	

Fig. 1.9. Représentation des intervalles

Les intervalles peuvent être infinis et on adopte alors les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 [a, +\infty[ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a \leq x\} \\
 ]a, +\infty[ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } a < x\} \\
 ]-\infty, a] &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq a\} \\
 ]-\infty, a[ &= \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } x < a\} \\
 ]-\infty, +\infty[ &= \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Les symboles  $+\infty$  et  $-\infty$  ne sont pas des nombres réels (et à ce titre ne font jamais partie d'un intervalle qui est un ensemble de nombres) et ne satisfont donc pas les règles habituelles du calcul algébrique. Ils sont introduits essentiellement pour faciliter les notations.

## Exemple

Si l'on considère les intervalles

$$I = [4; 6] \text{ et } J = ]5; 8[$$

on obtient, pour chacune des opérations ensemblistes vues plus haut les résultats suivants

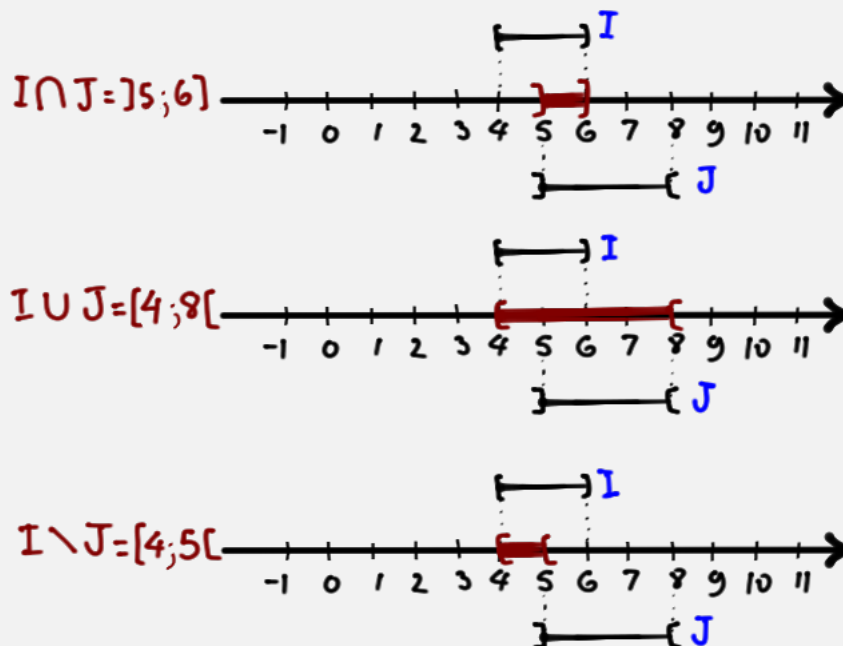


Fig. 1.10. Intersection, union et différence d'intervalles

### 1.2.4 Valeur approchée

Soient  $a, b$  et  $x$  des nombres réels. Les nombres  $a$  et  $b$  **encadrent**  $x$  si

$$a < x < b$$

La précision de cet encadrement est donnée par un nombre réel positif, généralement désigné par la lettre grecque  $\epsilon$ .

#### Définition 1.2.2 : Valeur approchée

Soient  $a, b, x \in \mathbb{R}$  et  $\epsilon > 0$ .

Si

$$a < x < b \quad \text{et} \quad b - a = \epsilon$$

on dit que

$a$  est une **valeur approchée par défaut** de  $x$  à  $\epsilon$  près

et que

$b$  est une **valeur approchée par excès** de  $x$  à  $\epsilon$  près

Autrement dit, le nombre  $a$  est une valeur approchée par défaut de  $x$  à  $\epsilon$  près si

$$a < x < a + \epsilon$$

c'est-à-dire que  $x \in ]a; a + \epsilon[$ .

De même le nombre  $b$  est une valeur approchée par excès de  $x$  à  $\epsilon$  près si

$$b - \epsilon < x < b$$

c'est-à-dire que  $x \in ]b - \epsilon; b[$ .

#### Exemple

Encadrons  $\pi = 3,141592653 \dots$  au millième près, le millième correspond au troisième chiffre après la virgule. On prend donc

$$a = 3,141 \quad \text{et} \quad b = 3,142$$

et on obtient bien  $a < \pi < b$  avec  $b - a = \epsilon = 0,001 = 10^{-3}$

$$3,141 < 3,141592563 \dots < 3,142$$

### 1.2.5 Diagrammes de Carroll

Alors que les **diagrammes de Venn** (John Venn, mathématicien et logicien anglais, 1834-1923) utilisent des cercles ou des ovaes pour représenter des ensembles (correspondant à des attributs) et les relations entre eux, mettant ainsi en évidence la réunion et l'intersection d'éléments de différents ensembles ...

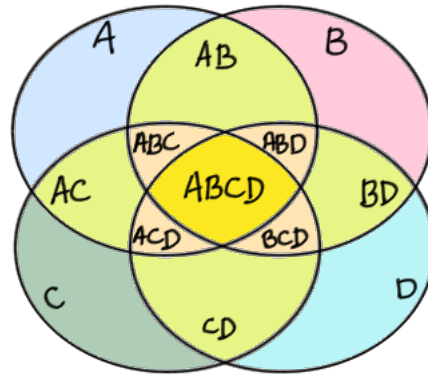


Fig. 1.11. Un diagramme de Venn représentant un ensemble de référence  $U$  contenant 4 ensembles  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ ; par exemple, ici, la notation  $ABD$  désigne l'ensemble  $A \cap B \cap D$  des éléments qui possèdent les caractéristiques de  $A$ ,  $B$  et  $D$

... Les **diagrammes de Carroll** (Lewis Carroll, romancier, photographe et mathématicien anglais, auteur en particulier de "Alice au pays des merveilles", 1832-1898) mettent en évidence les parties d'un ensemble de référence et leur complémentaires en réservant le même espace à chaque attribut et son complémentaire.

#### Définition 1.2.3 : Diagramme de Carroll

Le **diagramme de Carroll** est utilisé comme un tableau à double entrée.

La ligne et la colonne de titres décrivent des sous-ensembles disjoints, c'est-à-dire dont l'intersection est vide, (Cf. Déf. 1.1.7) et les rectangles correspondants (par exemple 1<sup>ère</sup> ligne-2<sup>ème</sup> colonne) indiquent le nombre d'éléments de l'intersection des deux sous-ensembles en question.

On introduit une colonne et une ligne indiquant le total des lignes et des colonnes, la dernière case en bas à droite donnant le nombre d'éléments de l'ensemble de référence  $U$ .

## Exemple

La figure ci-dessous illustre les intersections des ensembles  $A$  et  $B$ , avec en dernière colonne (haut à droite) le rectangle qui correspond à l'union (réunion) des rectangles à sa gauche. L'union des rectangles de la dernière colonne et des rectangles de la dernière ligne correspond à tout l'ensemble référent  $U$  (dans le coin en bas à droite).

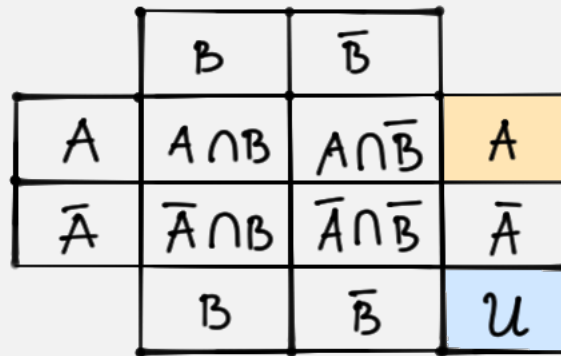


Fig. 1.12. Diagramme de Carroll pour deux ensembles  $A$  et  $B$ .

Plus généralement, soit  $U$  un ensemble formé d'éléments ayant des caractéristiques incompatibles de deux types :

- type  $A$  :  $A_1$  et  $A_2$  deux sous ensembles disjoints, tels que  $A_1 \cup A_2 = U$  et  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  ;
- type  $B$  :  $B_1, B_2$  et  $B_3$  trois sous-ensembles disjoints, tels que  $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = U, B_1 \cap B_2 = \emptyset, B_1 \cap B_3 = \emptyset$  et  $B_2 \cap B_3 = \emptyset$ .

Le diagramme de Carroll associé à cet ensemble est le suivant



A \ B	$B_1$	$B_2$	$B_3$	Total
$A_1$	# él. $A_1 \cap B_1$	# él. $A_1 \cap B_2$	# él. $A_1 \cap B_3$	# él. $A_1$
$A_2$	# él. $A_2 \cap B_1$	# él. $A_2 \cap B_2$	# él. $A_2 \cap B_3$	# él. $A_2$
Total	# él. $B_1$	# él. $B_2$	# él. $B_3$	# él. $U$

Fig. 1.13. Digramme de Carroll pour deux **partitions** de l'ensemble de référence  $U$ 

**Remarque** Dans cet exemple, on notera que  $\overline{A_1} = A_2$  et que  $A_1 = \overline{A_2}$ , et aussi que  $\overline{B_1} = B_2 \cup B_3$ ,  $\overline{B_2} = B_1 \cup B_3$  et  $\overline{B_3} = B_1 \cup B_2$ .



## 2 Calcul algébrique avec Les nombres réels

La somme de trois nombres entiers consécutifs peut-elle être un nombre premier ?

*(Problème N°180, La feuille à problèmes, juin 96)*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Priorité des opérations</b>	<b>2-2</b>
<b>2.2</b>	<b>Règle des parenthèses</b>	<b>2-2</b>
<b>2.3</b>	<b>Produit</b>	<b>2-2</b>
<b>2.4</b>	<b>Fractions</b>	<b>2-4</b>
2.4.1	Opérations sur les fractions	2-4
2.4.2	Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple	2-6
<b>2.5</b>	<b>Proportions</b>	<b>2-8</b>
<b>2.6</b>	<b>Puissances <math>n^{\text{ième}}</math></b>	<b>2-12</b>
2.6.1	Définition	2-12
2.6.2	Propriétés	2-13
<b>2.7</b>	<b>Racines <math>n^{\text{ième}}</math></b>	<b>2-14</b>
2.7.1	Définition	2-14
2.7.2	Propriétés	2-15
2.7.3	Calculs avec des racines	2-16
2.7.4	Remarque importante sur la racine carrée	2-17
<b>2.8</b>	<b>Inégalités</b>	<b>2-19</b>

---

## 2.1 Priorité des opérations

---

Pour effectuer le calcul d'une expression algébrique, il faut procéder dans l'ordre suivant :

1. Calculer les expressions entre **parenthèses**, en commençant par les parenthèses intérieures ;
2. calculer les numérateurs et dénominateurs de fractions ;
3. calculer les expressions sous un **radical** ;
4. calculer les **puissances** et **racines** ;
5. effectuer les **produits** et **quotients** ;
6. effectuer les **sommes** et **différences**.

## 2.2 Règle des parenthèses

---

Lors du calcul des sommes ou des différences où interviennent des parenthèses :

1. on peut supprimer les parenthèses précédées du signe + sans changer les signes des opération situées dans la parenthèse ;
2. on peut supprimer les parenthèses précédées du signe – à condition de changer les signes des opérations situées dans la parenthèse.

On a donc

$$a + (b + c) = a + b + c$$

$$a + (b - c) = a + b - c$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

## 2.3 Produit

---

Le produit de deux nombres réels de même signe est un nombre réel positif. Le produit de deux nombres réels de signes différents est un nombre réel négatif. Pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , on a

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab \quad \text{et} \quad (-a) \cdot (-b) = ab$$

La dernière égalité, pas si intuitive que cela, est conséquence de la consistance des mathématiques. En effet, on a

$$(-a) \cdot (b - b) = (-a) \cdot 0 = 0$$

et, simultanément, à l'aide de la distributivité simple,

$$(-a) \cdot (b - b) = (-a) \cdot b + (-a) \cdot (-b) = -ab + (-a) \cdot (-b)$$

d'où

$$-ab + (-a) \cdot (-b) = 0$$

et donc, nécessairement

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

Dans l'ensemble des nombres réels, on peut distribuer la multiplication par rapport à l'addition. Pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , on a<sup>1</sup>

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{et} \quad (a + b)c = ac + bc$$

Ces propriétés sont utilisées pour effectuer des produits particuliers. On obtient ainsi les **produit remarquables** suivants :

Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

1. Noter l'absence du point "." signifiant la multiplication. En effet on écrit souvent  $a(b + c)$  pour  $a \cdot (b + c)$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Par contre dans  $5 \cdot 3 = 15$  on ne peut pas écrire  $53 = 15$ , car on confond l'opération et le nombre, ce qui donne une fausse égalité.

## Exemple

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 - 8$$

$$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 + 27$$

## 2.4 Fractions

### Définition 2.4.1 : Fraction

Une **fraction**

$$\frac{a}{b}$$

est le quotient de deux nombres  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}^*$ .

Le nombre  $a$  est appelé **le numérateur** et le nombre  $b$  **le dénominateur**.

### 2.4.1 Opérations sur les fractions

#### Simplification de fractions

On peut toujours écrire

$$\frac{a}{a} = 1 \quad \frac{a}{1} = a \quad \frac{a}{-1} = -a \quad \frac{0}{a} = 0$$

Pour simplifier une fraction, on factorise le numérateur et le dénominateur. On simplifie alors les termes communs aux numérateur et dénominateur

$$\frac{a \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a}{d} \quad \text{où } b, d \neq 0$$

### Définition 2.4.2 : Fraction irréductible

Une fraction qu'il n'est plus possible de simplifier est dite **irréductible**.

## Exemple

$$\frac{25}{35} = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{8a^3b^5c^2}{12a^2b^7c} = \frac{4a^2b^5c(2ac)}{4a^2b^5c(3b^2)} = \frac{2ac}{3b^2}$$

Afin de simplifier une fraction, il est souvent utile de pouvoir calculer le plus grand commun diviseur (**pgcd**) des numérateur et dénominateur (Cf. 2.4.2).

### Somme et différence de deux fractions

Pour additionner deux fractions, on les réduit au même dénominateur et on additionne les numérateurs entre eux. Pour soustraire deux fractions, on les réduit au même dénominateur et on soustrait les numérateurs.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \text{où } b, d \neq 0$$

et

$$\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{c}{1} = \frac{a}{b} + \frac{b \cdot c}{b} = \frac{a + bc}{b}, \quad \text{où } b \neq 0$$

#### Exemple

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10}$$

et

$$\frac{11}{12} - \frac{2}{6} = \frac{11 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 6} = \frac{7}{12}$$

Afin de simplifier les calculs de somme et différence de fractions, il est souvent utile de pouvoir calculer le plus petit commun multiple (**ppcm**) de leurs dénominateurs (Cf. 2.4.2).

### Multiplication de deux fractions

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{où } b, d \neq 0$$

#### Exemple

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

### Division de deux fractions

Pour diviser deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la seconde.

## 2 Calcul algébrique avec les nombres réels

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{où } b, c, d \neq 0$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \quad \text{où } b, c \neq 0$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{c} \quad \text{où } c, d \neq 0$$

### Exemple

$$\frac{\frac{25}{32}}{\frac{35}{64}} = \frac{25}{32} \cdot \frac{64}{35} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 32 \cdot 2}{32 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 2}{7} = \frac{10}{7}$$

### 2.4.2 Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple

Afin de simplifier une fraction ainsi que les calculs de somme et différence de fractions il est souvent plus avantageux de recourir respectivement aux **pgcd** et **ppcm**, et ce pour les raisons déjà évoquées au point 2.4.1.

Au préalable, il est nécessaire de mentionner un résultat remarquable de la théorie des nombres, désigné par

#### **Théorème fondamental de l'arithmétique**

Ce résultat pourra être utilisé sans démonstration dans la suite du cours, et il dit la chose suivante :

#### **Théorème 2.4.1 : Théorème fondamental de l'arithmétique**

*Tout nombre naturel  $n > 1$  peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, et ce en une **représentation unique**, mis à part l'ordre dans lequel les facteurs premiers sont disposés.*

### Exemple

Le nombre entier 313 500 admet la représentation unique suivante



$$\begin{aligned}
 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 19 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 \\
 &= 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \\
 &= 19 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 \\
 &= \dots = \mathbf{313\ 500}
 \end{aligned}$$

### Recherche du pgcd et ppcm de deux ou plusieurs nombres entiers

- (a) Décomposer chaque nombre en facteurs premiers, c'est-à-dire en un produit de nombres premiers ;
- (b) alors
- ↪ Le **ppcm** est le produit de **tous** les facteurs premiers, chacun étant pris avec son **plus grand exposant** ;
  - ↪ Le **pgcd** est le produit des facteurs premiers **communs**, chacun étant pris avec son **plus petit exposant**.

#### Exemple

Calculons le **pgcd** et le **ppcm** des nombres 360, 500 et 300. On décompose

$360 \mid 2$	$500 \mid 2$	$300 \mid 2$
$180 \mid 2$	$250 \mid 2$	$150 \mid 2$
$90 \mid 2$	$125 \mid 5$	$75 \mid 3$
$45 \mid 3$	$25 \mid 5$	$25 \mid 5$
$15 \mid 3$	$5 \mid 5$	$5 \mid 5$
$5 \mid 5$	$1 \mid$	$1 \mid$
$1 \mid$		

et donc

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, \quad 500 = 2^2 \cdot 5^3 \quad \text{et} \quad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

On a donc

$$\text{pgcd}(360, 500, 300) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

et

$$\text{ppcm}(360, 500, 300) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 9000$$

**Remarque** Suivant les nombres entiers en jeu, en particulier des nombres contenant de grands diviseurs premiers dans leur décomposition, il peut être utile d'avoir recours à un logiciel de calcul, tel que, par exemple, "Geogebra" disponible à l'adresse <https://www.geogebra.org/> et qui intègre un outil de calcul formel prenant en charge la décomposition de tout nombre entier.

## 2.5 Proportions

Dans une situation donnée, et en présence de deux grandeurs relatives à cette situation, il s'agit de savoir si les deux grandeurs sont proportionnelles, inversement proportionnelles ou si elles n'ont pas de lien de proportionnalité.

### Définition 2.5.1 : Proportion, extrêmes et moyens

Soient  $a, c \in \mathbb{R}$ ,  $b, d \in \mathbb{R}^*$ . L'expression

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

est une **proportion**.

Dans cette expression, les termes  $a$  et  $d$  sont appelés les **extrêmes**, les termes  $b$  et  $c$  sont les **moyens** et les fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  sont les **rapports**.

Dans une proportion, le produit des moyens est toujours égal au produit des extrêmes. En effet, en réécrivant l'expression de la définition puis en multipliant les deux membres par  $bd$  on obtient  **$ad = bc$** .

En particulier

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

ne signifie pas nécessairement que  $x = 3$  et  $y = 2$ , mais que  $2x = 3y$ . Donc,  $x = 6$  et  $y = 4$  conviennent aussi.

Ce qui précède est la justification mathématique de ce que l'on appelle souvent "règle de trois", où l'un des quatre nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ou  $d$  est inconnu et, de ce fait, désigné par la lettre  $x$ .

**Exemple**

$$\frac{12}{x} = \frac{84}{49} \iff 12 \cdot 49 = x \cdot 84 \iff x = \frac{12 \cdot 49}{84}, \quad \text{soit } x = 7$$

**Remarques**

1. Une application fondamentale de ce résultat est présente dans le théorème de Thalès !
2. On peut aussi parler de proportion  $\frac{a}{b}$  en exprimant la valeur du rapport sous la forme d'un nombre ou d'un pourcentage, comme, par exemple, dans "La proportion de citoyens ayant voté est de 72%", voulant signifier que sur 100 citoyens, 72 sont allés déposer leur bulletin de vote.

**Définition 2.5.2 : Variables proportionnelles et coefficient de proportionnalité**

Deux variables  $x$  et  $y$  sont dites **proportionnelles** lorsqu'elles sont liées par une relation de la forme

$$y = k \cdot x$$

où  $k$  désigne une constante numérique non nulle appelée **coefficient de proportionnalité**.

**Exemple**

Plus concrètement, quand dit-on que deux grandeurs sont proportionnelles ?

- ★ Lorsqu'on achète un certain nombre de livres coûtant tous le même prix ( $k$ ).

**Grandeurs : Le prix total ( $y$ ) et le nombre de livres achetés ( $x$ )**

Le prix total est proportionnel au nombre de livres achetés, car si le nombre de livres achetés double (ou triple), le prix total double (ou triple) également. Évidemment, nous ne tenons ici pas compte d'un éventuel rabais de quantité.

- ★ Lorsqu'on s'intéresse à des rectangles ayant tous un côté ( $k$ ) de 3 cm.

**Grandeurs : l'aire du rectangle ( $y$ ) et la longueur de l'autre côté ( $x$ )**

L'aire de ces rectangles est proportionnelle à la mesure de l'autre côté

du rectangle, car si le côté du rectangle double (ou triple), l'aire du rectangle double (ou triple) également.

★ Lorsqu'un cycliste roule à vitesse constante ( $k$ ).

**Grandeurs : la distance parcourue ( $y$ ) et la durée du trajet ( $x$ )**

La distance parcourue par ce cycliste est proportionnelle à la durée du trajet, car si la durée du trajet double (ou triple), la distance parcourue double (ou triple) également.

L'observation à faire sur ces trois exemples a une valeur générale, à savoir que pour déterminer si deux grandeurs sont proportionnelles, on peut se demander si, quand l'une des deux grandeurs varie selon un certain facteur, on est certain que l'autre grandeur varie selon le même facteur.

**Remarque** Le lien entre les définitions 2.5.1 et 2.5.2 est manifeste. D'une part, le rapport/la fraction  $\frac{a}{b}$  peut s'exprimer sous la forme d'un nombre décimal, c'est-à-dire  $\frac{a}{b} = k$ , ce qui implique que  $a = b \cdot k$ , et, d'autre part,  $y = k \cdot x \iff \frac{y}{x} = k$ . On constate que deux contextes d'application différents peuvent être liés par la même structure algébrique sous-jacente. Pouvez-vous identifier l'équation d'une droite dans ce paragraphe ? Sa pente ? Son ordonnée à l'origine ?

**Définition 2.5.3 : Proportionnalité inverse**

Deux variables  $x$  et  $y$  sont dites **inversement proportionnelles** si  $y$  est proportionnelle à l'inverse de  $x$ , noté  $\frac{1}{x}$  ou encore  $x^{-1}$ , c'est-à-dire s'il existe une constante  $k$  telle que

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{ou} \quad xy = k$$

**Exemple**

Quand dit-on que deux grandeurs sont inversement proportionnelles ?

★ Lorsque des ouvriers peignent un mur ( $k$ ).

**Grandeurs : le nombre d'ouvriers ( $x$ ) et la durée nécessaire ( $y$ )**

En première approximation, si on double le nombre d'ouvriers, la durée nécessaire sera divisée par deux. Les deux grandeurs seraient donc inversement proportionnelles. Bien entendu, cela n'est vrai que si le matériel est présent en quantité suffisante, si les ouvriers ne se gênent pas, s'ils

sont d'égale compétence, etc. On peut douter que si un ouvrier fait le travail en 20 h, soit 72 000 s, mille ouvriers le feront en 72 s.

- ★ Lorsqu'une personne dispose d'un certain capital ( $k$ ) pour acheter un terrain.

**Grandeurs : l'aire du terrain acheté ( $y$ ) et le prix par  $m^2$  du terrain ( $x$ )**

Si le prix du mètre carré double, la surface correspondant à la somme dont dispose cette personne sera divisée par deux : les grandeurs sont donc inversement proportionnelles. Là encore, on peut discuter l'adéquation à la réalité : la surface dont il est question est celle dont le prix correspond exactement à la somme dont dispose la personne, mais il n'est pas certain que cette dernière tienne absolument à dépenser tout l'argent dont elle dispose, ni qu'il existe un terrain ayant exactement l'aire calculée. Enfin, on ne sait pas si les frais et les taxes liés à l'achat sont comptés dans le prix au mètre carré.

- ★ Lorsqu'un cycliste parcourt une certaine distance ( $k$ ).

**Grandeurs : la vitesse ( $x$ ) et la durée du trajet ( $y$ )**

La durée du trajet est inversement proportionnelle à la vitesse, car si la vitesse du cycliste double (ou triple), le temps effectué pour parcourir le trajet sera divisé par deux (ou trois) également.

L'observation à faire sur ces trois exemples a une valeur générale, à savoir que pour déterminer si deux grandeurs sont inversement proportionnelles, on peut se demander si, quand l'une des deux grandeurs varie selon un certain facteur, on est certain que l'autre grandeur varie selon l'inverse de ce facteur.

Enfin, il existe des situations où aucun lien de proportionnalité n'est établi entre les grandeurs en jeu ; on parle ainsi de **situations non proportionnelles** (c'est-à-dire absence de proportionnalité directe ou inverse).

**Exemple**

Quand dit-on que deux grandeurs ne sont pas proportionnelles ?

- ★ Lorsqu'une automobile roule d'une ville à une autre.

**Grandeurs : la consommation totale de carburant et la vitesse moyenne**

Si la vitesse moyenne augmente, on sait que la consommation augmente également, mais rien n'indique que si la vitesse moyenne passe de 40 à

80 km/h, la consommation double. Il n'y a pas de lien de proportionnalité entre les deux grandeurs.

- \* Lorsque l'on fait cuire des marrons au four à température fixée.

**Grandeurs : Le nombre de marrons et le temps de cuisson total**

Si l'on met quatre fois plus de marrons au four, le temps total de cuisson ne va pas quadrupler pour autant. Bien au contraire, il sera le même.

- \* Lorsque l'on calcule l'aire d'un disque d'un certain rayon.

**Grandeurs : l'aire et la mesure du rayon**

L'aire d'un disque, donnée par la formule  $A = \pi \cdot r^2$ , ne sera pas deux fois plus (ou moins) élevée si le rayon double (ou est réduit de moitié).

En conclusion, il est essentiel, pour la résolution de problèmes qui mettent en relation des grandeurs, de bien choisir les outils mathématiques qui décrivent le mieux la situation, car l'on a trop souvent tendance à utiliser une technique liée à la proportionnalité (et spécialement le produit en croix) sans avoir explicité les grandeurs en jeu et sans s'être assuré que ces grandeurs sont bien proportionnelles.

## 2.6 Puissances $n^{\text{ième}}$

### 2.6.1 Définition

Lorsqu'on multiplie un nombre plusieurs fois par lui-même, comme  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2$ , ainsi  $n$  fois (où  $n$  est un entier positif), on définit la puissance  $n^{\text{ième}}$  de 2. On notera ce nombre  $2^n$  qu'on peut aussi lire comme "2 exposant  $n$ ".

**Définition 2.6.1 : Puissance  $n^{\text{ième}}$**

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . La **puissance  $n^{\text{ième}}$**  de  $a$  est le nombre réel obtenu en multipliant  $a$   $n$  fois par lui-même

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ facteurs, avec } n > 1}$$

Pour tout  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \quad 0^n = 0$$

## Exemple

On a donc que

$$10^0 = 2^0 = 8^0 = 1$$

$$12^1 = 12$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$\pi^2 = \pi \cdot \pi$$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$3^2 = \frac{1}{3^{-2}} = 9$$

$$0^3 = 0^{10} = 0$$

**Remarque** Pour compléter l'exemple précédent, on doit encore dire que

- ★  $0^0$  n'est pas défini ; (pourquoi ?)
- ★ toute puissance d'un réel positif est positive ;
- ★ toute puissance d'un réel négatif est positive si l'exposant est pair et négative si l'exposant est impair.

## 2.6.2 Propriétés

Les puissances entières vérifient les propriétés suivantes

### Propriété 2.6.1 : Puissances entières

Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

## Exemple

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{4^2}{7^2} = \frac{16}{49}$$

$$(10^2)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6 = 1\,000\,000$$

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

$$\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

On peut étendre la notation de puissance à des exposants fractionnaires. C'est le sujet de la prochaine section.

## 2.7 Racines $n^{\text{ième}}$

### 2.7.1 Définition

#### Définition 2.7.1 : Racine $n^{\text{ième}}$

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . La **racine  $n^{\text{ième}}$**  de  $a$  est le nombre réel  $b$  tel que  $b^n = a$ .  
On la note

$$b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Le nombre naturel  $n$  est l'**indice** du radical ( $\sqrt{\cdot}$ ) et le nombre réel  $a$  est le **radicande**.

## Exemple

$$2^3 = 8 \iff 2 = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$$

**Remarque** Il faut tenir compte que

- \* Si  $n$  est pair alors  $a$  doit être positif (ceci est la condition d'existence de la racine  $n^{\text{ième}}$ );
- \* si  $n$  est impair et  $a < 0$ , on pose  $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$ .

## Exemple

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$$



De manière plus générale, on peut définir Les **puissances rationnelles** de  $a$

**Définition 2.7.2 : Puissances rationnelles**

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad \text{où } a \neq 0$$

**Exemple**

$$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$$

$$3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$$

## 2.7.2 Propriétés

Les puissances rationnelles d'un nombre positif vérifient les propriétés suivantes

**Propriété 2.7.1 : Puissances rationnelles**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{où } b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

**Exemple**

$$\sqrt[3]{14} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

## 2 Calcul algébrique avec les nombres réels

$$\sqrt[3]{49} = (\sqrt[3]{7^2}) = (\sqrt[3]{7})^2$$
$$\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}$$

**Remarque** Les observations suivantes s'imposent

- \*  $0^{-n}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , n'est pas défini dans  $\mathbb{R}$  ;
- \*  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ .

### Exemple

$$\sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$$

$$\sqrt{(-2)(-8)} \neq \sqrt{(-2)}\sqrt{(-8)}$$

$$\sqrt{(-5)^2} \neq (-5)^{\frac{2}{2}}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} \text{ mais } \sqrt[3]{8} \neq \sqrt[6]{(-8)^2}$$

### 2.7.3 Calculs avec des racines

On ne peut additionner ou soustraire que des racines semblables, c'est-à-dire de même indice et de même radicande.

### Exemple

$$\sqrt[4]{a} + 3\sqrt[4]{a} - 2\sqrt[4]{a} = 2\sqrt[4]{a}$$

$$\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{81} = 2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$$

Pour multiplier et diviser des racines, on les réduit au même indice et on applique les propriétés. Afin de simplifier les calculs de sommes et produits de radicaux d'indices différents, on est amené à calculer le plus petit commun multiple des indices.

## Exemple

$$\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^2} \cdot \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^2 \cdot a^3} = \sqrt[12]{a^5}, \quad (a \in \mathbb{R}_+)$$

$$\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{2^8} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 4\sqrt[3]{4}$$

Il est bien souvent utile de pouvoir rendre rationnel le dénominateur d'une fraction. Pour cela, on se rappelle que

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

et

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

Par conséquent

- ★ **si le dénominateur est de la forme  $a\sqrt{b}$** , on multiplie le numérateur et le dénominateur par  $\sqrt{b}$

## Exemple

$$\frac{1 + \sqrt{8}}{3\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{8})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2} + 4}{6}$$

- ★ **si le dénominateur est de la forme  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$** , on multiplie le numérateur et le dénominateur par  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  qu'on appelle **binôme conjugué**.

## Exemple

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$$

### 2.7.4 Remarque importante sur la racine carrée

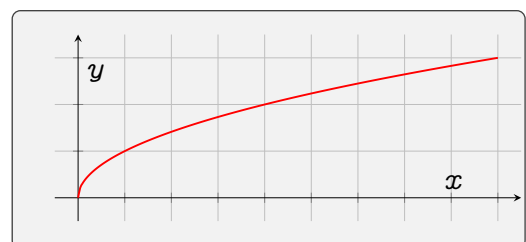
La racine carrée est définie pour les nombres réels positifs. Son résultat est un nombre réel positif.

Par conséquent, on a

$$\sqrt{9} = 3$$

et pas

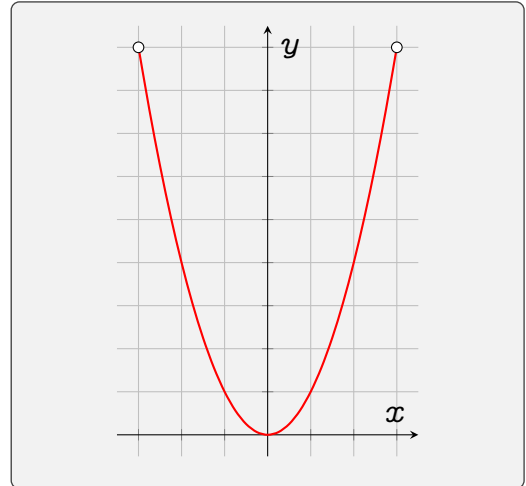
$$\sqrt{9} = -3 \quad (!!)$$



## 2 Calcul algébrique avec les nombres réels

Par contre, il existe deux nombres réels dont le carré est égal à un nombre donné.

On a donc  $x^2 = 9 \iff x = 3$  ou  $x = -3$



Cela est dû au fait que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

où  $|x|$  désigne la valeur absolue de  $x$  définie par

### Définition 2.7.3 : Valeur absolue

Soit  $x \in \mathbb{R}$  alors la **valeur absolue** de  $x$  est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc,

$$x^2 = 9 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \iff \pm x = 3 \iff x = \pm 3$$

Mais voici où peut mener une mauvaise utilisation des racines :

$$4 - 10 = 9 - 15$$

donc

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2}$$

donc

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

donc

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

donc (!!!!!!)

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

d'où

$$2 = 3$$

## 2.8 Inégalités

---

Dans  $\mathbb{R}$ , nous avons une relation d'ordre.

Quand on travaille avec des inégalités, il faut connaître les règles suivantes.

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des nombres réels. On a

(1)

$$a > b \quad \text{et} \quad b > c \quad \Rightarrow \quad a > c$$

(2) Lorsqu'on ajoute/retranche un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens :

$$a > b \quad \Rightarrow \quad a + c > b + c$$

$$a > b \quad \Rightarrow \quad a - c > b - c$$

(3) Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité

a) par un nombre **positif**, on obtient une inégalité de **même sens** :

$$a > b, c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c$$

b) par un nombre **négatif**, on obtient une inégalité de **sens contraire** :

$$a > b, c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$$

(4) Lorsqu'on divise les deux membres d'une inégalité

a) par un nombre **positif**, on obtient une inégalité de **même sens** :

$$a > b, c > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

b) par un nombre **négatif**, on obtient une inégalité de **sens contraire** :

$$a > b, c < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

## 2 Calcul algébrique avec les nombres réels

- (5) Lorsqu'on additionne membre à membre des inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens que les précédentes :

$$a > b, c > d \implies a + c > b + d$$

- (6) Lorsqu'on soustrait membre à membre deux inégalités de sens contraire, on obtient une inégalité dont le sens est celui de la première inégalité :

$$a > b, c < d \implies a - c > b - d$$

- (7) Lorsqu'on passe à l'inverse, on change le sens de l'inégalité :

$$0 < a < b, \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

### Exemple

Lors de la résolution de l'inéquation

$$-2x + 1 < -\frac{1}{2}$$

dont la solution détaillée est

$$\begin{aligned} -2x + 1 < -\frac{1}{2} &\iff -2x < -\frac{1}{2} - 1 && \text{( on retranche } -1) \\ &\iff -2x < -\frac{3}{2} \\ &\iff x > \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) && \text{( multiplication par } -\frac{1}{2}) \\ &\iff x > \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que la solution est

$$S = ]\frac{3}{4}; +\infty[$$

# 3 Équations

Clara habite une maison dont le numéro est un nombre de deux chiffres. Si elle retranche 1 du numéro, le résultat est divisible par 2 et par 7. Si elle retranche 2 du numéro, le résultat est divisible par 5. Quel est le numéro de la maison de Clara ?

*(Folklore mathématique)*

## Sommaire

<b>3.1 Calcul littéral</b>	<b>3-2</b>
3.1.1 Monômes	3-3
3.1.2 Polynômes	3-4
3.1.3 Opérations sur les monômes et polynômes	3-5
3.1.4 Factorisation de polynômes	3-7
3.1.5 Division de polynômes	3-10
<b>3.2 Équations à une inconnue de degré 1 et 2</b>	<b>3-13</b>
3.2.1 Équations du premier degré	3-13
3.2.2 Équations du deuxième degré	3-14
<b>3.3 Équations à une inconnue de degré 3</b>	<b>3-15</b>
<b>3.4 Équations linéaires à 2 inconnues</b>	<b>3-18</b>
3.4.1 Équations du premier degré - droites	3-18
3.4.2 Position relative de deux droites	3-26
<b>3.5 Systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues</b>	<b>3-27</b>
3.5.1 Interprétation géométrique	3-27
3.5.2 Méthode de résolution	3-29
<b>3.6 Preuves</b>	<b>3-32</b>
3.6.1 Méthode/formule de Viète	3-32
3.6.2 Théorème du reste	3-33
3.6.3 Méthode des déterminants	3-34

### 3.1 Calcul littéral

L'intérêt de savoir calculer avec des lettres réside dans le fait que ces dernières peuvent représenter n'importe quel nombre, rendant ainsi un calcul littéral équivalent à une infinité de calculs numériques. Cela est non négligeable lorsqu'il s'agit de modéliser une situation de la manière la plus optimale possible<sup>1</sup> afin de pouvoir mieux l'étudier et y apporter des solutions soutenues par des raisonnements mathématiques cohérents et rigoureux.

#### Exemple

Soit à calculer  $(a + 1)(a - 1) - (a + 2)(a - 2)$  avec  $a = 8,79$ , puis avec  $a = -2,8$ . On pourrait substituer le nombre donné 8,79 à la lettre  $a$  et faire le calcul en effectuant les parenthèses en premier. Puis recommencer ensuite avec la deuxième valeur proposée pour  $a$ . Mais multiplier 9,79 par 7,79 ou  $-0,8$  par  $-4,8$  n'a rien d'enthousiasmant.

Il y a une autre méthode plus efficace : essayer de simplifier l'expression de départ en fonction de  $a$  et seulement ensuite substituer les nombres donnés à la lettre  $a$ . On a donc

$$\begin{aligned} (a + 1)(a - 1) - (a + 2)(a - 2) &= (a^2 - a + a - 1) - (a^2 - 2a + 2a - 4) \\ &= (a^2 - 1) - (a^2 - 4) \\ &= a^2 - 1 - a^2 + 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ce qui montre que, quelle que soit la valeur donnée pour le nombre  $a$ , le résultat du calcul sera, ici, toujours le même, soit 3. En procédant ainsi on a évité des calculs longs et surtout des risques d'erreur.

1. À l'aide d'équations par exemple.



### 3.1.1 Monômes

#### Définition 3.1.1 : Monôme

Un **monôme** est le produit d'un nombre réel donné, appelé **coefficient** du monôme, par une variable réelle, voire par plusieurs, élevée à une certaine puissance entière positive ou nulle.

La partie du monôme constituée de la variable et de sa puissance est nommée **partie littérale**.

Le **degré d'un monôme** est la somme des puissances de toutes les variables qui le composent.

#### Exemple

$$9x^3 \quad \underbrace{7x^1}_{7x} \quad \underbrace{-1 \cdot x^2}_{-x^2} \quad \underbrace{-4x^0}_{-4} \quad \frac{3}{11}x^4 \quad \sqrt{2}x^3 \quad 12ab \quad 3xy \quad -5ab^3$$

Les degrés respectifs des monômes ci-dessus sont **3, 1, 2, 0, 4, 3, 2, 2, 4**.

#### Définition 3.1.2 : Monômes semblables

Des monômes sont dit **semblables** s'ils possèdent la même partie littérale.

#### Exemple

Les monômes

$$12x^3 \quad \text{et} \quad -3,14x^3 \quad \text{sont semblables}$$

alors que les monômes

$$7x^2 \quad \text{et} \quad 7x \quad \text{ne le sont pas}$$

De même, les monômes  $7ab$  et  $-4ab$  sont semblables, ce qui n'est pas le cas des deux monômes  $5a^2b$  et  $6ab^2$ . Ou encore, les monômes  $2xy$  et  $2x$  ne sont pas semblables.

## 3.1.2 Polynômes

**Définition 3.1.3 : Polynôme**

Un **polynôme** est une somme dont les **termes** sont des monômes.

Le **degré du polynôme** correspond à celui de son terme le plus élevé.

Le **terme indépendant** (ou **la constante**) du polynôme est le terme de puissance nulle.

**Exemple**

$$\frac{3}{11}x^4 + 9x^3 - x^2 + 7x \underbrace{-4}_{-4x^0} \qquad 14x^2 - 5x + \underbrace{9}_{9x^0}$$

où, par convention, les termes sont arrangés de manière à ce que les puissances soient présentées dans un ordre décroissant. Ici, les degrés des polynômes sont respectivement de 4 et 2 et les termes indépendants sont respectivement  $-4$  et  $9$ .

**Définition 3.1.4 : Évaluation d'un polynôme**

L'**évaluation** d'un polynôme  $P$  en une seule variable  $x$ , est la valeur numérique de ce polynôme lorsque l'on substitue le nombre  $a$  à  $x$ , c'est-à-dire

$$P(a)$$

**Exemple**

Si le polynôme  $P(x)$  est défini par  $P(x) = x^3 + 2x - 1$ , son évaluation en  $x = 0$  et  $x = 2$  donne

$$P(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 \qquad \text{et} \qquad P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2 - 1 = 11$$

**Définition 3.1.5 : Racine d'un polynôme**

Le nombre réel  $a$  est une **racine** du polynôme  $P(x)$  si

$$P(a) = 0$$

**Exemple**

Le polynôme

$$P(x) = x^2 - 5x + 6$$

possède deux racines 2 et 3, car pour  $x = 2$  et  $x = 3$  on a

$$P(2) = 0 \quad \text{et} \quad P(3) = 0$$

**3.1.3 Opérations sur les monômes et polynômes****Somme et différence de monômes et polynômes**

Étant donné que les polynômes sont composés de monômes, il s'agit, tout d'abord, d'éliminer les parenthèses en veillant, le cas échéant, à distribuer correctement le signe "–" sur l'ensemble des termes inclus dans la parenthèse, puis de combiner les monômes semblables à des fins de simplification (réduction) en additionnant ou soustrayant leurs coefficients respectifs tout en conservant la partie littérale commune.

**Exemple**

$$\begin{aligned} (x^2 + 3) + (2x^2 - 4x + 7) &= x^2 + 3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ &= (1 + 2)x^2 - 4x + (3 + 7) \\ &= 3x^2 - 4x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-2xy + 5xy^2) - (5xy - 3xy^2) &= -2xy + 5xy^2 - 5xy + 3xy^2 \\ &= (5 + 3)xy^2 + (-2 - 5)xy \\ &= 8xy^2 - 7xy \end{aligned}$$

### 3 Équations

#### Produit de monômes et polynômes

Lorsque l'on effectue un produit de monômes, on multiplie les coefficients avec les coefficients et les variables avec les variables sans oublier d'appliquer les propriétés des exposants et de réduire l'expression obtenue. Lorsque l'on multiplie des monômes ou des polynômes avec d'autres polynômes, on multiplie chaque terme de l'un par chaque terme de l'autre selon le schéma de distributivité.

#### Exemple

$$2x^3 \cdot 5x^7 = (2 \cdot 5) \cdot (x^3 \cdot x^7) = 10x^{10}$$

$$3ab^2 \cdot (-2a^4b^5) = (-3 \cdot (-2)) \cdot (a^1 \cdot a^4) \cdot (b^2 \cdot b^5) = -6a^5b^7$$

$$5x \cdot (2x^3 + 7) = 5x \cdot 2x^3 + 5x \cdot 7 = 10x^4 + 35x$$

$$\begin{aligned} (-3x^2 + 4x) \cdot (5x^3 - 3x + 2) &= -15x^5 + 9x^3 - 6x^2 + 20x^4 - 12x^2 + 8x \\ &= -15x^5 + 20x^4 + 9x^3 - 18x^2 + 8x \end{aligned}$$

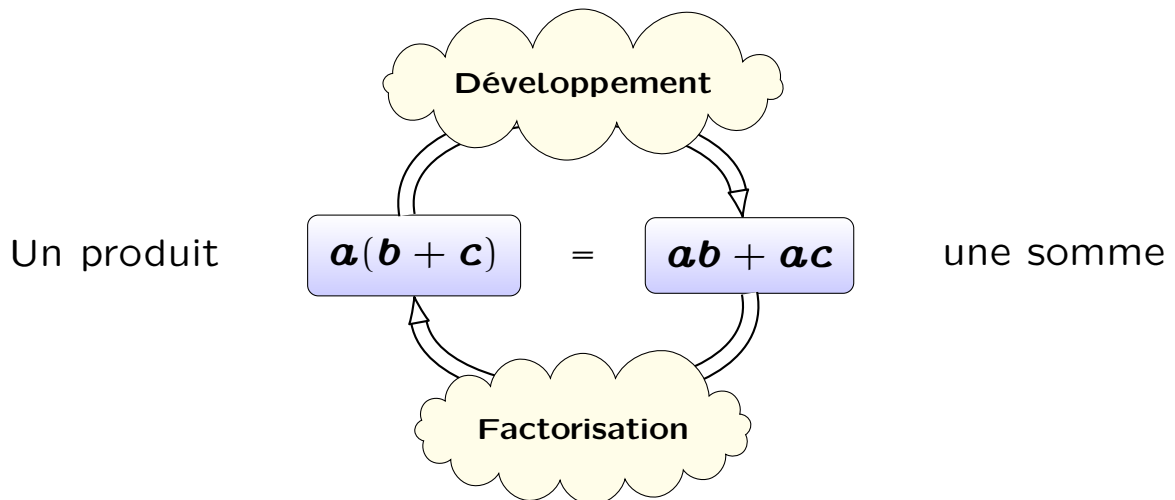
$$\begin{aligned} \underbrace{(3x^2 - 4) \cdot (5x + 2)}_{\text{on effectue d'abord ce produit}} \cdot (4x - 1) &= (15x^3 + 6x^2 - 20x - 8) \cdot (4x - 1) \\ &= \dots \\ &= 60x^4 + 9x^3 - 86x^2 - 12x + 8 \end{aligned}$$

## 3.1.4 Factorisation de polynômes

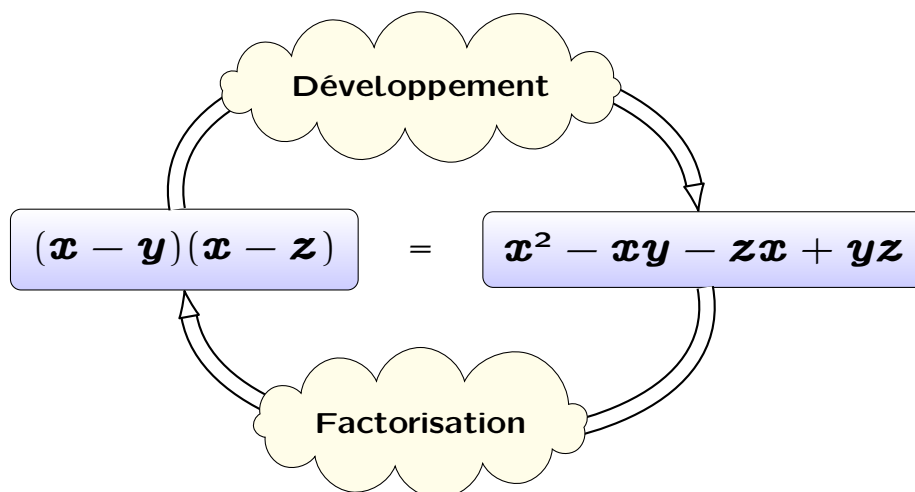
**Définition 3.1.6 : Factoriser un polynôme**

**Factoriser** un polynôme consiste à le transformer en produit de polynômes de degré plus petit.

Développer (distribuer) et factoriser sont deux actions réciproques :



ou encore

**Exemple**

Soit à résoudre l'équation

$$2(x + 13) - 5(1 - x) = 0$$

### 3 Équations

Sans hésitation, il faut trouver une écriture plus simple du membre de gauche et le seul outil pour cela est de le développer

$$2x + 26 - 5 + 5x = 0$$

après simplification

$$7x + 21 = 0$$

ce qui donne

$$x = -3$$

Mais si l'on demande de résoudre l'équation

$$(1 - x)(x + 13) - 5(1 - x) = 0$$

il faut y regarder à deux fois : développer le membre de gauche ne conduit pas à une écriture plus simple, mais mène au contraire à une équation du second degré qui se résout à l'aide d'une formule particulière, connue sous le nom de "formule de Viète". Alors que si l'on arrive à écrire le membre de gauche comme un produit, cela permettra de déterminer la solution encore plus rapidement qu'à l'aide de ladite formule.

En effet, partant de  $ab - ca = a(b - c)$ , on a ici

$$(1 - x)(x + 8) = 0$$

ce produit sera nul si  $x = 1$  ou si  $x = -8$ , ce sont donc les racines de l'équation.

Voici différentes méthodes pour décomposer en facteurs.

#### (I) Mise en évidence

Lorsque tous les termes d'une expression ont des facteurs communs (*penser aux pgcd des termes !*), il faut toujours commencer par mettre ces facteurs en évidence.

#### Exemple

Soit dans

$$17ax - 34bx = 17x(a - 2b)$$

ou encore dans

$$3a^2b - 3ab = 3ab(a - 1)$$

**(II) Identités remarquables**

Si l'expression est le développement d'une identité remarquable, la factorisation est immédiate (Cf. Chapitre 2).

**(III) Groupement de termes**

Un groupement peut faire apparaître un facteur commun ou une identité remarquable.

**Exemple**

$$ax + bx + ay + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 + 2bc &= a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) \\ &= a^2 - (b - c)^2 \\ &= [a - (b - c)] [a + (b - c)] \\ &= (a - b + c)(a + b - c) \end{aligned}$$

**(IV) Factorisation du trinôme (*polynôme à trois termes*) du second degré**

Le polynôme  $ax^2 + bx + c$  se décompose sous la forme

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{si} \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

Cette factorisation est connue sous le nom de "méthode de Viète".

Le point 3.2.2 reviendra plus en détail sur cet aspect.

**(V) Astuces calculatoires**

Voici quelques "trucs" qui permettent de se ramener à l'une des situations ci-dessus.

- a) Ajouter et retrancher un même terme, puis regrouper.

Exemple

$$\begin{aligned}
 a^4 + 4 &= a^4 + 4 + 4a^2 - 4a^2 \\
 &= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 \\
 &= (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a)
 \end{aligned}$$

b) Dédouber un terme, puis regrouper

Exemple

$$\begin{aligned}
 x^3 + 5x + 6 &= x^3 - x + 6x + 6 \\
 &= x(x^2 - 1) + 6(x + 1) \\
 &= x(x + 1)(x - 1) + 6(x + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - x + 6)
 \end{aligned}$$

c) Développer puis grouper

Exemple

$$\begin{aligned}
 a(a + c) - b(b - c) &= a^2 + ac - b^2 + bc \\
 &= (a^2 - b^2) + c(a + b) \\
 &= (a + b)(a - b) + c(a + b) \\
 &= (a + b)(a - b + c)
 \end{aligned}$$

### 3.1.5 Division de polynômes

La division d'un polynôme  $P(x)$  (*dividende*) par un polynôme  $D(x)$  (*diviseur*) donne un polynôme  $Q(x)$  (*quotient*) et un polynôme  $R(x)$  (*reste*) liés par les relations suivantes

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

où  $\deg(R(x)) < \deg(D(x))$  et  $\deg(Q(x)) = \deg(P(x)) - \deg(D(x))$ , avec la fonction  $\deg(f(x))$  qui donne le degré du polynôme  $f(x)$ .

#### (I) Division euclidienne polynomiale



Pour faire une division euclidienne, on réalise un tableau comme pour une division de nombres réels

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$$

Fig. 3.1. Position des polynômes lors d'une division euclidienne

Cette division s'arrête lorsque le degré de  $R(x)$  est strictement inférieur au degré de  $D(x)$ .

### Exemple

La division du polynôme  $6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2$  par le polynôme  $x^2 + 2$ , donne

$$\begin{array}{r|l} \text{P}(x) & \text{D}(x) \\ \hline 6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2 & x^2 + 2 \\ -(6x^4 + 12x^2) & 6x^2 - 2x - 3 \quad \text{Q}(x) \\ \hline -2x^3 - 3x^2 - 2x - 2 & \\ -(-2x^3 - 4x) & \\ \hline -3x^2 + 2x - 2 & \\ -(-3x^2 - 6) & \\ \hline 2x + 4 & \\ \text{R}(x) & \end{array}$$

Fig. 3.2. Division du polynôme  $6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2$  par le polynôme  $x^2 + 2$

Le premier terme du quotient ( $6x^2$ ) est obtenu en divisant le premier terme du dividende ( $6x^4$ ) par le premier terme du diviseur ( $x^2$ ). On obtient alors la première ligne ( $-6x^4 - 12x^2$ ) en multipliant le diviseur ( $x^2 + 2$ ) par le premier terme du quotient ( $6x^2$ ). On poursuit ensuite en appliquant les règles usuelles de la division. Le dernier terme ( $2x + 4$ ), étant de degré inférieur à celui du diviseur, représente le **reste** de la division. On a donc

### 3 Équations

$$\frac{6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2}{x^2 + 2} = 6x^2 - 2x - 3 + \frac{2x + 4}{x^2 + 2}$$

ou encore

$$6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2 = (x^2 + 2)(6x^2 - 2x - 3) + (2x + 4)$$

#### (II) Critère de divisibilité par $(x - a)$

Si le diviseur  $D(x)$  est un polynôme du premier degré de la forme  $(x - a)$ , on a

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$$

où  $\deg(R(x)) < \deg((x - a))$ . Donc  $R(x)$  est une constante et on peut écrire

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$$

En prenant  $x = a$ , on obtient

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R = 0 \cdot Q(a) + R = R$$

On constate ainsi que le reste de la division d'un polynôme par  $(x - a)$  est égal à la valeur numérique de ce polynôme en  $x = a$ , où  $a \in \mathbb{R}$ , **ce qui revient à dire que l'on peut déterminer le reste d'une division d'un polynôme en  $x$  par  $(x - a)$  sans déterminer le quotient** et par là même vérifier si la division est exacte, c'est-à-dire si le reste est nul ( $\Leftrightarrow R = 0$ ).

En clair, cela permet de savoir si  $(x - a)$  divise  $P(x)$  sans avoir à faire la division : à la place on évalue  $P(a)$ .

Dans ce cas là, en effet, on obtient la factorisation  $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$ .

#### Exemple

Déterminons le reste de la division de  $P(x) = x^3 - 9x^2 + 14x + 24$  par  $(x - 5)$ . Ici  $a = 5$  et on obtient

$$R = P(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 + 24 = -6$$

$P(x)$  n'est donc pas divisible par  $(x - 5)$ , car le reste n'est pas égal à zéro, c'est-à-dire que  $P(x) \neq (x - 5) \cdot Q(x)$ .

En revanche, le reste de la division de  $P(x)$  par  $(x - 4)$  donne

$$R = P(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 14 \cdot 4 + 24 = 0$$

$P(x)$  est donc divisible par  $(x - 4)$ , c'est-à-dire que  $P(x) = (x - 4) \cdot Q(x)$ , en l'occurrence  $P(x) = (x - 4) \cdot (x^2 - 5x - 6)$ .

Il découle de ce qui précède l'important résultat suivant :

### Théorème 3.1.1 : Théorème du reste

Soient  $P(x)$  un polynôme et  $a$  un nombre réel. Alors

$$P(a) = 0 \iff \exists Q(x) \text{ tel que } P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

**Remarque** La preuve de cette affirmation est présentée plus bas. L'essentiel des arguments de la démonstration faisant partie du développement qui précède, un **défi personnel** consiste à essayer de démontrer ce théorème avant de prendre connaissance de la preuve !

## 3.2 Équations à une inconnue de degré 1 et 2

### Définition 3.2.1 : Équation, inconnues, solutions

Une **équation** est une égalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs données aux variables qu'elle contient. Ces variables sont les **inconnues** de l'équation et les valeurs qui vérifient l'équation sont appelées les **solutions** de l'équation.

### Exemple

L'expression

$$2x - 10 = -3x$$

est une équation où  $x$  est l'inconnue. Le nombre  $x = 2$  est solution de l'équation, car si on remplace  $x$  par 2 on obtient l'égalité  $-6 = -6$ .

### 3.2.1 Équations du premier degré

L'équation  $ax + b = 0$  avec  $a \neq 0$  est une **équation du premier degré** (car l'exposant de  $x$  vaut 1). Cette équation a une seule solution  $x = -\frac{b}{a}$ . L'ensemble des solutions de cette équation sera donc noté  $S = \{-\frac{b}{a}\}$ . Le nombre  $x = -\frac{b}{a}$  est aussi appelé **racine** de l'expression  $ax + b = 0$ .

## Exemple

L'équation  $2x - 4 = 0$  a une seule solution (ou *racine*) qui est  $x = -\frac{-4}{2} = 2$ . On notera  $S = \{2\}$ .

**Remarques** L'équation  $ax + b = 0$  avec

1.  $a = 0, b \neq 0$  ne possède pas de solution. On notera alors  $S = \emptyset$ .
2.  $a = 0, b = 0$  possède un infinité de solutions. On notera alors  $S = \mathbb{R}$ .

## 3.2.2 Équations du deuxième degré

L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$  est une **équation du second degré** (car le plus grand exposant de  $x$  est 2). Cette équation a zéro, une ou deux solution(s) (ou *racine(s)*) dans  $\mathbb{R}$ .

Ces solutions sont données par :

- ▷  $S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$ , si  $b^2 - 4ac > 0$  ;
- ▷  $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$ , si  $b^2 - 4ac = 0$  ;
- ▷  $S = \emptyset$ , si  $b^2 - 4ac < 0$ .

La preuve de ces formule est présentée plus bas.

## Exemple

L'équation  $3x^2 - 3x - 18 = 0$  a deux solutions (pourquoi ?)

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{225}}{6} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{225}}{6} = -2$$

On notera alors  $S = \{-2; 3\}$ .

L'équation  $4x^2 - 8x + 4 = 0$  a une solution  $x = \frac{8 + \sqrt{0}}{8} = 1$ . On notera alors  $S = \{1\}$ .

L'équation  $x^2 - 2x + 6 = 0$  n'a pas de solution, car  $b^2 - 4ac < 0$ . On notera  $S = \emptyset$ .

**Remarque** La maîtrise de la mise en évidence (en recherchant le pgcd de chacun des monômes intervenant dans le polynôme) ainsi que des identités remarquables (Cf. Chapitre 2.3) couplés aux remarques précédentes permettent très souvent

de gagner un temps considérable dans la recherche des solutions d'équations de second degré et plus. Les exemples ci-dessus l'illustrent aisément. Considérons, par exemple,  $4x^2 - 8x + 4 = 4(x - 1)^2$ . On a  $a = \text{pgcd}(4x^2; -8x; 4) = 4$ . La mise en évidence nous donne donc

$$4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1)$$

il ne reste plus qu'à factoriser  $x^2 - 2x + 1$  à l'aide de la deuxième identité remarquable. Pour le cas  $3x^2 - 3x - 18 = 3(x^2 - x - 6)$ , il faudra utiliser l'identité remarquable  $(x + p)(x + q) = x^2 + x(p + q) + pq$ , autrement dit déterminer les nombres  $p$  et  $q$  tels que  $p + q = -1$  et  $p \cdot q = -6$ .

### 3.3 Équations à une inconnue de degré 3

Tout comme pour la résolution d'équations du deuxième degré, il existe des formules explicites de résolution par radicaux (*c'est-à-dire où les solutions contiennent des  $\sqrt{\dots}$* ) pour les équations polynomiales de degré trois et quatre ; respectivement formules de Cardan et de Ferrari toutes les deux datant du milieu du *XVI<sup>e</sup>* siècle. Cependant, elles demeurent complexes dans leur utilisation. C'est pourquoi, nous nous bornerons dans ce cours à l'usage des théorème du reste (*critère de divisibilité par  $x - a$  vu précédemment*) et théorème des diviseurs (*ci-après*) afin de déterminer les solutions d'équations à une inconnue de degré 3.

Par ailleurs, on rappelle que nous obtenons une équations polynomiale quand nous posons un polynôme à une inconnue (*variable*) égal à zéro. Nous travaillerons ici sur des polynômes ayant des coefficients entiers (*c'est-à-dire dans  $\mathbb{Z}$* ). Une équation polynomiale est dans sa **forme canonique** si elle est donnée par une équation

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{Z}$$

où les termes sont placés dans l'ordre décroissant des puissances de  $x$ .

Énonçons d'abord un résultat de haute importance (*sans le démontrer, car cela sort du cadre de ce cours*) qui représente l'extension aux polynômes de ce qu'est le théorème fondamental de l'arithmétique pour les nombres entiers :

#### **Théorème 3.3.1 : Théorème fondamental de l'algèbre**

**Tout polynôme** peut être écrit comme un produit de polynômes du premier et/ou du second degré à discriminant négatif ( $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ), de façon unique.

### 3 Équations

#### Exemple

1.  $P(x) = 3x + 1$  n'est pas factorisable, car son degré est égal à 1 ;
2.  $Q(x) = x^2 + 2$  n'est pas factorisable, car  $\Delta < 0$  ;
3.  $R(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)(x - 5) = (x - 5)^2$  ;
4.  $S(x) = x^3 + x^2 - 26x + 24 = (x + 6)(x - 1)(x - 4)$  ;
5.  $T(x) = x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 20x - 24 = (x + 6)(x - 1) \underbrace{(x^2 + 4)}_{\Delta < 0}$ .

Voici une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre :

#### Corollaire 3.3.1 :

Une équation polynomiale de degré  $n$  a au plus  $n$  solutions (racines) réelles.

*Démonstration.* Chaque facteur du 1<sup>er</sup> degré donne une solution et il y en a au plus  $n$  dans la décomposition d'un polynôme de degré  $n$ .  $\square$

#### Exemple

L'équation polynomiale

- $x^2 - 10x + 25 = 0$  est de degré 2 et possède au plus 2 racines réelles ;
- $x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 20x - 24 = 0$  est de degré 4 et possède donc au plus 4 racines réelles ;
- $x^{1000} + x - 1 = 0$  est de degré 1000 et possède donc au plus 1000 racines réelles.

**Remarques** Quelques observations :

- (i) Alors qu'ils ne donnent pas de méthode de calcul pour déterminer les solutions d'équations polynomiales de degré  $n$ , ces théorèmes mettent en évidence que, mis à part les polynômes de degré 1, ceux de degré 2 à discriminant négatif soient les seuls polynômes à ne pas être factorisables.
- (ii) Lorsque l'on dénombre les racines d'un polynôme, on tient compte de leur multiplicité, c'est-à-dire du nombre de polynômes du premier degré donnant cette racine. Par exemple, le polynôme

$$P(x) = 3x^6 - 36x^5 + 135x^4 - 90x^3 - 360x^2 + 288x + 384 = 3(x-4)^3(x-2)(x+1)^2$$

qui est de degré 6, possède trois racines distinctes 4, 2 et  $-1$ , mais 4 est une racine de multiplicité 3 ; alors que 2 est de multiplicité 1 et  $-1$  est de multiplicité 2. Donc, finalement,  $P(x)$  possède 6 racines qui sont : 4, 4, 4, 2,  $-1$  et  $-1$ . L'ensemble solution sera cependant noté  $S = \{-1, 2, 4\}$ .

### Théorème 3.3.2 : Théorème des diviseurs

Soit  $P(x)$  un polynôme à coefficients entiers, c'est-à-dire que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

avec  $a_i \in \mathbb{Z}$  et  $\frac{p}{q}$  une fraction irréductible.

Si  $\frac{p}{q}$  est une solution rationnelle de  $P(x) = 0$ , alors  $p$  est un **diviseur** de  $a_0$  et  $q$  un diviseur de  $a_n$ .

**Remarque** Ce théorème permet d'établir la liste des racines rationnelles **possibles** d'un polynôme à coefficients entiers, mais ne dit rien à propos des racines irrationnelles. D'autre part, la réciproque de ce théorème est fautive, car en effet il ne suffit pas que  $p$ ,  $q$  soient des diviseurs respectivement de  $a_0$ ,  $a_n$  pour que  $\frac{p}{q}$  soit une racine de  $P(x) = 0$ .

### Exemple

Considérons le polynôme  $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$  où les coefficients sont entiers et valent respectivement  $a_3 = 2$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_0 = -1$ . D'après le théorème des diviseurs, s'il existe une racine rationnelle  $\frac{p}{q}$ , alors  $p$  divise  $-1$  et  $q$  divise 2.

	$q$	$+1$	$-1$
$+1$		$+1$	$-1$
$-1$		$-1$	$+1$
$+2$		$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-2$		$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$

Fig. 3.3. Diviseurs de  $a_0 = -1$  et de  $a_3 = 2$

### 3 Équations

Tous les cas de figure peuvent être traités par l'intermédiaire d'un tableau où sur la première ligne apparaissent les diviseurs de  $a_0$ , sur la première colonne ceux de  $a_3$  et dans les autres cases tous les rapports  $\frac{p}{q}$  possibles. Il suffit maintenant de tester tous les nombres rationnels produits, à savoir  $\frac{p}{q} = -1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$  et  $+1$ .

On obtient, après substitution de ces valeurs dans  $x$

$$P(-1) = -6 \neq 0, \quad P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2} \neq 0, \quad P\left(+\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ et } P(+1) = 2 \neq 0$$

On en déduit que la seule racine rationnelle de  $P(x)$  est  $+\frac{1}{2}$ . On utilise dès à présent le critère de divisibilité par  $\left(x - \frac{1}{2}\right)$  pour factoriser  $P(x)$  afin de pouvoir trouver d'éventuelles autres solutions :

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + 2x - 1 &= 0 && \iff \text{division par } x - \frac{1}{2} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 2) &= 0 && \iff \text{mise en évidence} \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + 1) &= 0 && \iff \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ (x^2 + 1) = 0 \end{cases} \\ &&& \iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

car l'équation  $(x^2 + 1) = 0$  n'a pas de solutions réelles puisque  $\Delta < 0$ . Donc,

$$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

## 3.4 Équations linéaires à 2 inconnues

### 3.4.1 Équations du premier degré - droites

Une équation du premier degré à deux inconnues  $ax + by + c = 0$  est représentée dans le plan cartésien par une droite.

Un point appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées en  $x$  et  $y$  vérifient l'équation de la droite ; ces couples de coordonnées sont dits solutions de l'équation. On notera que pour chaque équation représentative d'une droite, il existe une infinité de couples  $(x; y)$  tels que  $ax + by + c = 0$ , car une droite comporte une infinité de points.



## Exemple

Considérons la droite  $d : y = 2x - 1$ . On a  $(2; 3) \in d$ , car  $3 = 2 \cdot 2 - 1$ , mais  $(3; 1) \notin d$  puisque  $1 \neq 2 \cdot 3 - 1$ . Autrement dit, le couple  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  est solution de l'équation  $y = 2x - 1$ .

En pratique, pour représenter une droite, il suffit de choisir deux points de cette droite et de les relier. Par facilité, on choisit souvent les intersections de la droite avec les deux axes de coordonnées.

**(I) Équation cartésienne de la droite**

L'équation cartésienne d'une droite (*non verticale*) peut s'écrire

$$y = mx + p$$

où

- $p$  est l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que  $p$  est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe  $Oy$ . Le point  $(0; p)$  appartient donc à la droite;
- $m$  est la pente de la droite. Il s'agit de l'augmentation de l'ordonnée pour une augmentation unitaire des abscisses et ceci quel que soit l'endroit où l'augmentation de  $x$  est considérée. Par exemple, entre  $0$  et  $P_1$ , l'augmentation des ordonnées est de  $m - 0 = m$ , et entre  $P_1$  et  $P_2$ , l'augmentation des ordonnées est de  $2m - m = m$ .

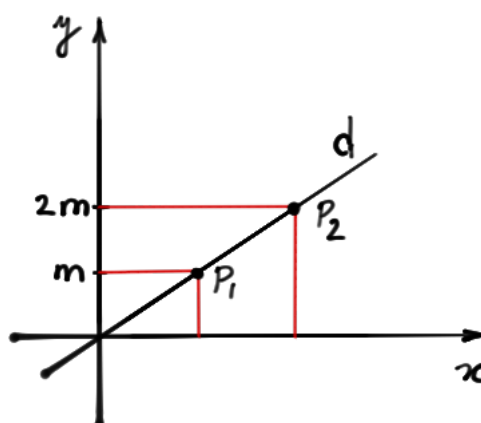


Fig. 3.4. Augmentation des ordonnées

**(II) Équation d'une droite passant par deux points donnés**

### 3 Équations

Une droite est entièrement déterminée par deux points distincts du plan. Soit  $P_1 = (x_1; y_1)$  et  $P_2(x_2; y_2)$  deux points par lesquels passe la droite.

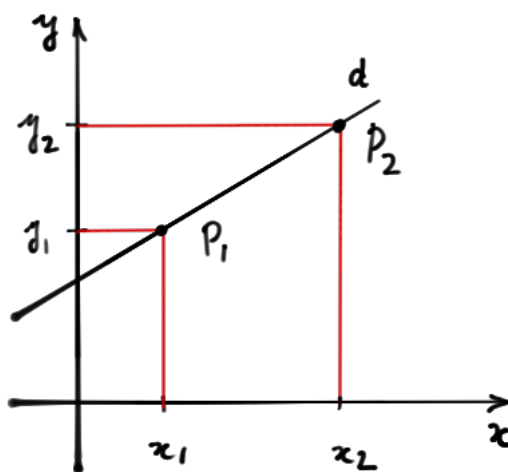


Fig. 3.5. Équation de la droite  $y = mx + p$

L'équation de la droite  $y = mx + p$  doit être satisfaite par les deux points  $(x_1; y_1)$  et  $(x_2; y_2)$ . On a donc

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + p \\ y_2 = mx_2 + p \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations (voir la Section 3.5 traitant des systèmes linéaires d'équations), on élimine le paramètre (inconnu)  $p$ . On obtient alors

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

ou encore

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En remplaçant  $m$  dans la première équation, on trouve

$$p = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1$$

Ce qui nous permet de déterminer l'équation de toute droite du moment que nous

connaissons au moins deux points par lesquels elle passe.

L'équation cartésienne de la droite **passant par les points**  $P_1 = (x_1; y_1)$  et  $P_2 = (x_2; y_2)$  est donnée par

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

### Exemple

La droite passant par les points  $(-1; -1)$  et  $(1; 3)$  a pour équation  $y = 2x + 1$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} y - (-1) &= \frac{3 - (-1)}{1 - (-1)}(x - (-1)) \iff \\ y + 1 &= 2(x + 1) \iff \\ y &= 2x + 2 - 1 \iff \\ y &= 2x + 1 \end{aligned}$$

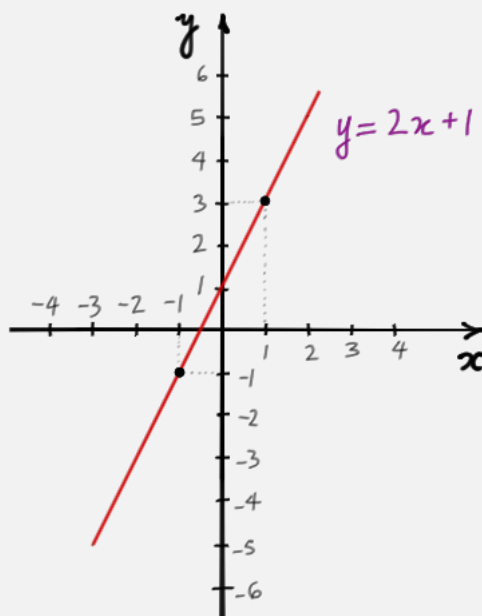


Fig. 3.6. Équation de la droite  $y = 2x + 1$

**Il existe cependant des cas particuliers :**

- Si  $y_1 = y_2$ , la pente est nulle et la droite est parallèle à l'axe des  $x$  (*droite horizontale*).

Dans ce cas, la droite a pour équation  $y = y_1$ . Ainsi, par exemple, l'équation de l'axe des abscisses est donnée par  $y = 0$ .

### 3 Équations

- Si  $x_1 = x_2$ , la pente est infinie et la droite est parallèle à l'axe des  $y$  (*droite verticale*).

Dans ce cas, la droite a pour équation  $x = x_1$ . Ainsi, par exemple, l'équation de l'axe des ordonnées est donnée par  $x = 0$ .

En pratique, pour représenter une droite dont on connaît deux points, il suffit de placer ces deux points dans un repère et de les relier.

#### (III) Équation d'une droite de pente donnée et passant par un point donné

Si une droite est parfaitement définie par la donnée de deux de ses points, elle l'est aussi par la donnée de l'un de ses points (*par exemple le point d'intersection de cette droite avec l'axe des ordonnées*) et de sa pente.

Soit  $m$  la pente de la droite et  $P_1 = (x_1; y_1)$  un point par lequel passe cette droite.

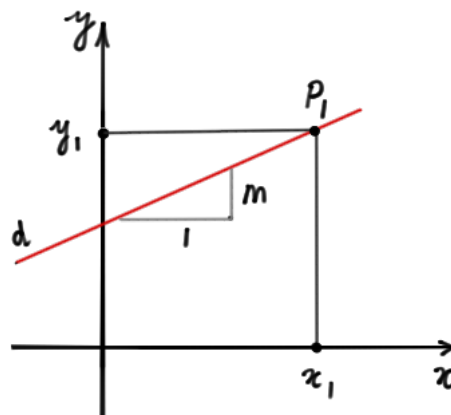


Fig. 3.7. Équation de droite connaissant la pente et un point

Vu que la pente est connue, il reste à déterminer le paramètre  $p$  dans l'équation  $y = mx + p$ . Puisque  $(x_1; y_1)$  vérifie l'équation de la droite, on a  $y_1 = mx_1 + p$  d'où la valeur du paramètre  $p$

$$p = y_1 - mx_1$$

L'équation devient alors  $y = mx + y_1 - mx_1$ .

L'équation cartésienne de la droite **de pente  $m$  passant par le point  $P_1 = (x_1; y_1)$**  est donnée par

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

## Exemple

La droite de pente 4 et passant par le point  $(1; 3)$  a pour équation  $y = 4x - 1$ .  
En effet, on a

$$\begin{aligned} y - 3 &= 4(x - 1) \iff \\ y &= 4x - 4 + 3 \iff \\ y &= 4x - 1 \end{aligned}$$

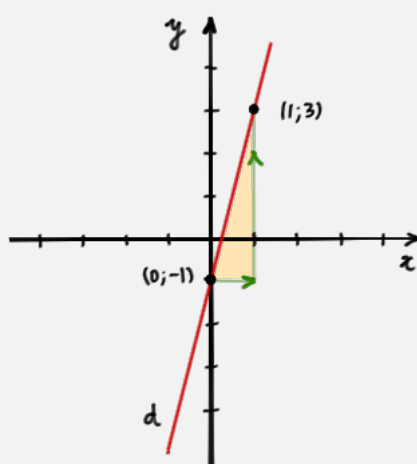


Fig. 3.8. Graphique de la droite  $y = 4x - 1$

En pratique, pour représenter la droite  $y = mx + p$ , on place le point  $(0; p)$ , et, partant de ce point, on avance d'une unité vers la droite, puis on monte (si  $m > 0$ ) ou on descend (si  $m < 0$ ) d'une longueur  $m$ . On obtient ainsi un deuxième point. Il ne reste plus qu'à tracer une droite passant par ces deux points.

**Remarques** Observons que

- (i) si nous considérons la droite  $y = mx + p$ , on remarque que, pour  $p$  fixé, la pente de la droite varie avec  $m$ . Par contre, si on fixe  $m$ , on obtient, en faisant varier  $p$ , des droites parallèles entre elles. L'ajout du terme  $p$  a pour seul effet de déplacer (*translater*) la droite vers le haut (*ou le bas*) d'une distance égale à  $p$ .
- (ii) si  $m > 0$ , alors la droite est croissante, tandis que si  $m < 0$ , alors elle est décroissante.
- (iii) si en déplaçant un point sur la droite on augmente son abscisse de 1, son ordonnée augmentera de  $m$  (*positif ou négatif*).

### 3 Équations

- (iv) si en déplaçant un point sur la droite on augmente son abscisse de  $\Delta x$ , son ordonnée augmentera de  $\Delta y = m \cdot \Delta x$ , où  $\Delta$  (se lit "delta") désigne une variation. Donc

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

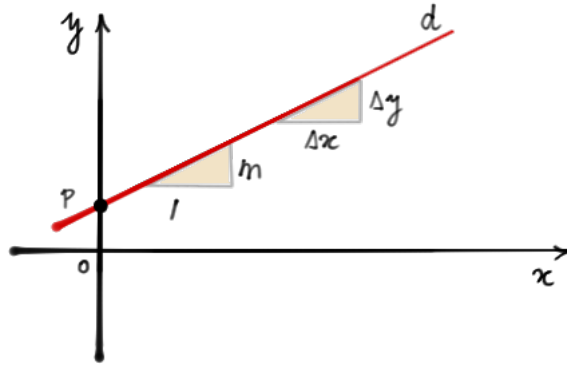


Fig. 3.9. Pente d'une droite comme rapport de variations verticale et horizontale

- (v) ayant choisi un système d'axes perpendiculaires avec des unités de même longueur, on a

$$m = \tan(\alpha)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre l'axe des  $x$  positifs et la droite, dans le sens trigonométrique.

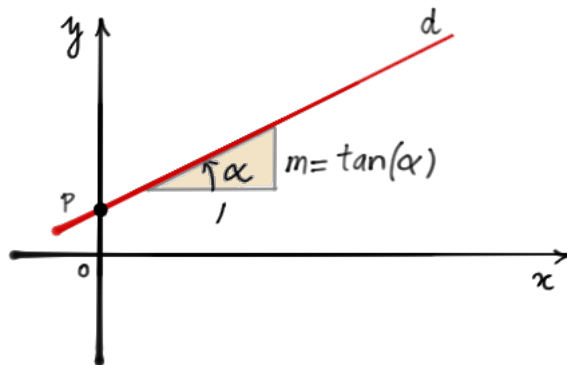


Fig. 3.10. Pente comme la tangente d'un angle

Dans ce cas, le pente est aussi appelée **coefficient angulaire** de la droite.

#### (IV) Forme générale de l'équation d'une droite

Plus généralement, l'équation d'une droite sera donnée par une relation linéaire du type

$$ax + by = c$$

Cette formulation est plus générale que  $y = mx + p$ , car elle peut admettre  $b = 0$ , ce qui n'était pas le cas avec la formulation précédente

- Si  $b = 0$  et  $a \neq 0$ , l'équation  $ax + by = c$  se réduit à  $x = \frac{c}{a}$ . Cette équation signifie que, quelle que soit la valeur de  $y$ ,  $x$  est une constante. Graphiquement, on a donc une droite verticale

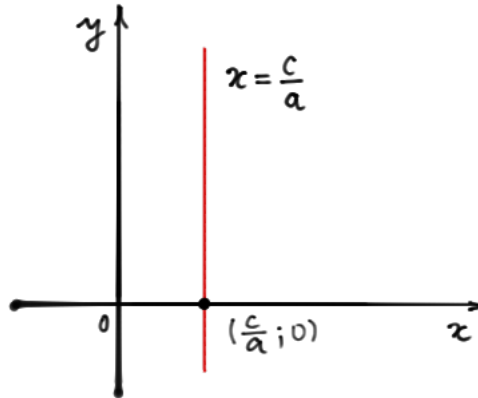


Fig. 3.11. Graphique d'une droite verticale

En particulier, l'équation de l'axe des ordonnées est donnée par  $x = 0$ .

- Si  $b \neq 0$  et  $a \neq 0$ , on peut réécrire  $ax + by = c$  comme

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

On est donc ramené à l'équation du type  $y = mx + p$  avec  $m = -\frac{a}{b}$  et  $p = \frac{c}{b}$ .

- Si  $b \neq 0$  et  $a = 0$ , on a une équation du type  $y = \frac{c}{b}$  qui dit que quelle que soit la valeur de  $x$ , la valeur de  $y$  est constante. Il s'agit d'une droite horizontale

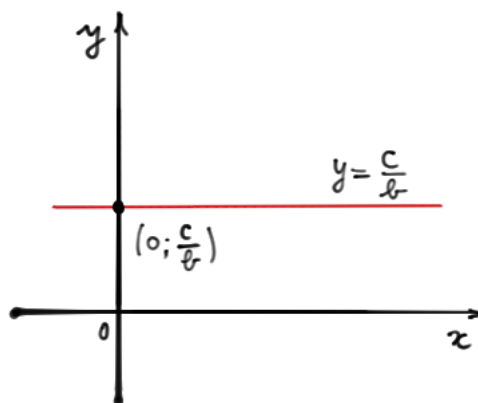


Fig. 3.12. Graphique d'une droite horizontale

En particulier, l'équation de l'axe des abscisses est donné par  $y = 0$ .

### 3.4.2 Position relative de deux droites

- Deux droites sont **parallèles distinctes** si et seulement si elles ont la même pente ( $m$ ) et des ordonnées à l'origine ( $p$ ) différentes.

**Exemple**

Les droites

$$y = 3x + 2$$

et

$$y = 3x - 1$$

sont parallèles.

- Deux droites sont **sécantes** si et seulement si elles ont des pentes différentes.

**Exemple**

Les droites

$$y = 3x + 2$$

et

$$y = 5x - 1$$

sont sécantes.

- Deux droites sont **perpendiculaires** si et seulement si le produit de leurs pentes vaut  $-1$  (ou si une des droites est verticale et l'autre horizontale).

**Exemple**

Les droites

$$y = 3x + 2$$

et

$$y = -\frac{1}{3}x - 1$$

sont perpendiculaires.



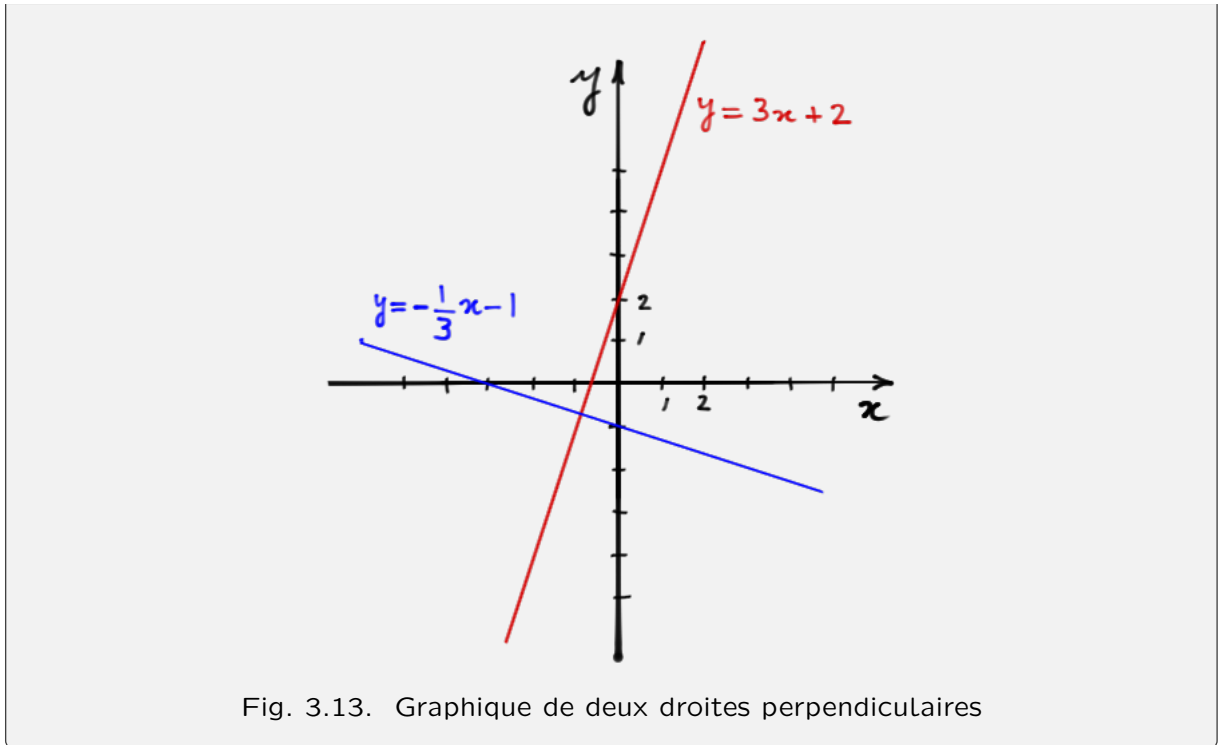


Fig. 3.13. Graphique de deux droites perpendiculaires

Les coordonnées du point d'intersection de deux droites sont obtenues en résolvant le système formé par leurs équations, ce que traite la section suivante.

### 3.5 Systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues

On a vu que toute équation du premier degré à deux inconnues possède une infinité de solutions puisque sa représentation graphique est une droite qui comporte un infinité de points dont les coordonnées sont des solutions de cette équation. Si l'on considère un système de deux équations à deux inconnues, ses solutions seront les couples de réels  $(x; y)$  vérifiant **simultanément** la première et la seconde équation.

#### 3.5.1 Interprétation géométrique

Considérons le système formé de 2 équations linéaires dans  $\mathbb{R}^2 (= \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\})$

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases} \quad (*)$$

Notons  $S$  l'ensemble des points de  $(*)$  vérifiant le système. Autrement dit

$$S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (*) \text{ est vérifié}\}$$

### 3 Équations

L'ensemble  $S$  comprend les points de l'intersection des 2 droites. Plusieurs cas sont possibles en fonction des paramètres des 2 droites.

- **Les deux droites sont sécantes.** Si  $a \neq c$ , les deux droites sont sécantes et ont alors un seul point commun, le point  $(x_0; y_0)$ . Le système aura une solution unique notée  $S = \{(x_0; y_0)\}$ .

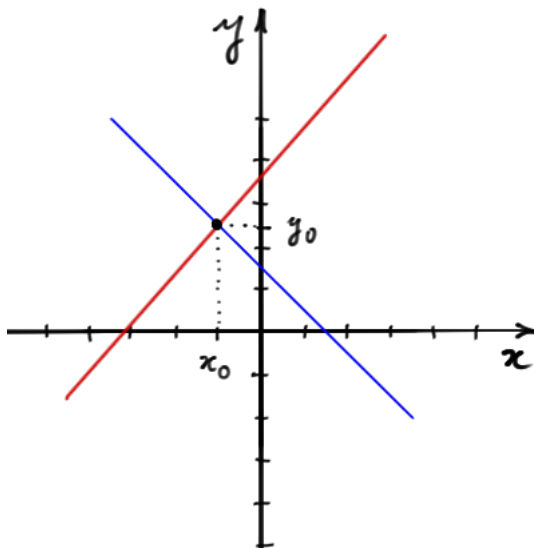


Fig. 3.14. Graphique de deux droites sécantes : Le système sous-jacent a une solution

- **Les deux droites sont parallèles distinctes.** Si  $a = c$  et  $b \neq d$ , les deux droites sont parallèles et distinctes. Elles n'ont donc aucun point en commun. Le système n'aura aucune solution. On dit qu'il est impossible et on note  $S = \emptyset$ .

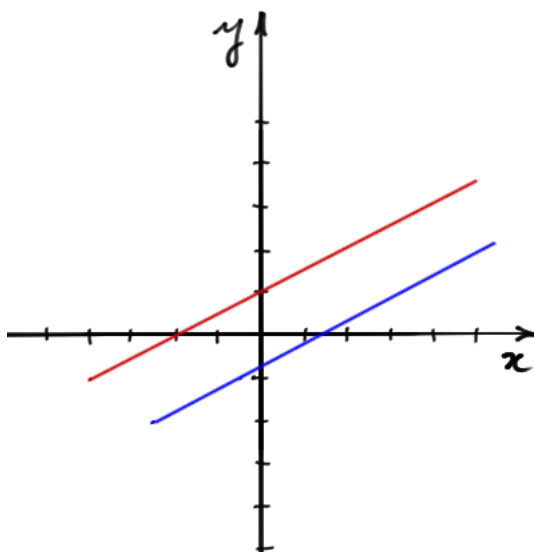


Fig. 3.15. Graphique de deux droites parallèles : Le système sous-jacent n'a pas de solution

- **Les deux droites sont parallèles confondues.** Si  $a = c$  et  $b = d$ , les deux droites sont confondues. Elles ont tous leurs points en commun. Le système a une infinité de solutions. On dit qu'il est indéterminé et on note  $S = \{(x; y) \mid y = ax + b\}$ .

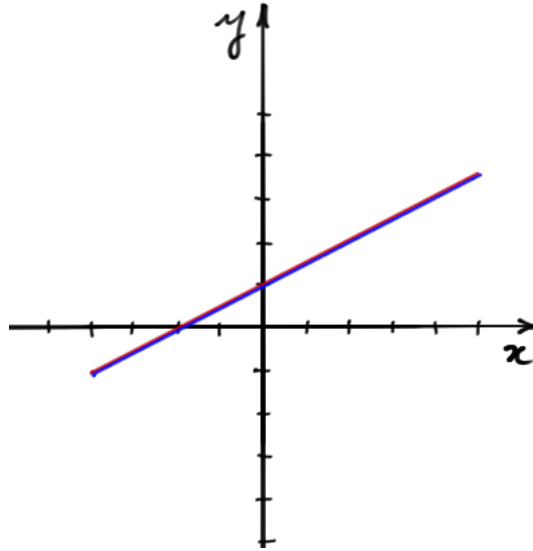


Fig. 3.16. Graphique de deux droites confondues : Le système sous-jacent a une infinité de solutions (pourquoi ?)

### 3.5.2 Méthode de résolution

Voyons à présent trois méthodes pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

#### (I) Méthode de combinaison

La procédure à suivre consiste à :

- Aligner les inconnues et le terme indépendant.
- Multiplier les équations par un réel de telle manière qu'en faisant la somme des équations, une des inconnues disparaisse.
- Isoler l'inconnue restante.
- Remplacer cette inconnue par sa valeur dans l'équation restante.

#### Exemple

Réolvons le système 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 4x = y + 1 \end{cases}$$
 On a successivement

### 3 Équations

$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 4x = y + 1 \end{cases} \begin{array}{l} | -y \\ | \cdot (-3) \end{array} \iff \begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \begin{array}{l} | \cdot 4 \\ | \cdot (-3) \end{array} \iff \begin{cases} 12x + 8y = 36 \\ -12x + 3y = -3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 12x + 8y = 36 \\ 11y = 33 \end{cases} \begin{array}{l} \\ | \div 11 \end{array} \iff \begin{cases} 12x + 8y = 36 \\ y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 12x + 24 = 36 \\ y = 3 \end{cases} \begin{array}{l} | - 24 \\ \\ \end{array} \iff$$

$$\begin{cases} 12x = 12 \\ y = 3 \end{cases} \begin{array}{l} | \div 12 \\ \\ \end{array} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

et donc  $S = \{(1; 3)\}$

### (II) Méthode de substitution

La procédure à suivre consiste à

- Isoler une des inconnues dans une des équations.
- Remplacer l'inconnue isolée par sa valeur dans l'autre équation.
- Isoler l'inconnue restante.
- Remplacer cette inconnue par sa valeur dans l'équation restante.

#### Exemple

Résolvons le même système qu'avant à l'aide de cette méthode. On a successivement

$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 4x = y + 1 \end{cases} \begin{array}{l} | - 2y \\ \\ \end{array} \iff \begin{cases} 3x = 9 - 2y \\ 4x = y + 1 \end{cases} \begin{array}{l} | \div 3 \\ | - y \end{array} \iff \begin{cases} x = 3 - \frac{2}{3}y \\ 4x - y = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{2}{3}y \\ 4\left(3 - \frac{2}{3}y\right) - y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 - \frac{2}{3}y \\ -\frac{11}{3}y = -11 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 - \frac{2}{3}y \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

et donc  $S = \{(1; 3)\}$

**(III) Méthode des déterminants**

On veut résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Appelons

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

la **matrice** du système et son **déterminant**

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

La procédure à suivre consiste à

- Calculer  $D = ab' - a'b$ .
- Si  $D = 0$  et  $(ac' - a'c \neq 0$  et  $cb' - c'b \neq 0)$ , alors le système est impossible.
- Si  $D = 0$  et  $(ac' - a'c = 0 = cb' - c'b \neq 0)$ , alors le système est indéterminé.
- Si  $D \neq 0$ , alors le système a une seule solution

$$S = \left\{ \left( \frac{cb' - c'b}{D}, \frac{ac' - a'c}{D} \right) \right\}$$

La preuve de cette affirmation est présentée plus bas.

**Exemple**

Résolvons le même système qu'avant à l'aide de cette méthode. On a

$$\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$

et donc  $D = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = -11$ . Puisque  $D \neq 0$ , le système aura une solution

$$\left( \frac{9 \cdot (-1) - 1 \cdot 2}{-11}; \frac{3 \cdot 1 - 9 \cdot 4}{-11} \right) = (1; 3)$$

On obtient donc ainsi  $S = \{(1; 3)\}$ .

## 3.6 Preuves

### 3.6.1 Méthode/formule de Viète

#### Théorème 3.6.1 :

L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  a zéro, une ou deux solutions dans  $\mathbb{R}$

*Démonstration.* Cette équation peut successivement s'écrire

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{complétion du carré}} + \frac{c}{a} = 0 \quad (3.1)$$

La méthode de complétion du carré (*méthode de François Viète, 1540-1603*) consiste à arranger l'expression sans en changer la valeur, et ce afin de pouvoir ramener une partie de l'expression à une identité remarquable permettant par la suite de résoudre l'équation par radicaux (c'est-à-dire en faisant intervenir une racine carrée.).

$$(3.1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Trois cas se présentent alors :

**1<sup>er</sup> cas :**  $b^2 - 4ac > 0$  On obtient

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et l'équation possède deux solutions :  $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$

**2<sup>ème</sup> cas :**  $b^2 - 4ac = 0$  On obtient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{0}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et l'équation possède une seule solutions :  $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$

**3<sup>ème</sup> cas :**  $b^2 - 4ac < 0$  Comme  $4a^2 > 0$ , on obtient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\text{nombre négatif}}{\text{nombre positif}} < 0$$

ce qui est impossible puisque un carré est toujours positif dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $S = \emptyset$ .

En conséquence, l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  a soit zéro solution, soit une solution et  $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ , soit deux solutions et  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

□

### 3.6.2 Théorème du reste

#### Théorème 3.6.2 : Théorème du reste

Soient  $P(x)$  un polynôme et  $a$  un nombre réel. Alors

$$P(a) = 0 \iff \exists Q(x) \text{ tel que } P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

*Démonstration.* Le symbole  $\iff$  signifie “équivalent”, “si et seulement si”. Autrement dit, il est nécessaire de démontrer que les deux implications  $\implies$  et  $\impliedby$  sont vraies.

**Sens  $\implies$**  Montrons que  $P(a) = 0 \implies \exists Q(x)$  tel que  $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$ .

On suppose donc que  $a$  est un zéro du polynôme, c'est-à-dire que  $P(a) = 0$ . On procède alors à la division euclidienne polynomiale de  $P(x)$  par  $(x - a)$ . Le résultat est de la forme

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$$

où le degré de  $R(x)$  est plus petit que le degré de  $(x - a)$ . Or, le degré de  $(x - a)$  est égal à 1. Ce qui signifie que le degré de  $R(x) = 0$ , autrement dit que  $R(x)$  ne contient pas de termes en la variable  $x$ . En définitive,  $R(x)$  est une constante, un nombre, on peut donc écrire  $R(x) = R$ .

En conséquence,  $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$ . Or, par hypothèse, on a

$$0 = P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R = 0 \cdot Q(a) + R = R$$

On a donc bien que si  $P(a) = 0$  alors  $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R = (x - a) \cdot Q(x)$  pour un certain  $Q(x)$ .

**Sens  $\impliedby$**  Montrons que si  $\exists Q(x)$  tel que  $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) \impliedby P(a) = 0$ . Supposons l'existence d'un polynôme  $Q(x)$  tel que  $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$ . En évaluant le polynôme  $P(x)$  en  $x = a$ , on obtient

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) = 0 \cdot Q(a) = 0$$

□

## 3.6.3 Méthode des déterminants

**Théorème 3.6.3 : Méthode des déterminants**

Si  $D \neq 0$ , alors le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{a une seule solution} \quad S = \left\{ \left( \frac{cb' - c'b}{D}, \frac{ac' - a'c}{D} \right) \right\}$$

où

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Sinon, le système est impossible ou indéterminé.

*Démonstration.* On considère le système  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

D'une part, en multipliant la première équation par  $b'$  et la seconde par  $b$ , puis en soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient

$$\begin{aligned} (ab' - a'b)x &= b'c - bc' \\ \Leftrightarrow x &= \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} = \frac{b'c - bc'}{D} \end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant la première équation par  $a'$  et la seconde par  $a$ , puis en soustrayant la première équation de la deuxième, on obtient

$$\begin{aligned} (ab' - a'b)y &= ac' - a'c \\ \Leftrightarrow y &= \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = \frac{ac' - a'c}{D} \end{aligned}$$

En conséquence de quoi la solution s'écrit

$$S = \left\{ \left( \frac{cb' - c'b}{D}, \frac{ac' - a'c}{D} \right) \right\}$$

Cette solution est unique, à condition que  $D \neq 0$ .

Dans le cas où  $D = 0$  deux situations sont à considérer :

- Si  $cb' - c'b \neq 0$  ou  $ac' - a'c \neq 0$ , alors la présence d'une division par zéro dans au moins une des coordonnées  $x$  et  $y$  conduit à l'absence de solution, c'est-à-dire à l'impossibilité du système.
- Si  $cb' - c'b = 0 = ac' - a'c$ , alors les coordonnées  $x$  et  $y$  sont de la forme  $\frac{0}{0}$  et génèrent par conséquent une infinité de solutions d'où l'indétermination du système.

□



# 4 Fonctions polynomiales de degré 2 et 3

## Sommaire

---

<b>4.1 Généralités sur les fonctions</b>	<b>4-2</b>
<b>4.2 Fonctions polynomiales de degré 2</b>	<b>4-6</b>
4.2.1 Définition	4-6
4.2.2 Représentations graphiques	4-7
4.2.3 Optimum d'une fonction quadratique	4-16
<b>4.3 Fonctions polynomiales de degré 3</b>	<b>4-18</b>
4.3.1 Définition	4-18
4.3.2 Représentations graphiques	4-18
4.3.3 Optimum d'une fonction cubique	4-26
4.3.4 Preuves informelles	4-28

---

## 4.1 Généralités sur les fonctions

---

Le terme mathématique “fonction” apparaît à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle lorsque le calcul différentiel et intégral basé sur la notion de “dérivée” n’en était qu’aux premiers stades de son développement. Cette apparition est donc très récente dans l’histoire de mathématiques.



Fig. 4.1. René Descartes (1596 – 1650)

Le *Discours de la méthode* de René Descartes (1596 – 1650), paru en 1637, est l’un des premiers ouvrages à développer l’idée des coordonnées d’un point du plan, et établit ainsi pour la première fois le lien entre géométrie et algèbre. On relevera toutefois que les premières traces de fonctions et repères cartésiens associés apparurent durant le Moyen Âge au travers des travaux de Nicole Oresme (1320 – 1382), que l’on surnomme, de par ses idées originales et visionnaires, ainsi que ses talents de vulgarisateur, l’“Einstein du 14<sup>ème</sup> siècle”. Dans la représentation suivante qu’il proposait (Fig. 4.2), les *longitudo* et *latitudo* constituaient respectivement l’abscisse et l’ordonnée d’un point donné. Sur la figure Fig. 4.3, il eut la géniale idée de représenter graphiquement la vitesse instantanée du mobile en fonction du temps influençant ainsi l’histoire de la science du mouvement, à savoir la cinématique.

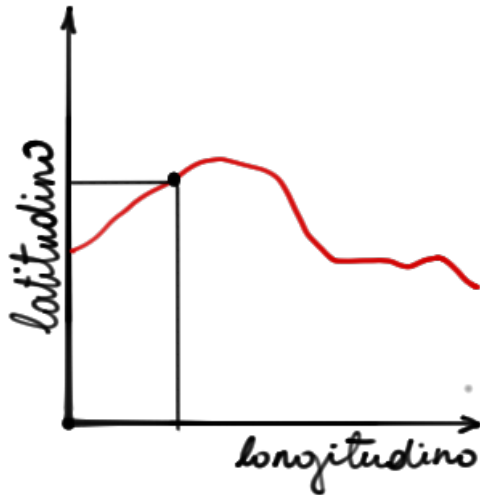


Fig. 4.2. Latitude-longitude d'un point

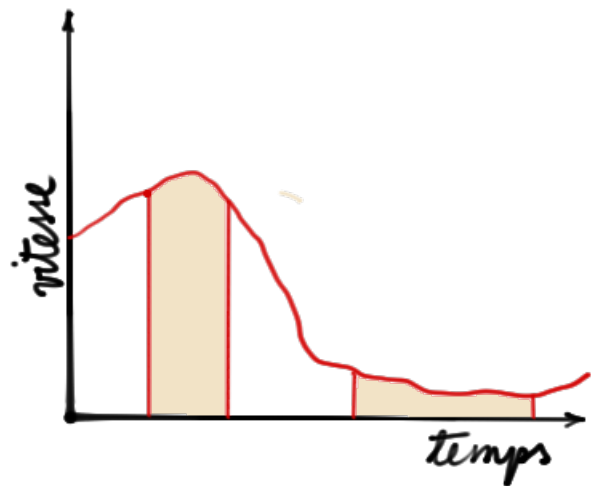


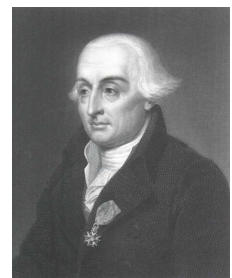
Fig. 4.3. vitesse-temps

Fig. 4.4. Pierre de Fermat  
(1601 – 1665)

La notion d'équation de courbe émerge plus ou moins au même moment que celle de plan cartésien. Pierre de Fermat interprète une équation à deux inconnues  $x$  et  $y$  comme l'expression algébrique d'une courbe du plan. Il exprime ainsi l'idée novatrice qu'une courbe est le "résultat" d'une équation.

La notation  $f$ , quant à elle, n'a été introduite qu'au 18<sup>ème</sup> siècle par Joseph-Louis Lagrange.

La notion de fonction est fondamentale en mathématiques. La maîtrise de cette notion et des concepts qui s'y rattachent permet de décrire les relations entre grandeurs et prend de ce fait une place centrale lors de l'étude des domaines tels que la physique, les sciences sociales, l'économie et la médecine.

Fig. 4.5. Joseph-Louis Lagrange  
(1736 – 1813)

Les mathématiciens ont classé les fonction réelles en différentes catégories : les fonctions **polynomiales** de la forme  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$  avec  $a_i \in \mathbb{R}$  (dont font partie les fonctions affines, constantes, linéaires, quadratiques et cubiques), **algébriques** (qui comprennent, entre autres, les fonctions rationnelles et racine carrée), **transcendantes** (qui incluent notamment les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques) et bien d'autres.

#### 4 Fonctions polynomiales de degré 2 et 3

Dans le cadre de ce chapitre, ainsi que du suivant, nous nous intéresserons aux fonctions **quadratiques** (ou fonctions polynomiales de degré 2), **cubiques** (de degré 3) ainsi qu'aux **suites et séries** (*fonctions discontinues définies sur des valeurs entières positives*), et nous verrons, par le biais de quelques exercices, en quoi leur étude abstraite (*c'est-à-dire d'un point de vue mathématique pur*) permet de servir la résolution de problèmes concrets.

Pour conclure ce point, il est utile d'introduire, préalablement à ce qui va suivre, les concepts de parité et croissance/décroissance d'une fonction.

##### Définition 4.1.1 : Fonction paire

Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est **paire** si pour tout  $x \in I$  on a

$$f(-x) = f(x)$$

##### Exemple

Tel est le cas de la fonction  $f(x) = x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. En effet, pour tout  $x$  on a

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2 = f(x)$$

##### Définition 4.1.2 : Fonction impaire

Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est **impaire** si pour tout  $x \in I$  on a

$$f(-x) = -f(x)$$

##### Exemple

Tel est le cas de la fonction  $f(x) = x^3$  définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. En effet, pour tout  $x$  on a

$$f(-x) = (-x)^3 = (-x) \cdot (-x) \cdot (-x) = -x^3 = -f(x)$$

Graphiquement, on reconnaît une fonction paire par une symétrie de son graphique par rapport à l'axe  $Oy$ . En effet, les ordonnées de 2 points du graphe d'abscisses opposées sont égales. Ce qui signifie qu'ayant déjà dessiné le graphique de  $f$  pour  $x \geq 0$ , nous l'obtenons tout entier en lui ajoutant simplement l'image symétrique par rapport à l'axe  $Oy$ .

Le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine ( $O = (0, 0)$ ). En effet, les ordonnées de 2 points du graphe d'abscisses opposées sont également opposées. Si nous avons déjà dessiné le graphique de  $f$  pour  $x \geq 0$ , nous l'obtenons tout entier en lui adjoignant simplement l'image obtenue après rotation de  $180^\circ$  autour de l'origine.

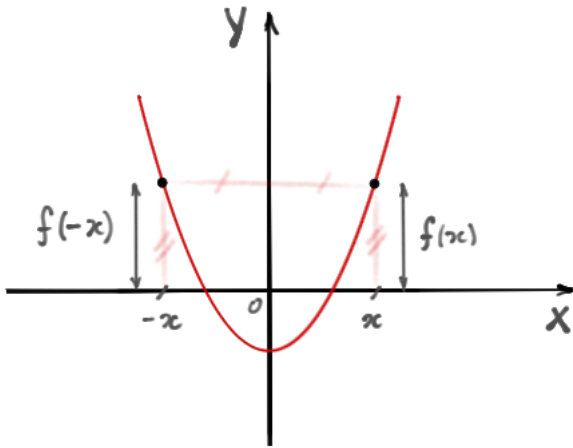


Fig. 4.6. Fonction paire

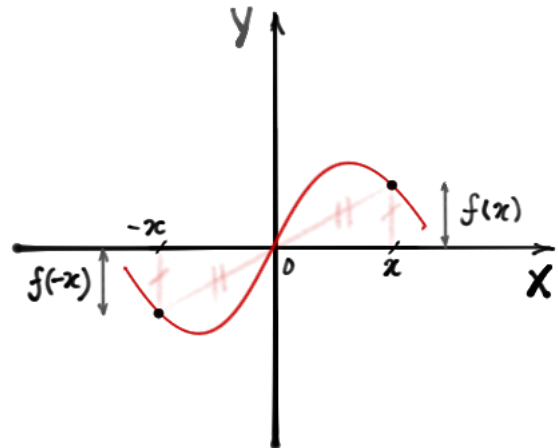


Fig. 4.7. Fonction impaire

Une fonction peut n'être ni paire ni impaire, tel est le cas par exemple de la fonction donnée par

$$f(x) = x - 1$$

car  $f(-x) = -x - 1$  est différent de  $f(x)$  et de  $-f(x)$ .

#### Définition 4.1.3 : Fonction strictement croissante

Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est **strictement croissante** sur l'intervalle  $I$ , si pour tout  $x_1 < x_2$  on a

$$f(x_1) < f(x_2)$$

#### Définition 4.1.4 : Fonction strictement décroissante

Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est **strictement décroissante** sur l'intervalle  $I$ , si pour tout  $x_1 < x_2$  on a

$$f(x_1) > f(x_2)$$

## 4 Fonctions polynomiales de degré 2 et 3

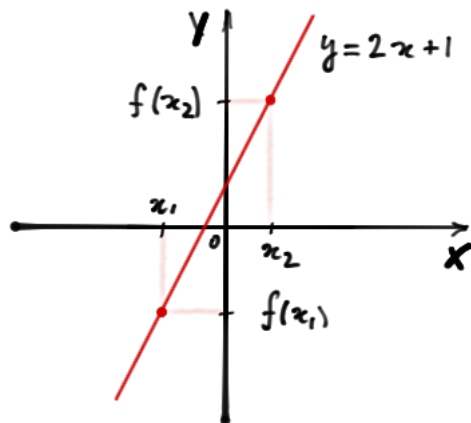


Fig. 4.8. Fonction croissante

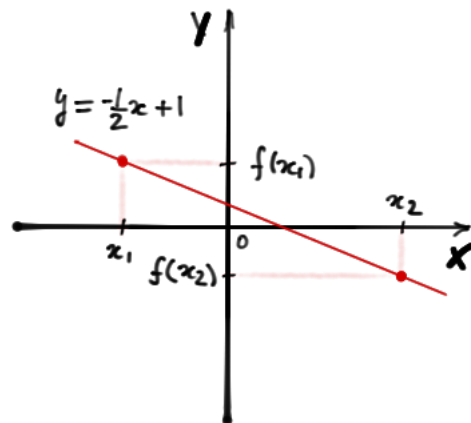


Fig. 4.9. Fonction décroissante

## 4.2 Fonctions polynomiales de degré 2

### 4.2.1 Définition

#### Définition 4.2.1 : Fonction quadratique

La fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres réels avec  $a \neq 0$ , est appelée **fonction quadratique** ou **fonction polynomiale de degré 2**, que l'on note aussi  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ .

#### Exemple

Un corps en chute libre, lâché avec une vitesse initiale égale à  $2 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ , parcourt en  $t$  secondes la distance  $s(t)$  donnée en mètre par

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 + 2t$$

où  $g \approx 9,81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ , l'accélération terrestre.

La fonction  $s(t)$  est une fonction quadratique où  $a = \frac{g}{2}$ ,  $b = 2$  et  $c = 0$ .

### 4.2.2 Représentations graphiques

La représentation graphique, dans un repère cartésien, de la fonction quadratique ainsi définie est une **parabole** passant par le point  $(0, c)$ , appelé "ordonnée à l'origine", et dont l'orientation dépend du paramètre  $a$ , appelé "coefficient dominant". Un point  $(x_1, y_1)$  appartient à cette parabole si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la parabole.

#### Exemple

Considérons la parabole  $f(x) = y = 2x^2 + x - 1$ . On a  $(2; 9) \in f$ , car  $9 = 2 \cdot 2^2 + 2 - 1$ , mais par contre  $(3; 1) \notin f$  puisque  $1 \neq 2 \cdot 3^2 + 3 - 1$ , ce que confirme la lecture graphique de la figure ci-dessous. Ici, la parabole passe bien par le point  $(0, c) = (0, -1)$

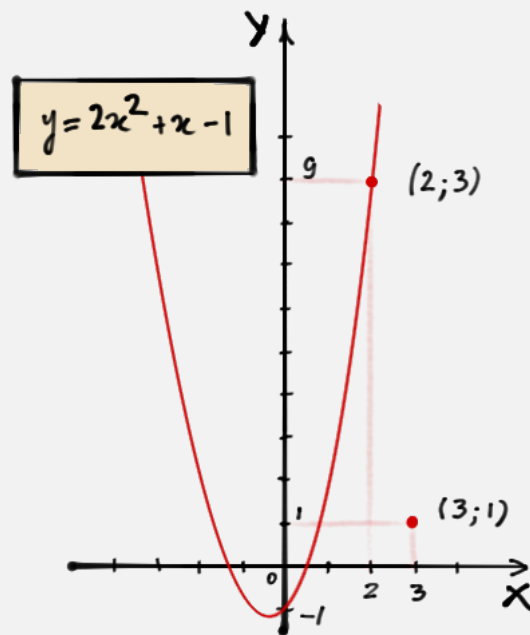


Fig. 4.10. Parabole  $2x^2 + x - 1$

Ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions quadratiques avec un coefficient  $a$  positif, à gauche, et négatif, à droite.

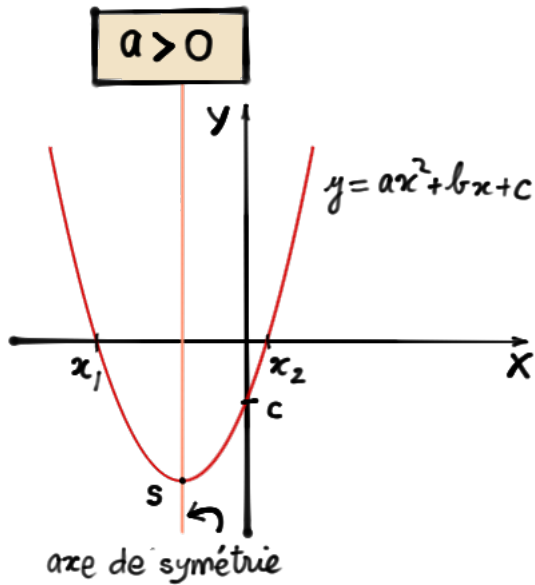


Fig. 4.11. Parabole avec  $a > 0$

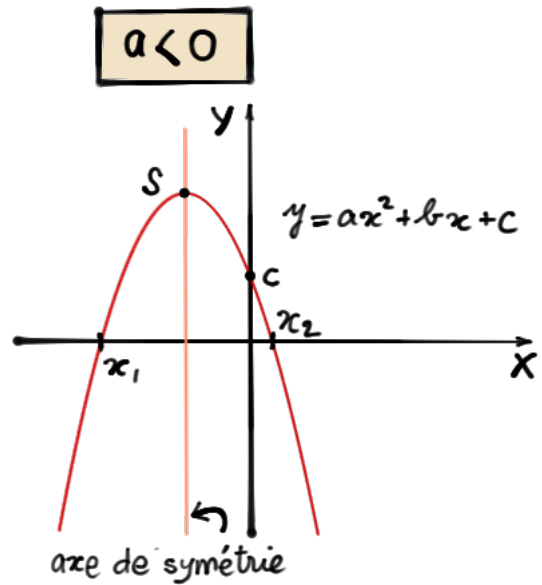


Fig. 4.12. Parabole avec  $a < 0$

**Quelques caractéristiques de la représentation graphique**

— Zéro(s) de la fonction

La ou les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  du ou des points d'intersection de la parabole représentant la fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et de l'axe  $Ox$  sont les zéros de  $f$ . Le nombre de zéros et donc de points d'intersection avec l'axe  $Ox$  est donnée par le signe de  $\Delta = b^2 - 4ac$  :

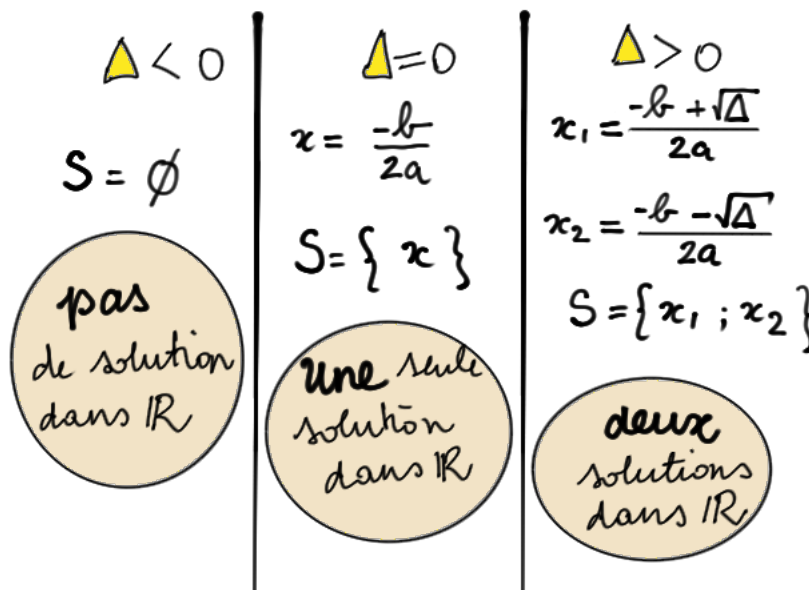


Fig. 4.13. Nombre de solutions selon le signe de  $\Delta$

Il y a donc, aucun point d'intersection lorsque  $f$  n'a pas de zéro, il y a exactement



un point d'intersection lorsque  $f$  a un zéro et il y a deux points d'intersections lorsque  $f$  a deux zéros.

Pour rappel, les zéros de  $f$ , si  $\Delta \geq 0$ , sont donnés par

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

### — Coefficient $c$

Le coefficient  $c$  est égal à l'ordonnée du point d'intersection entre la parabole représentant  $f$  et l'axe  $Oy$ , car  $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ .

### — Coefficient $a$

Le coefficient  $a$  détermine l'écartement et l'orientation de la parabole :

- ◇ si  $a < 0$  la parabole est *ouverte vers le bas*.
- ◇ si  $a > 0$  la parabole est *ouverte vers le haut* ;

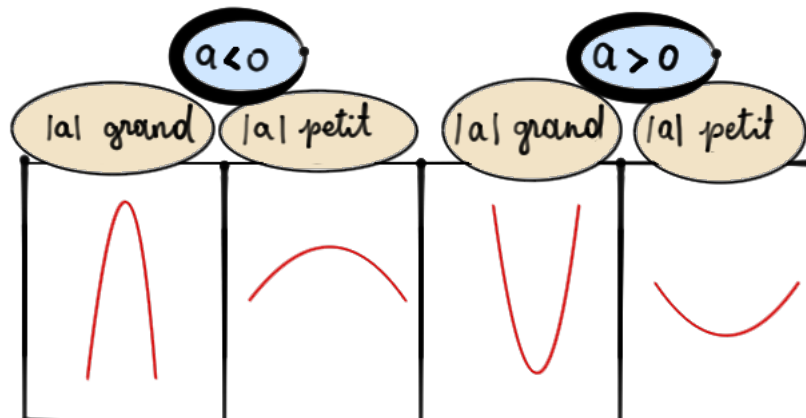


Fig. 4.14. Forme de la parabole selon le coefficient  $a$

La **valeur absolue** de  $a$  notée  $|a|$  (deux barres verticales entourant le nombre) est la valeur de  $a$  sans signe, c'est donc une valeur toujours positive. Lorsqu'elle est petite la courbe de la parabole est plus "large", lorsqu'elle est grande, la courbe de la parabole est plus "étroite".

### — Position de la parabole par rapport à l'axe $Ox$

La position de la parabole représentant la fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  par rapport à l'axe  $Ox$  dépend uniquement de la valeur du coefficient  $a$  et de la valeur de  $\Delta = b^2 - 4ac$  :

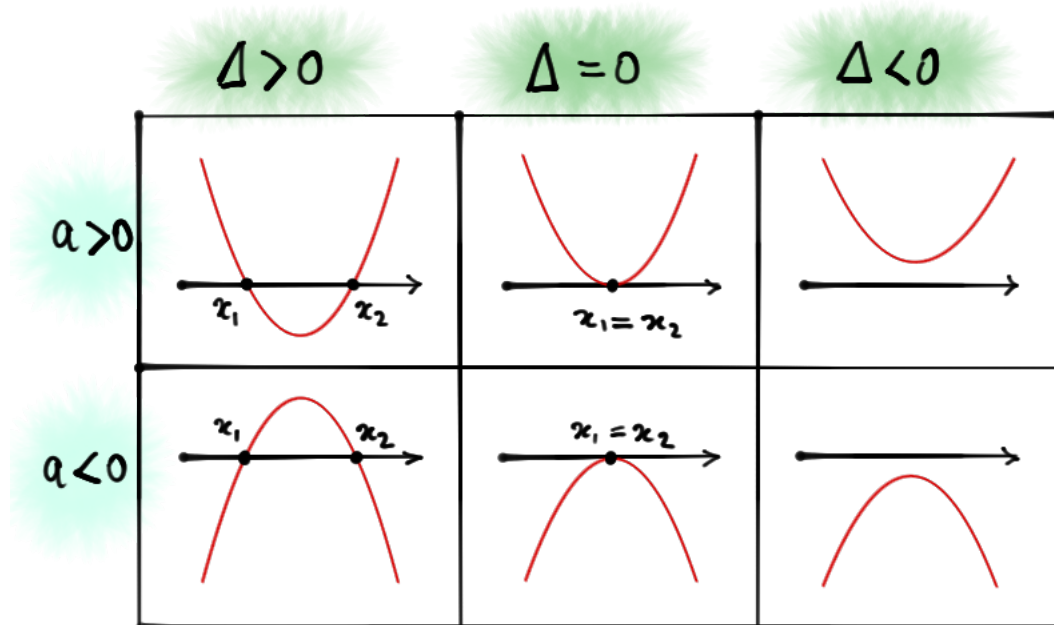


Fig. 4.15. Position de la parabole selon  $a$  et  $\Delta$

— **Tableau des signes**

On construit un tableau faisant apparaître les valeurs pour lesquelles  $f(x)$  change de signe. Par exemple, à la situation ci-dessus où  $a > 0$  et  $\Delta > 0$ , on peut associer le tableau

$x$	$] -\infty; x_1[$	$x_1$	$] x_1; x_2[$	$x_2$	$] x_2; \infty[$
$f(x)$	+	0	-	0	+

Ou encore, à la situation ci-dessus où  $a < 0$  et  $\Delta = 0$ , on peut associer le tableau

$x$	$] -\infty; x_1[$	$x_1 = x_2$	$] x_1; \infty[$
$f(x)$	-	0	-

— **Axe de symétrie**

La parabole représentant  $f(x) = ax^2 + bx + c$  possède un axe de symétrie d'équation

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Autrement dit,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a l'égalité

$$f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - x\right)$$

car, en effet, l'axe de symétrie coupe en son centre le segment reliant deux points de même ordonnée.

*Démonstration.* Il faut chercher une valeur  $i$  telle que  $f(i-x) = f(i+x)$ . Pour ce faire, partant de l'expression fonctionnelle canonique d'une quadratique, c'est-à-dire  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , nous allons évaluer les membres de gauche et de droite de l'égalité puis résoudre par rapport à  $i$ . On a donc

$$\begin{aligned} a(i-x)^2 + b(i-x) + c &= a(i+x)^2 + b(i+x) + c \\ \Leftrightarrow a(i^2 - 2ix + x^2) + bi - bx + c &= a(i^2 + 2ix + x^2) + bi + bx + c \\ \Leftrightarrow -2aix - bx &= 2aix + bx \\ \Leftrightarrow x(-2ai - b) &= x(2ai + b) \\ \Leftrightarrow -2ai - b &= 2ai + b \\ \Leftrightarrow -4ai &= 2b \\ \Leftrightarrow i &= \frac{2b}{-4a} = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

□

### — Sommet

Pour consolider ce qui précède, tout en soignant l'approche de la preuve qui va suivre (*existence d'un sommet*, observons l'expression  $f(x) = y = x^2 + 6x + 10$ . L'équation de l'axe de symétrie vaut  $x = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3$ , ce que l'on peut lire sur la représentation ci-dessous. Maintenant, en complétant le carré (*tout comme nous l'avons fait pour démontrer la formule de Viète*), nous pouvons réécrire l'équation de la courbe sous la forme

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Dès lors, la courbe s'obtient en déplaçant la parabole  $y = ax^2 = 1 \cdot x^2 = x^2$  (car  $a = 1$  dans notre cas) de 3 unités vers la gauche et de 1 unité vers le haut, ce qu'illustre le graphique ci-dessous

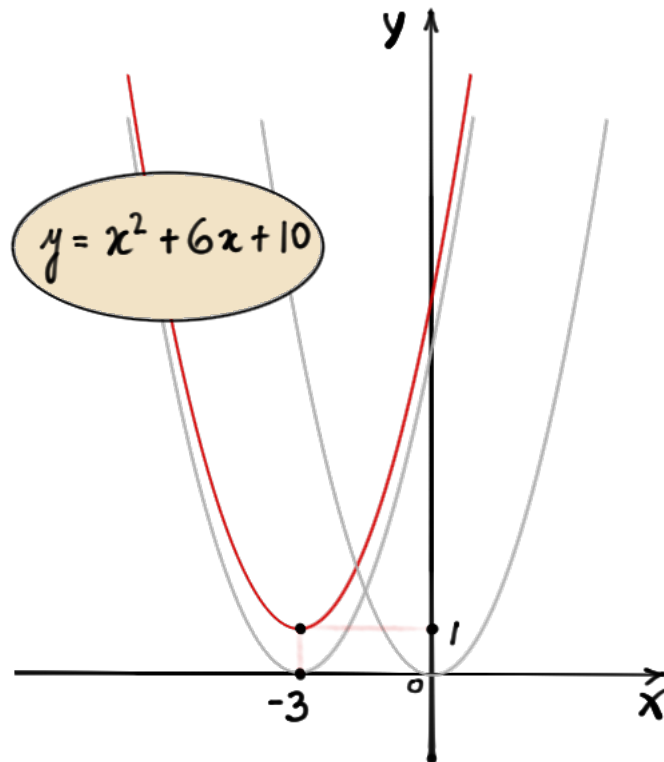


Fig. 4.16. Déplacement du sommet d'une parabole

Il s'agit d'un constat général, à savoir que toute parabole est issue d'une translation horizontale, puis verticale (ou inversement) de la parabole canonique d'équation  $f(x) = ax^2$ .

**Définition 4.2.2 : Sommet d'une parabole**

On définit le **sommet  $S$  d'une parabole** comme étant :

- le point le plus bas (d'ordonnée minimale) de la courbe si elle est ouverte vers le haut ;
- le point le plus haut (d'ordonnée maximale) de la courbe si elle est ouverte vers le bas.

Pour déterminer l'existence et les coordonnées du sommet  $S$  d'une parabole représentant la fonction quadratique  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ), on transforme tout d'abord l'expression fonctionnelle de  $f$  :

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\
 &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
 \end{aligned}$$

En posant  $p = -\frac{b}{2a}$  et  $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ , l'expression fonctionnelle de la fonction quadratique  $f$  peut s'écrire :

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Si  $a > 0$ , la parabole est ouverte vers le haut et le sommet est le point d'ordonnée minimale. Or,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , l'expression  $a \cdot (x - p)^2$  est positive ou nulle (produit d'un nombre positif et d'un nombre positif ou nul) et  $q$  est un nombre (constant).

Ainsi, on obtient que :

$$f(x) = a(x - p)^2 + q \geq q$$

La valeur minimale de  $f$  est donc  $q$  et elle est atteinte pour  $x = p$ . De plus, comme  $f(p) = q$ , les coordonnées du sommet  $S = (p, q)$ .

Si  $a < 0$ , la parabole est ouverte vers le bas et le sommet est le point d'ordonnée maximale. Or,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , l'expression  $a \cdot (x - p)^2$  est négative ou nulle (produit d'un nombre négatif et d'un nombre positif ou nul). Ainsi, on obtient que :

$$f(x) = a(x - p)^2 + q \leq q$$

La valeur maximale de  $f$  est donc  $q$  et elle est atteinte pour  $x = p$ . Les coordonnées du sommet sont donc également  $S = (p, q)$ .

En conclusion, quelle que soit la valeur de  $a$ , le sommet de la parabole représentant  $f$  est le point

$$S = \left( -\frac{b}{2a}; f \left( -\frac{b}{2a} \right) \right)$$

Ce qui est naturel puisque le sommet de la parabole repose sur l'axe de symétrie (*observer toute courbe parabolique pour s'en convaincre*). Et donc, l'évaluation de  $f(x)$  en  $x = -\frac{b}{2a}$  va retourner la valeur de la coordonnée  $y$  du sommet ! On notera que cette dernière vaut

#### 4 Fonctions polynomiales de degré 2 et 3

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \dots = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

et ce quelle que soit la fonction quadratique de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

On relèvera pour terminer que le sommet est un point de rupture locale dans la croissance ou décroissance d'une fonction. Autrement dit, en lisant le graphe de gauche à droite, si la fonction est croissante (resp. décroissante) jusqu'au sommet, elle sera décroissante (resp. croissante) une fois le sommet franchi.

#### Représentation graphique à partir de l'expression fonctionnelle

On peut mettre en oeuvre la méthode suivante pour dessiner (tracer), dans un repère cartésien, la représentation graphique d'une fonction quadratique définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

##### Méthode

1. Déterminer le ou les zéros de  $f$  en résolvant l'équation

$$f(x) = 0$$

ce qui nous permet d'obtenir les points de la forme  $(x_i ; 0)$  du graphe.

2. Observer l'orientation de la parabole à l'aide du signe du coefficient  $a$ .
3. Établir un tableau des signes.
4. Calculer les coordonnées du sommet  $S$  de la parabole :

$$S = \left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

5. Calculer quelques couples

$$(x ; f(x))$$

du graphe  $f$  en choisissant  $x$  dans  $\mathbb{R}$  ; un tableau des valeurs peut être utile.

6. Dessiner sous la forme d'un trait discontinu, dans le repère cartésien, l'axe de symétrie verticale d'équation

$$x = -\frac{b}{2a}$$

7. Reporter, dans le repère cartésien, les points correspondant aux zéros de  $f$ , le sommet de la parabole, le point  $(0 ; c)$  et les points du graphe calculés en 5 et dessiner les points symétriques correspondants (par rapport à l'axe représenté en 4).

8. Relier les points dessinés dans le plan  $Oxy$  de sorte à obtenir une parabole.

**Exemple**

Soit la fonction quadratique  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ .

1. On détermine tout d'abord les deux zéros de  $f$ . Ici,

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) = 9 = 3^2$$

On a donc

$$x_1 = \frac{1 - 3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -2 \quad x_2 = \frac{1 + 3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

2. On observe que la parabole est ouverte vers le haut puisque  $a > 0$ .

3. Le tableau des signes prend la forme

$x$	$] -\infty ; -2[$	$-2$	$] -2 ; 4[$	$4$	$] 4 ; \infty[$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

4. Comme  $-\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$ , les coordonnées du sommet sont données par

$$S = (1 ; f(1)) = (1 ; -\frac{9}{2})$$

5. On calcule ensuite quelques points du graphe :

$$(2 ; f(2)) = (2 ; -4), \quad (5 ; f(5)) = (5 ; \frac{7}{2}), \dots$$

6. L'équation de l'axe de symétrie est  $x = 1$ .

7.

8. On reporte ensuite ces informations dans un repère cartésien pour obtenir la représentation graphique ci-dessous.

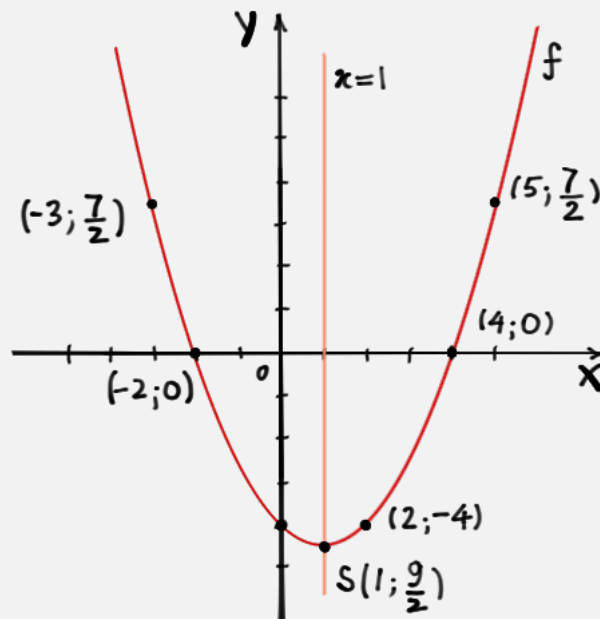


Fig. 4.17. Graphique de la parabole  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

On notera au passage que l'on peut reconstruire l'expression fonctionnelle de la parabole tracée en s'inspirant de la réécriture sous la forme  $f(x) = a(x - p)^2 + q$  vue plus haut, en remplaçant  $a$  par  $\frac{1}{2}$  (... pourquoi ?),  $p$  par 1 et  $q$  par  $-\frac{9}{2}$ .

### 4.2.3 Optimum d'une fonction quadratique

Comme la représentation graphique de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , pour  $a \neq 0$ , est une parabole, on peut utiliser l'ordonnée du sommet,  $f(-\frac{b}{2a})$ , pour déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction quadratique. En effet, puisque la parabole est ouverte vers le bas si  $a < 0$ , et vers le haut si  $a > 0$ , cette valeur de la fonction est respectivement le maximum ou le minimum de  $f$ .

L'exemple qui suit fournit une application pratique de ce qui précède.

#### Exemple

On dispose de 288 mètres de clôture grillagée pour construire 6 enclos pour un zoo selon le plan ci-dessous. On aimerait déterminer les dimensions à donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.



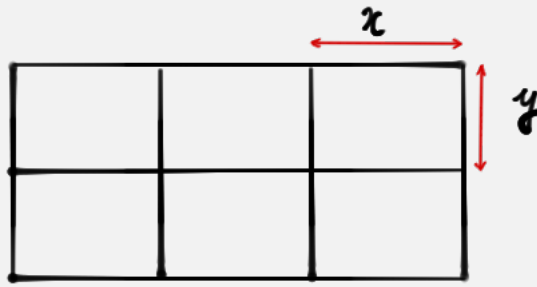


Fig. 4.18. Plan pour la construction des enclos

Sur ce dessin, on définit deux variables :

$x$  : la largeur d'un enclos ;

$y$  : la longueur d'un enclos.

L'aire su sol est donnée par  $Aire = 3x \cdot 2y$ . Or, comme on ne dispose que de 288 mètres de clôture, il existe un lien entre  $x$  et  $y$ , donné par l'équation

$$9x + 8y = 288$$

En transformant un peu cette équation, on obtient que

$$y = \frac{288 - 9x}{8}$$

On peut alors exprimer l'aire uniquement en fonction de  $x$ . On définit ainsi une fonction  $A(x)$  donnée par

$$A(x) = 3x \cdot 2 \cdot \frac{288 - 9x}{8} = 216x - \frac{27}{4}x^2$$

On doit maintenant déterminer le maximum de cette fonction. Comme c'est une fonction du deuxième degré, on sait que la deuxième coordonnée du sommet donnera le maximum (le coefficient devant  $x^2$  est négatif) et que la première coordonnée sera la largeur qui produira ce maximum.

La première coordonnée du sommet est donnée par

$$s_1 = x_{\max} = -\frac{216}{2 \cdot \left(-\frac{27}{4}\right)} = 16$$

et la deuxième par

$$s_2 = A(16) = 1728$$

## 4 Fonctions polynomiales de degré 2 et 3

La longueur qui correspond à une largeur de 16 mètres est :

$$y_{\max} = \frac{288 - 9 \cdot 16}{8} = 18$$

Un enclos a donc comme dimension 16 m  $\times$  18 m et la surface recouverte est de 1728 m.

### 4.3 Fonctions polynomiales de degré 3

#### 4.3.1 Définition

##### Définition 4.3.1 : Fonction cubique

La fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des nombres réels avec  $a \neq 0$ , est appelée **fonction cubique** ou **fonction polynomiale de degré 3**.

#### 4.3.2 Représentations graphiques

On donne ci-dessous deux représentations graphiques, parmi tant d'autres, de fonctions polynomiales de degré 3 avec un coefficient dominant  $a$  positif, à gauche, ou négatif, à droite et passant par le point  $(0 ; d)$  et dont l'orientation dépend du paramètre  $a$ .

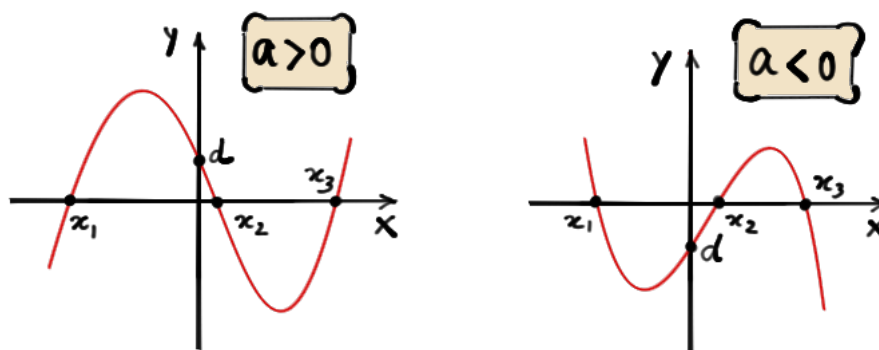


Fig. 4.19. Graphique de deux cubiques dont l'orientation dépend de  $a$

Un point  $(x_i ; y_i)$  appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe.

## Exemple

Considérons la courbe ci-dessous, d'équation

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

On a  $(4 ; 6) \in f$ , car  $6 = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4 - 6$ , mais  $(-2 ; 2) \notin f$  étant donné que  $2 \neq (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 11 \cdot (-2) - 6$ . La courbe passe bien par le point  $(0 ; a) = (0 ; -6)$ .

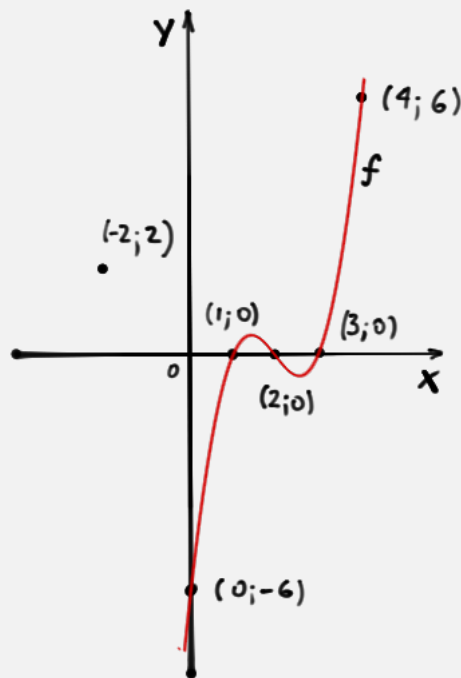


Fig. 4.20. Graphique de  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

## Quelques caractéristiques de la représentation graphique

### 1. Zéro(s) de la fonction

La ou les abscisse  $x_i$  du ou des points d'intersection de la courbe représentant la fonction polynômiale  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  et de l'axe  $Ox$  sont les zéros de  $f$ . Pour les déterminer, on utilise les outils de résolution étudiés au chapitre précédent : division euclidienne, critère de divisibilité par  $(x - a)$ , théorème du reste, théorème des diviseurs. Une cubique possède 1, 2 ou 3 racines, ce que l'on peut illustrer graphiquement par ces trois exemples :

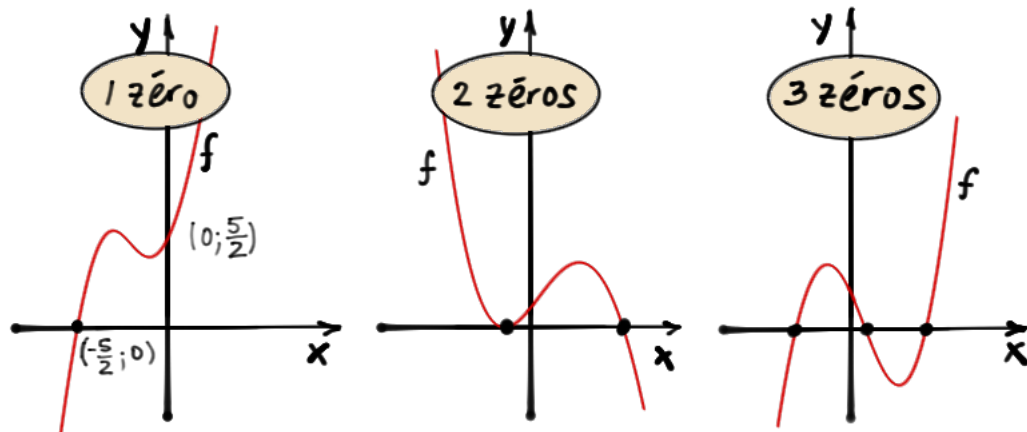


Fig. 4.21. Les zéros d'une cubique :  $x$  tels que  $f(x) = 0$

Dans deux des trois cas présentés ci-dessus, le coefficient  $a$  est manifestement positif (*sauf pour le cas du centre*. On remarque que la courbe intersecte toujours l'axe  $Ox$ , que le coefficient  $a$  soit positif ou négatif. On peut également souligner que la présence d'une seule solution provient du fait que le polynôme de degré 2, résultat de la factorisation de la cubique, est irréductible ( $\Leftrightarrow \Delta < 0$ ). Par exemple, l'expression fonctionnelle du graphe de gauche est  $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$  ; en divisant par  $(x + \frac{5}{2})$  on obtient  $(x^2 + 1)$  c'est-à-dire la factorisation  $f(x) = (x + \frac{5}{2})(x^2 + 1)$  où  $(x^2 + 1)$  ne peut s'annuler dans  $\mathbb{R}$ .

## 2. Coefficient $d$

Le coefficient  $d$  est égal à l'ordonnée du point d'intersection entre la courbe représentant  $f$  et l'axe  $Oy$  car  $f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d$ . Ce coefficient est également appelé l'**ordonnée à l'origine**.

## 3. Coefficient dominant $a$

Comme vu plus haut, le coefficient  $a$  détermine l'orientation de la courbe représentant  $f$  :

- si  $a > 0$  la courbe représentant  $f$  est *au-dessous* de l'axe  $Ox$  pour des valeurs de  $x$  suffisamment petites et *au-dessus* de l'axe  $Ox$  pour des valeurs de  $x$  suffisamment grandes ;
- si  $a < 0$  la courbe représentant  $f$  est *au-dessus* de l'axe  $Ox$  pour des valeurs de  $x$  suffisamment petites et *au-dessous* de l'axe  $Ox$  pour des valeurs de  $x$  suffisamment grandes.

## 4. Tableau des signes

À l'aide des zéros ainsi que des coefficients dont on vient de traiter, le tableau s'établit de manière analogue à celle vue au point 4.2.2 traitant des paraboles.

Par exemple, reprenant le cas de la fonction  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  vue plus haut, nous pouvons dresser le tableau de la manière suivante :

$x$	$] -\infty ; 1[$	1	$] 1 ; 2[$	2	$] 2 ; 3[$	3	$] 3 ; \infty[$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

## 5. Centre de symétrie

Une fonction cubique possède **toujours** un centre de symétrie (noté  $C_s$ ) situé sur la courbe elle-même. Dans le cas particulier d'une fonction impaire, ce centre correspond à l'origine (c'est-à-dire  $C_s = (0 ; 0)$ ), comme vu en début de chapitre.

Ci-dessous, en exemple, la représentation graphique de  $f(x) = -0,5x^3 + 2x^2 - x + 1$  et de son point de symétrie centrale de coordonnées  $(1,33 ; 2,04)$ .

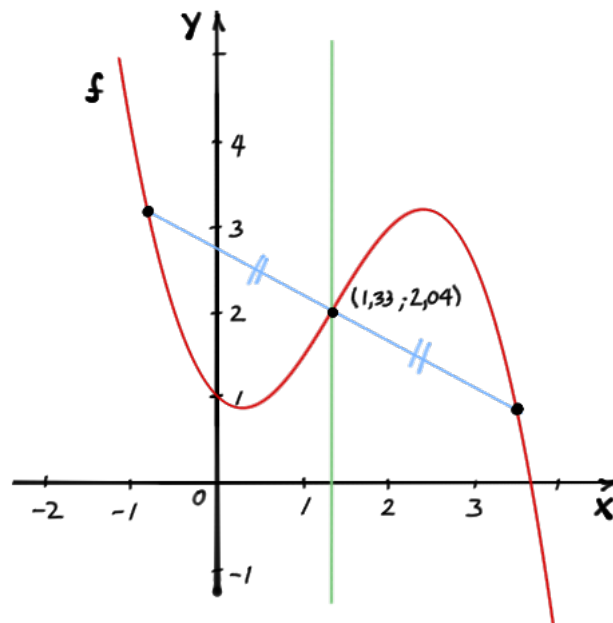


Fig. 4.22. La cubique  $f(x) = -0,5x^3 + 2x^2 - x + 1$

Comme on peut le deviner sur le dessin, par rotation de  $180^\circ$  autour du centre de symétrie, la partie du graphe située à droite de la droite d'équation  $x = 1,33$  va venir se superposer sur la partie du graphe située à gauche.

Une autre manière de le voir est de considérer que la symétrie centrale transforme tout point de la courbe en un autre point sur la courbe tel que le centre de symétrie soit situé au centre du segment reliant ces deux points.

#### 4 Fonctions polynomiales de degré 2 et 3

Plus précisément, l'abscisse du centre de symétrie se trouve<sup>1</sup> en

$$x = -\frac{b}{3a}$$

et l'ordonnée en

$$y = f\left(-\frac{b}{3a}\right)$$

Autrement dit,

$$C_s = \left(-\frac{b}{3a} ; f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$$

où

$$f\left(-\frac{b}{3a}\right) = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = \dots = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^2}$$

On remarquera que seul le signe du numérateur de cette expression est déterminant pour fournir une information sur la position de  $C_s$  par rapport à  $Ox$ , étant donné que le dénominateur est toujours positif.

Si l'on reprend l'exemple du début de page, on a bien :

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{2}{3 \cdot (-0,5)} = \frac{4}{3} \approx 1,33 \\ \frac{2 \cdot 2^3 + 27 \cdot (-0,5)^2 \cdot 1 - 9 \cdot (-0,5) \cdot 2 \cdot (-1)}{27 \cdot (-0,5)^2} \approx 2,04 \end{array} \right\} C_s = (1,33 ; 2,04)$$

#### 6. Sommets

L'allure générale du graphe d'une cubique est non seulement influencée par le coefficient dominant  $a$ , tel qu'évoqué, mais aussi par la présence ou non de sommets. Les sommets existent si  $b^2 - 3ac > 0$  et leurs positions sont données par

$$S_{1,2} = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} ; f\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)\right)$$

Si  $b^2 - 3ac \leq 0$  alors le graphe ne comporte pas de sommet.

#### Exemple

La fonction  $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 1$ , représentée ci-dessous, et pour laquelle  $b^2 - 3ac = 1^2 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 = 7 > 0$ , possède deux sommets d'abscisses respectives

1. La preuve de ce résultat sera donnée sous forme d'article.

$$\frac{-1 + \sqrt{7}}{-3} \approx -0,55 \quad \text{et} \quad \frac{-1 - \sqrt{7}}{-3} \approx 1,22$$

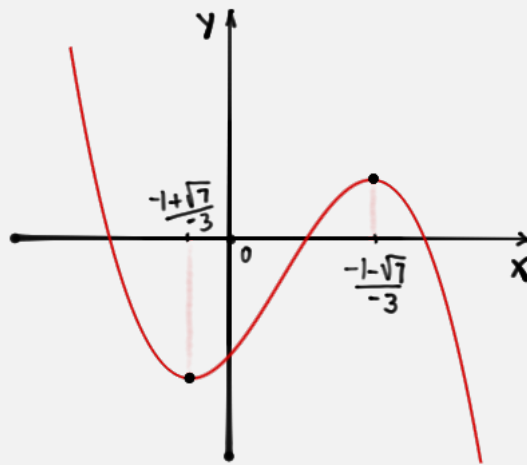


Fig. 4.23. La cubique  $f(x) = -x^3 + x^2 + 2x - 1$

Tandis que la fonction  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$  ne possède aucun sommet puisque  $b^2 - 3ac = (-2)^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = -2 < 0$ ; ce que l'on peut constater à la lecture du graphique ci-dessous

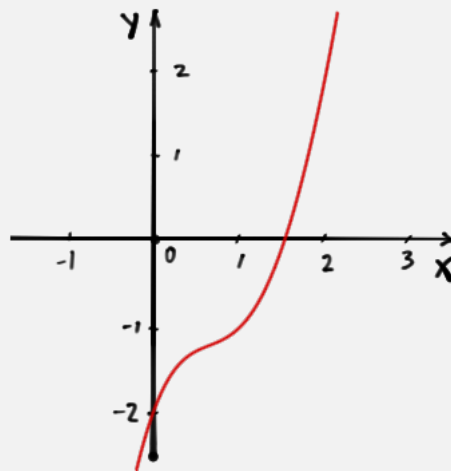


Fig. 4.24. La cubique  $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

### Représentation graphique à partir de l'expression fonctionnelle

On peut mettre en oeuvre la méthode suivante pour dessiner (tracer) de façon précise, dans un repère cartésien, la représentation graphique d'une fonction cubique définie par  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .

**Méthode**

1. Déterminer le ou les zéros de  $f$  en résolvant l'équation  $f(x) = 0$ , ce qui nous permet d'obtenir les points de la forme  $(x ; 0)$  du graphe.
2. Observer l'orientation de la parabole à l'aide du signe du coefficient  $a$ .
3. Établir un tableau des signes.
4. Si  $b^2 - 3ac > 0$ , calculer les coordonnées des sommets de la cubique :

$$S_{1,2} = \left( \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} ; f \left( \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \right) \right)$$

5. Calculer les coordonnées du centre de symétrie centrale.
6. Calculer quelques couples  $(x ; f(x))$  supplémentaires du graphe de  $f$  en choisissant  $x$  dans  $\mathbb{R}$  ; un tableau des valeurs peut être utile.
7. Dessiner sous la forme d'un trait discontinu, dans le repère cartésien, l'axe passant par le centre de symétrie et d'équation  $x = -\frac{b}{3a}$ .
8. Reporter, dans le repère cartésien, les points correspondant aux zéros de  $f$ , les sommets de la cubique, le centre de symétrie, le point  $(0 ; d)$  et les points du graphe calculés en 6.
9. Relier les points dessinés dans le plan  $Oxy$  de sorte à respecter les informations données par le tableau des signes.

**Exemple**

Soit la cubique de degré 3 donnée par  $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ . On détermine tout d'abord les trois zéros de  $f$  en résolvant l'équation  $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ .

On voit très vite que  $-1$  est une solution ce qui nous permet de factoriser l'expression une fois la division euclidienne par  $(x + 1)$  effectuée. On obtient  $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$  et donc les 3 zéros sont  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -1$  et  $x_3 = 2$ .

Étant donné que  $a = 1 > 0$  la cubique vivra au-dessous de  $Ox$  pour des valeurs de  $x$  suffisamment petites et au-dessus de  $Ox$  pour des valeurs de  $x$  suffisamment grandes. On construit ensuite le tableau des signes de  $f$  :



$x$	$] -\infty ; -2[$	$-2$	$] -2 ; -1[$	$-1$	$] -1 ; 2[$	$2$	$] 2 ; \infty[$
$(x + 2)$	-	0	+	+	+	+	+
$(x + 1)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x - 2)$	-	-	-	-	-	0	+
${}^1f(x)$	-	0	+	0	-	0	+
Position courbe/axe	Au-dessous		Au-dessus		Au-dessous		Au-dessus

1. Le signe de  $f(x)$  est celui du produit des signes des facteurs  $(x + 1)$ ,  $(x + 2)$  et  $(x - 2)$

On a  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = -4$  et  $b^2 - 3ac > 0$ . En conséquence :

- **sommets** :  $S_1 = (-1,54 ; 0,88)$  et  $S_2 = (0,87 ; -6,06)$ , car

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3} \approx 0,87 \text{ et } -1,54$$

puis les ordonnées

$$f(0,87) \approx -6,06 \text{ et } f(-1,54) \approx 0,88$$

- **centre de symétrie** :  $C_s = (-0,33 ; -2,60)$ , car

$$-\frac{b}{3a} = -\frac{1}{3} \approx -0,33, \text{ puis } f(-0,33) \approx -2,60$$

On calcule des valeurs supplémentaires pour plus de précision :

$$f(-2,5) \approx -3,38 \text{ et } f(2,5) \approx 7,88$$

On reporte enfin les points

$$(-2 ; 0), (-1 ; 0), (2 ; 0), (0 ; -4), (-1,54 ; 0,88),$$

$$(0,87 ; -6,06), (-0,33 ; -2,60), (-2,5 ; -3,38), (2,5 ; 7,88)$$

dans un repère cartésien et on les relie en tenant compte de la position de la courbe par rapport à l'axe  $Ox$  donnée dans le tableau des signes.

Ci-dessous la représentation graphique de cette cubique.

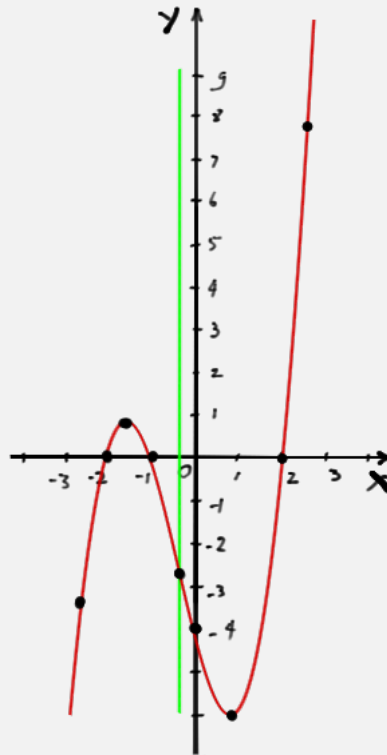


Fig. 4.25. La cubique  $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

### 4.3.3 Optimum d'une fonction cubique

La représentation graphique de  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , pour  $a \neq 0$ , permet, dans la mesure où  $b^2 - 3ac > 0$ , une utilisation de l'ordonnée des sommets

$$f\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right)$$

pour déterminer les maximum et minimum locaux (c'est-à-dire pour un intervalle donné) d'une fonction cubique.

#### Exemple

On dispose d'un morceau de carton carré de 12 cm de côté dans les coins duquel on va découper des carrés de  $x$  cm de côté afin de pouvoir relever les bords et construire une boîte sans couvercle. Il s'agit maintenant de déterminer les dimensions que la boîte doit avoir pour que le volume soit maximal.

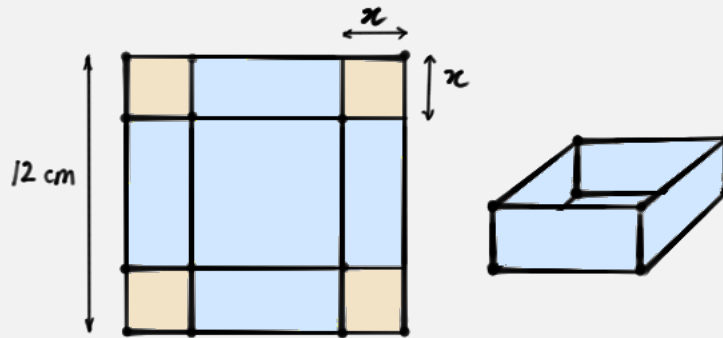


Fig. 4.26. Construction d'une boîte sans couvercle

Il s'agit tout d'abord d'exprimer le volume en fonction de la longueur  $x$  que l'on découpera en chaque coin. On pose au préalable les expressions de la largeur, la longueur et la hauteur de la "future" boîte en fonction de  $x$ . Ainsi, on a

$$12 - 2x = \text{largeur} = \text{profondeur} \text{ et } x = \text{hauteur}$$

Le volume s'exprime donc comme

$$V(x) = x(12 - 2x)(12 - 2x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

Comme  $b^2 - 3ac = 576 > 0$  (*les sommets existent !*) et  $a > 0$ , le premier sommet rencontré, en parcourant le graphe de la cubique  $V$  de gauche à droite, est un maximum. Autrement dit, il faut s'intéresser au sommet dont l'abscisse ( $x$ !) est, parmi les deux valeurs

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

la plus petite. On a  $a = 4$ ,  $b = -48$  et  $c = 144$  ce qui implique que

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} = \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$$

cette dernière valeur étant évidemment rejetée. En conclusion de quoi, les dimensions recherchées sont

$$l \times p \times h = 8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$$

<sup>1</sup>pour un volume maximal

$$V(2)_{\max} \approx 128 \text{ cm}^3$$

1. Attention 8 cm provient de  $12 - 2x$

## 4.3.4 Preuves informelles

## Axe de symétrie - Fonction de degré 2

Il faut chercher une valeur  $i$  telle que

$$f(i - x) = f(i + x)$$

Pour ce faire, partant de l'expression fonctionnelle canonique d'une quadratique, c'est-à-dire

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

nous allons évaluer les membres de gauche et de droite de l'égalité puis résoudre par rapport à  $i$ . On a donc

$$\begin{aligned} a(i - x)^2 + b(i - x) + c &= a(i + x)^2 + b(i + x) + c \\ \Leftrightarrow a(i^2 - 2ix + x^2) + bi - bx + c &= a(i^2 + 2ix + x^2) + bi + bx + c \\ \Leftrightarrow -2aix - bx &= 2aix + bx \\ \Leftrightarrow x(-2ai - b) &= x(2ai + b) \\ \Leftrightarrow -2ai - b &= 2ai + b \\ \Leftrightarrow -4ai &= 2b \\ \Leftrightarrow i &= \frac{2b}{-4a} = -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

## Sommet - Fonction de degré 2

Pour déterminer l'existence et les coordonnées du sommet  $S$  d'une parabole représentant la fonction quadratique

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0$$

on transforme tout d'abord l'expression fonctionnelle de  $f$  :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left( x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

En posant  $p = -\frac{b}{2a}$  et  $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ , l'expression fonctionnelle de la fonction quadratique  $f$  peut s'écrire

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Si  $a > 0$ , la parabole est ouverte vers le haut et le sommet est le point d'ordonnée minimale. Or,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , l'expression  $a \cdot (x - p)^2$  est positive ou nulle (produit d'un nombre positif et d'un nombre positif ou nul) et  $q$  est un nombre (constant).

Ainsi, on obtient que

$$f(x) = a(x - p)^2 + q \geq q$$

La valeur minimale de  $f$  est donc  $q$  et elle est atteinte pour  $x = p$ . De plus, comme  $f(p) = q$ , les coordonnées du sommet sont

$$S = (p, q)$$

Si  $a < 0$ , la parabole est ouverte vers le bas et le sommet est le point d'ordonnée maximale. Or,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , l'expression  $a \cdot (x - p)^2$  est négative ou nulle (produit d'un nombre négatif et d'un nombre positif ou nul). Ainsi, on obtient que

$$f(x) = a(x - p)^2 + q \leq q$$

La valeur maximale de  $f$  est donc  $q$  et elle est atteinte pour  $x = p$ . Les coordonnées du sommet sont donc également

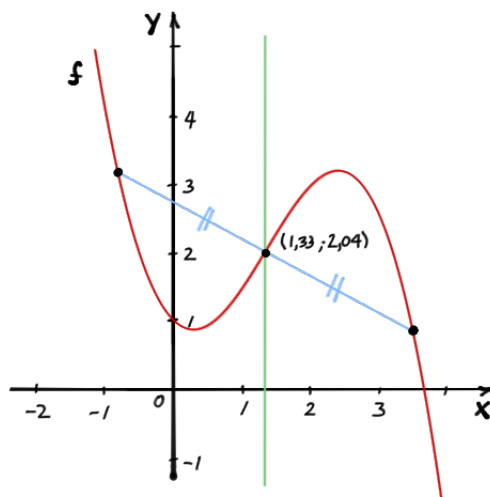
$$S = (p, q)$$

### Centre de symétrie - Fonction degré 3

Soit  $C_i = (i, f(i))$  le centre de symétrie de coordonnées  $i$  (axe des abscisses) et  $f(i)$  (axe des ordonnées). On a nécessairement la relation

$$\frac{f(i - x) + f(i + x)}{2} = f(i)$$

étant donné que l'ordonnée du centre de symétrie se trouve au milieu du segment reliant les ordonnées des deux points opposés par symétrie centrale (cf. illustration ci-dessous pour fixer les idées).



#### 4 Fonctions polynomiales de degré 2 et 3

La relation peut se réécrire sous la forme

$$f(i-x) + f(i+x) = 2 \cdot f(i)$$

Il suffit désormais, d'évaluer les termes des deux membres de l'égalité, à l'aide de la forme canonique de l'expression représentative d'un cubique (c'est-à-dire  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ) puis d'isoler  $i$  afin d'en déterminer la valeur. On a donc

$$\begin{aligned} & a(i-x)^3 + b(i-x)^2 + c(i-x) + d + a(i+x)^3 + b(i+x)^2 + c(i+x) + d \\ & \qquad \qquad \qquad = 2(ai^3 + bi^2 + ci + d) \\ \Leftrightarrow & a(i^3 - 3i^2x + 3ix^2 - x^3) + b(i^2 - 2ix + x^2) + ci - cx + d + \\ & a(i^3 + 3i^2x + 3ix^2 + x^3) + b(i^2 + 2ix + x^2) + ci + cx + d = 2ai^3 + 2bi^2 + 2ci + 2d \\ \Leftrightarrow & a(2i^3 + 6ix^2) + b(2i^2 + 2x^2) + 2ci + 2d = 2ai^3 + 2bi^2 + 2ci + 2d \\ \Leftrightarrow & \qquad \qquad \qquad 6aix^2 + 2bx^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \qquad \qquad \qquad 6aix^2 = -2bx^2 \\ \Leftrightarrow & \qquad \qquad \qquad i = \frac{-2bx^2}{6ax^2} = -\frac{b}{3a} \end{aligned}$$

#### Sommets - Fonction de degré 3

L'idée de la preuve (sans recours à la notion de "dérivée" dépassant le cadre de ce cours) consiste à considérer qu'une fonction cubique peut-être translatée verticalement vers le bas d'une certaine quantité  $h$  de manière à ce que l'un des deux sommets se retrouve sur l'axe des abscisses et qu'ainsi la coordonnée  $x$  de ce sommet soit également un zéro double de la cubique translatée; pour la suite, nous noterons  $w$  ladite coordonnée  $x$ , et  $v$  le zéro simple ( $v$  n'est nullement la coordonnée de l'autre sommet!). On remarquera également, par construction, que  $h$  est la coordonnée  $y$  du sommet de départ (lequel pouvant être arbitrairement n'importe lequel des deux sommets!).

Autrement dit, avec  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  nous avons que

$$f(x) - h = ax^3 + bx^2 + cx + d - h$$

s'annule doublement en  $x = w$ , ce qui signifie que  $f(x) - h$  peut se réécrire, selon le théorème fondamental de l'algèbre, sous la forme  $f(x) - h = \tilde{a}(x-w)^2(x-v)$ .

Ou encore

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - h = \tilde{a}(x-w)^2(x-v)$$

En développant le membre de droite, on obtient :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - h = \tilde{a}x^3 - \tilde{a}(v+2w)x^2 + \tilde{a}(2vw+w^2)x - \tilde{a}vw^2$$

Comme les deux membres représentent le même polynôme, on a nécessairement quelle

$$a = \tilde{a} \quad (1)$$

$$b = -\tilde{a}(v + 2w) \quad (2)$$

$$c = \tilde{a}(2vw + w^2) \quad (3)$$

$$d - h = -\tilde{a}vw^2 \quad (4)$$

qui est un système de 4 équations à 3 inconnues  $v, w$  et  $h$ . On isole  $v$  dans (2) :

$$b = -\tilde{a}(v + 2w) \Leftrightarrow v + 2w = -\frac{b}{\tilde{a}} \Leftrightarrow v = -\left(\frac{b}{\tilde{a}} + 2w\right)$$

On substitue  $v = -\left(\frac{b}{\tilde{a}} + 2w\right)$  dans (3) :

$$c = \tilde{a}\left(2\left(-\frac{b}{\tilde{a}} - 2w\right)w + w^2\right) = \tilde{a}\left(-\frac{2bw}{\tilde{a}} - 4w^2 + w^2\right) = -3aw^2 - 2bw \Leftrightarrow 3aw^2 + 2bw + c = 0$$

Ce qui donne deux racines (zéros) :  $w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$  qui sont en définitive les deux coordonnées  $x$  des deux sommets puisque  $h$  peut être choisi de deux manières différentes selon que l'on s'intéresse au 1<sup>er</sup> ou au 2<sup>ième</sup> sommet. Nous sommes arrivés à ce résultat sans perte de généralités quant au choix de  $h$ .

Maintenant, (4) nous fournit la coordonnée  $y$ , c'est-à-dire le  $h$ , du sommet :

$$d - h = -\tilde{a}vw^2 \Leftrightarrow h = \tilde{a}vw^2 + d = aw^2\left(-\frac{b}{a} - 2w\right) + d = -2aw^3 - bw^2 + d$$

En même temps, cette coordonnée  $y$  doit correspondre à  $f(w)$ , c'est-à-dire

$$h = f(w) = aw^3 + bw^2 + cw + d$$

En égalant les deux dernière expressions de droite sur les deux équations ci-dessus on trouve

$$\begin{aligned} -2aw^3 - bw^2 + d &= aw^3 + bw^2 + cw + d \\ \Leftrightarrow 0 &= aw^3 + bw^2 + cw + d + 2aw^3 + bw^2 - d \\ &= 3aw^3 + 2bw^2 + cw \\ &= w(3aw^2 + 2bw + c) \\ &= w \cdot 0 \quad \text{car } 3aw^2 + 2bw + c = 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

Puisque l'on obtient  $0 = 0$ , les deux valeurs sont donc identiques.





# 5 Suites et séries

## Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	5-2
<b>5.2</b>	<b>Suites et sommes arithmétiques</b>	5-4
5.2.1	Définition	5-4
5.2.2	Sommes finies de termes de suites arithmétiques	5-4
<b>5.3</b>	<b>Suites et sommes géométriques</b>	5-5
5.3.1	Définition	5-5
5.3.2	Sommes finies de termes de suites géométriques	5-6

---

## 5.1 Introduction

Une suite est un ensemble de nombres, appelés **termes**, placés dans un ordre défini ; c'est-à-dire qu'il existe une règle de formation des termes suivant le premier.

### Exemples

(a) **Suite** : 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ...

**Règle** : additionner 4 à un terme donné pour obtenir le suivant.

(b) **Suite** : 13, 8, 3, -2, -7, -12, ...

**Règle** : soustraire 5 (ou ajouter -5) à un terme donné pour obtenir le suivant.

(c) **Suite** : 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

**Règle** : multiplier un terme donné par 2 pour obtenir le suivant.

(d) **Suite** : 81, 27, 9, 3, 1,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ , ...

**Règle** : diviser un terme donné par 3 (ou le multiplier par  $\frac{1}{3}$ ) pour obtenir le suivant.

(e) **Suite** : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

**Règle** : les deux premiers termes sont égaux à 1 et un terme donné (à partir du troisième) est la somme des deux termes précédents.

(f) **Suite** : 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

**Règle** : suite des carrés des nombres naturels non nuls.

Les suites ci-dessus ont certains points communs :

- elles sont infinies ;
- elles ont toutes la même structure :
  - à chaque place on attribue un numéro sous forme de nombre entier désignant son apparition dans la suite (place 1, place 2, place 3, place 4, ... ) ;
  - à chaque place correspond un terme (une valeur) : il n'y a pas de place vide.

Ce qui nous amène à définir plus précisément l'objet mathématique représenté à travers ces exemples.

**Définition 5.1.1 : Suite infinie**

Une **suite infinie**, notée  $\{u_n\}$ , est une application qui à une place, fait correspondre un terme. Une suite est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} \{u_n\} : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

où  $n$  est le numéro de la place (ou rang),  $u_n$  le terme de la suite (qui se lit "u indice n" et est associé à la place, au rang  $n$ ),  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

**Exemple**

Conformément à ce qui précède, la suite de l'exemple (a) peut se réécrire :

$$\begin{aligned} u_1 = 3 \quad u_2 = 7 \quad u_3 = 11 \quad u_4 = 15 \\ u_5 = 19 \quad u_6 = 23 \quad u_7 = 27 \quad \dots \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, nous ne discuterons que des suites dites arithmétiques et géométriques, définies au point suivant et que nous illustrerons également à travers des exemples de la vie courante. Mais, avant cela, un petit exercice...

**Exercice 1**

Soit la suite

$$u_1 = 2 \quad u_2 = 7 \quad u_3 = 12 \quad u_4 = 17 \quad u_5 = 22 \quad \dots$$

1. Quel est le terme du sixième rang de cette suite ?
2. Et celui du vingtième rang ?

**Remarque :**

## 5.2 Suites et sommes arithmétiques

### 5.2.1 Définition

#### Définition 5.2.1 : Suite arithmétique

On appelle **suite arithmétique** une suite où chaque terme après le premier s'obtient en ajoutant une quantité fixe, appelée la **raison** (notée  $r$ ), au terme précédent.

Les suites (a) et (b) du début de chapitre, ainsi que celle du "petit" exercice sont des suites arithmétiques de raison respectivement 4,  $-5$  et 5.

La définition précédente signifie qu'il existe une relation de récurrence entre les termes, à savoir :

$$r = u_n - u_{n-1} \quad \text{ou} \quad u_n = u_{n-1} + r$$

où  $n$  est l'indice désignant un certain rang et  $n - 1$  l'indice du rang précédent  $n$ .

Le terme général d'une série arithmétique est donnée par la formule<sup>1</sup>

$$u_n = u_1 + r \cdot (n - 1)$$

Lorsqu'on a une suite arithmétique et qu'on souhaite calculer son terme général, on remplace  $u_1$  et  $r$  dans la formule précédente (*sans oublier de simplifier l'expression !*) et on trouve  $u_n$ .

### Exercice 2

Déterminer le terme général pour chacune des trois suites vues plus haut.

### 5.2.2 Sommes finies de termes de suites arithmétiques

On note  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes d'une suite  $\{u_n\}$  :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

#### Exemple

On souhaite calculer la somme des 50 premiers termes de la suite algébrique

1. Cette formule sera démontrée en classe.

$$\{u_n\} : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto u_n = 2n + 3$$

On a

$$S_{50} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{48} + u_{49} + u_{50} = \sum_{k=1}^{50} (2k + 3)$$

$$= 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 99 + 101 + 103$$

La formule de sommation suivante<sup>1</sup> nous permet de conclure très vite :

$$\sum_{k=1}^n u_k = S_n = \frac{n}{2} \cdot (u_1 + u_n) = \frac{n}{2} \cdot (2u_1 + r \cdot (n - 1))$$

On peut aisément mémoriser cette formule sous la forme :

$$S_n = \frac{\text{nombre de termes de la somme}}{2} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})$$

Le lecteur vérifiera sans peine que la somme cherchée dans l'exemple ci-dessus est 2'700

### Exercice 3

Déterminer la somme des 35 premiers termes pour chacune des trois suites vues plus haut.

## 5.3 Suites et sommes géométriques

### 5.3.1 Définition

#### Définition 5.3.1 : Suite géométrique

On appelle **suite géométrique** une suite où chaque terme après le premier s'obtient en multipliant le terme précédant par un nombre fixe, appelé la **raison** (notée  $r$ ).

Les suites (c) et (d) des exemples de début de chapitre sont des suites géométriques

1. Qui sera démontrée en classe.

## 5 Suites et séries

de raisons respectives 2 et  $\frac{1}{3}$ .

La définition précédente signifie qu'il existe une relation de récurrence entre les termes à savoir :

$$r = \frac{u_n}{u_{n-1}} \quad \text{ou} \quad u_n = u_{n-1} \cdot r$$

où  $n$  est l'indice désignant un certain rang et  $n - 1$  l'indice du rang précédant  $n$ .

Le terme général d'une suite géométrique est donné par la formule<sup>2</sup>

$$u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$$

Lorsqu'on a une suite géométrique et qu'on souhaite calculer son terme général, on remplace  $u_1$  et  $r$  dans la formule précédente (*sans oublier de simplifier l'expression !*) et on trouve  $u_n$ .

### Exercice 4

Déterminer le terme général pour chacune des deux suites vues plus haut.

### 5.3.2 Sommes finies de termes de suites géométriques

On note  $S_n$  la somme des  $n$  premiers termes d'une suite  $\{u_n\}$  :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

#### Exemple

On souhaite calculer la somme des 15 premiers termes de la suite géométrique

$$\begin{aligned} \{u_n\} : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \end{aligned}$$

On a

---

2. Cette formule sera démontrée en classe.

$$\begin{aligned}
 S_{15} &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=1}^{15} 2^k \\
 &= 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 8192 + 16384 + 32768
 \end{aligned}$$

La formule de sommation suivante<sup>1</sup> nous permet de conclure très vite :

$$S_n = u_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = \sum_{k=1}^n u_k$$

Le lecteur vérifiera sans peine que la somme cherchée dans l'exemple ci-dessus s'élève à 65'534.

### Exercice 5

Déterminer la somme des 20 premiers termes pour chacune des deux suites vues plus haut.

---

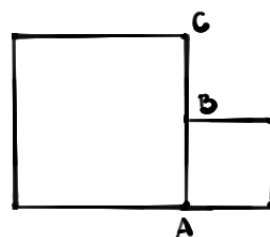
1. Qui sera démontrée en classe.





# 6 Nomenclature, angles et polygones

Une figure plane se compose de deux carrés tels que  $\overline{AB} = \overline{BC}$



Diviser la figure avec deux coupes perpendiculaires de sorte que, après translation des 3 parties, celles-ci forment un carré.

*(100 jeux pour bien maîtriser les maths, Zbigniew Romanowicz)*

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Qu'est-ce que la géométrie ?</b>	<b>6-2</b>
<b>6.2</b>	<b>Les angles et leurs mesure</b>	<b>6-3</b>
<b>6.3</b>	<b>Les polygones</b>	<b>6-7</b>
<b>6.4</b>	<b>Somme des angles dans un polygone</b>	<b>6-12</b>

---

## 6.1 Qu'est-ce que la géométrie ?

Ce mot vient du grec et signifie à peu près "mesure de la terre", à comprendre dans le sens "mesure des champs". Au début elle servait à mesurer la taille des champs à cultiver et les dimensions de certains objets. Par exemple, quelle est la longueur du cerceau métallique qui entoure un tonneau d'un diamètre connu ?

Au VI<sup>e</sup> siècle avant J.-C., Thalès de Millet déduit la hauteur de la grande pyramide de Kheops par un raisonnement géométrique. Plus tard les Grecs ont étudié de façon plus abstraite les propriétés des figures dans un plan. C'est la naissance des mathématiques rigoureuses. On cherche à démontrer certaines formules, on ne se contente plus de simplement les utiliser.

Trois noms célèbres de la **Grèce antique** vont jalonner cette approche des fondements de la géométrie :

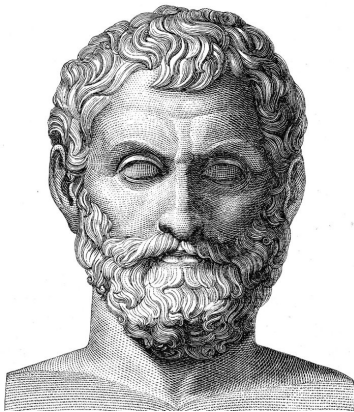


Fig. 6.1. **Thalès** de Millet (~ 625 – 547 av. J.-C.)

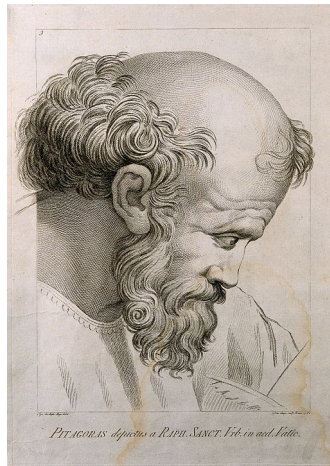


Fig. 6.2. **Pythagore** de Samos (~ 565 – 495 av. J.-C.)

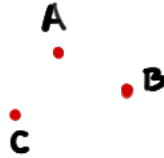


Fig. 6.3. **Euclide** d'Alexandrie (~ 330 – 275 av. J.-C.)

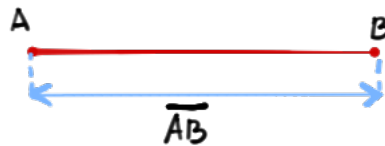
## 6.2 Les angles et leurs mesure

Voici la **nomenclature** que nous utiliserons dans ce cours pour décrire les objets courants de la géométrie :

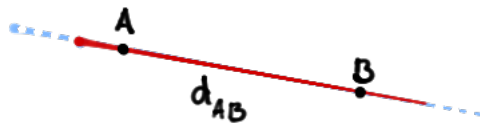
**Points** : Les points sont désignés par des lettres majuscules :  $A$ ,  $B$ ,  $C$  etc ;



**Segments** : Le segment qui relie le point  $A$  et le point  $B$  se note  $[AB]$  ; la longueur du segment  $[AB]$  se note  $\overline{AB}$  ;



**Droites** : La droite passant par  $A$  et  $B$  se note  $(AB)$  ou  $d_{AB}$  ;



**Demi-droites** : la demi-droite d'extrémité  $A$  et passant par  $B$  se note  $[AB)$ .



### Définition 6.2.1 : Angle

Un **angle** est une figure formée par deux demi-droites issues d'un même point appelé **sommet de l'angle**. Dans ce dessin le point  $O$  est le sommet de l'angle.  $[OA)$  et  $[OB)$  sont les **côtés de l'angle**.

**Remarque** L'alphabet grec se trouve dans la table CRM.

## 6 Nomenclature, angles et polygones

Les angles sont désignés par les lettres grecques minuscules  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\eta$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ , etc.

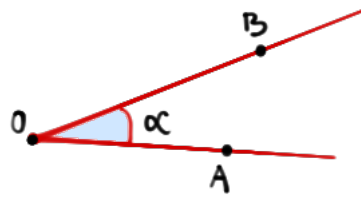


Fig. 6.4. Angle  $AOB$

On peut aussi désigner les angles au moyen de 3 points; on place dans ce cas le "point-sommet" au milieu et on note  $AOB$ .

### Définition 6.2.2 : Degré

Un **degré** est la mesure d'un angle dont le sommet est sur le centre d'un cercle et dont les côtés interceptent un arc de cercle égal à  $1/360$  de la circonférence.  
Notation : 1 degré =  $1^\circ$ .

**Remarques** On note que

- afin de ne pas alourdir la notation, on note de la même façon un angle et sa mesure. Autrement dit : on parlera "d'angle  $\alpha$  de  $45^\circ$ " ou " $\alpha = 45^\circ$ " par exemple.
- L'instrument le plus utilisé pour mesurer un angle est le **rapporateur** (demi-cercle subdivisé en 180 parties égales).

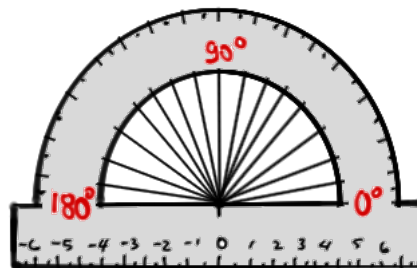


Fig. 6.5. Un rapporteur d'angles.

### Angles particuliers

- Un **angle plat** est un angle dont le sommet est situé sur une droite et dont les 2 côtés sont les 2 demi-droites formant la droite. Un angle plat mesure  $180^\circ$ .

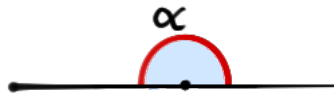


Fig. 6.6. Angle plat.

2. Un **angle droit** est la "moitié" d'un angle plat. Il mesure donc  $90^\circ$ .

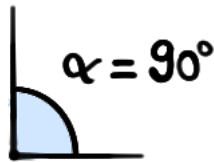


Fig. 6.7. Angle droit



Fig. 6.8. Angles droits, différentes notations.

3. Deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont dits **supplémentaires** quand leur somme donne un angle plat :  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

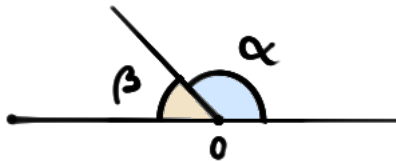


Fig. 6.9. Angles supplémentaires.

4. Deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont dits **complémentaires** quand leur somme donne un angle droit.

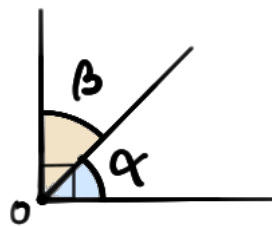


Fig. 6.10. Angles complémentaires.

5. Dans la situation suivante, si les droites  $d$  et  $d'$  sont parallèles, et si  $s$  est une sécante on dit que :

## 6 Nomenclature, angles et polygones

- $\alpha$  et  $\gamma$  sont **correspondants** ;
- $\beta$  et  $\delta$  sont **correspondants** ;
- $\beta$  et  $\gamma$  sont **alternes-internes** ;
- $\alpha$  et  $\delta$  sont **alternes-externes** ;
- $\alpha$  et  $\beta$  sont **opposés** par le sommet ;
- $\gamma$  et  $\delta$  sont **opposés** par le sommet ;

De plus :  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ .

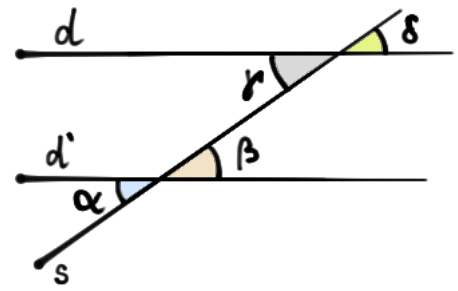


Fig. 6.11. Angles issus de deux droites parallèles et une sécante.

## 6.3 Les polygones

### Définition 6.3.1 : Polygone

Un **polygone** est une ligne brisée fermée qui, pour simplifier les formes à étudier, ne se recoupe pas elle-même.

Un **n-gone** est une abréviation pour dire un polygone à  $n$  côtés.

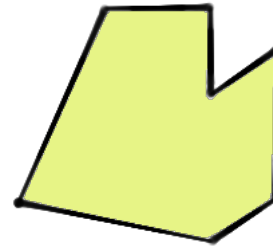


Fig. 6.12. Un polygone.

**Remarques** À noter que

- (a) chaque sommet définit un angle du polygone (du grec : *poly=plusieurs* et de *gônia=angle*).
- (b) il y a autant d'angles intérieurs que de côtés et de sommets.
- (c) les polygones les plus fréquents portent un nom particulier :

Nombre de côtés	Nom du Polygone
3	Triangle
4	Quadrilatère
5	Pentagone
6	Hexagone
7	Heptagone
8	Octogone

Nombre de côtés	Nom du Polygone
9	Ennéagone
10	Décagone
12	Dodécagone
15	Pentédécagone
20	Icosagone

- (d) si un polygone possède au moins un angle intérieur supérieur à  $180^\circ$  on dit qu'il est **concave**, alors qu'autrement on dit qu'il est **convexe**. Ce cours se limite à l'étude des polygones convexes.
- (e) un polygone est **régulier** si tous ses côtés et tous ses angles sont égaux. Tous les polygones réguliers et tous les triangles sont convexes.

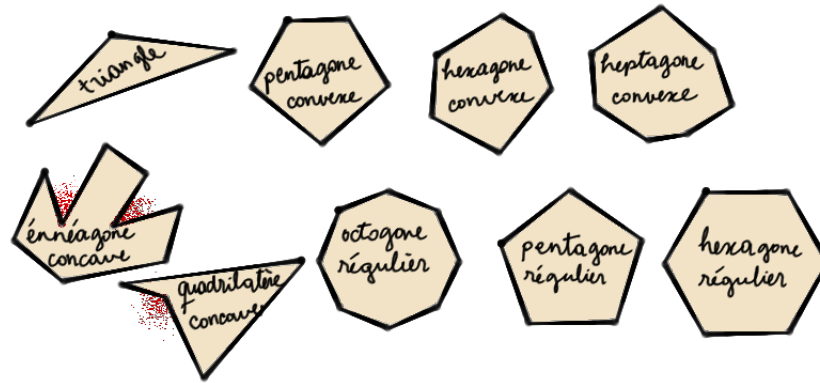


Fig. 6.13. Polygones convexes et concaves.

**Définition 6.3.2 : Triangle**

Un **triangle** est un polygone à trois côtés.

Pour désigner ses différentes composantes, on utilise les conventions suivantes :

- Les lettres majuscules désignent les **sommets** du triangle (souvent  $A$ ,  $B$  et  $C$ ), ils sont placés dans l'ordre inverse du sens des aiguilles d'une montre.
- Les lettres minuscules désignent les **côtés** ou leur **longueur**, le côté  $a$  est le côté qui est opposé au sommet  $A$ , le côté  $b$  est le côté qui est opposé au sommet  $B$ , etc.
- Les lettres minuscules grecques désignant les **angles**, l'angle  $\alpha$  se trouve au sommet  $A$ , l'angle  $\beta$  se trouve au sommet  $B$  et l'angle  $\gamma$  se trouve au sommet  $C$ .

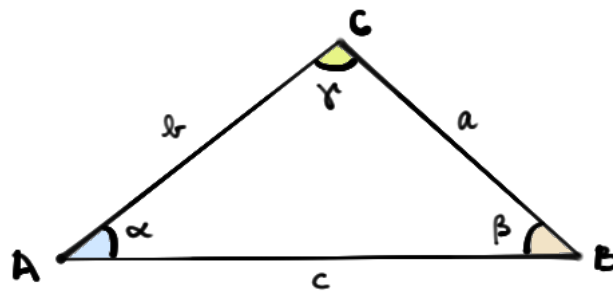


Fig. 6.14. Un triangle.



## Triangles particuliers

Trois types de triangles portent un nom particulier :

1. Un triangle **rectangle** est un triangle qui possède un angle droit.
2. Un triangle **isocèle** est un triangle qui possède au moins 2 angles égaux ( $\Leftrightarrow$  2 côtés égaux).
3. Un triangle **équilatéral** est un triangle qui possède 3 angles égaux ( $\Leftrightarrow$  3 côtés égaux).

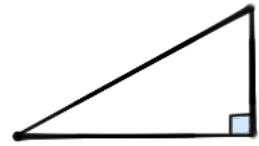


Fig. 6.15. Un triangle rectangle.

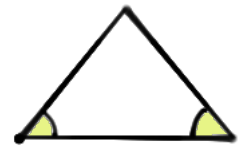


Fig. 6.16. Un triangle isocèle.

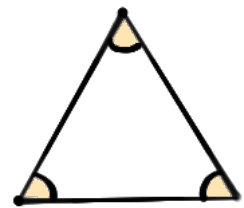


Fig. 6.17. Un triangle équilatéral.

### Définition 6.3.3 : Quadrilatère

Un **quadrilatère** est un polygone à quatre côtés.

Pour désigner ses différentes composantes, on utilise des conventions similaires à celles utilisées pour le triangle.

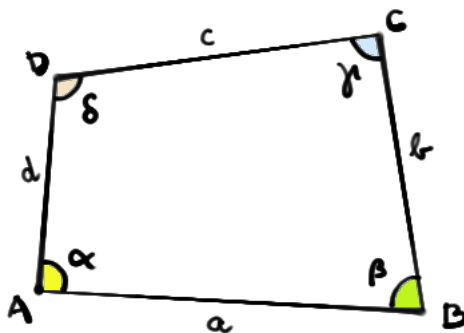


Fig. 6.18. Un quadrilatère.

## Quadrilatères particuliers

Les quadrilatères particuliers sont : le carré, le rectangle, le trapèze, la parallélogramme, etc.

### Définition 6.3.4 : Polygone régulier

Un polygone est dit **régulier** si tous ses angles sont égaux et tous ses côtés sont égaux

## Polygones réguliers particuliers

Nous avons par exemple, le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier, etc.

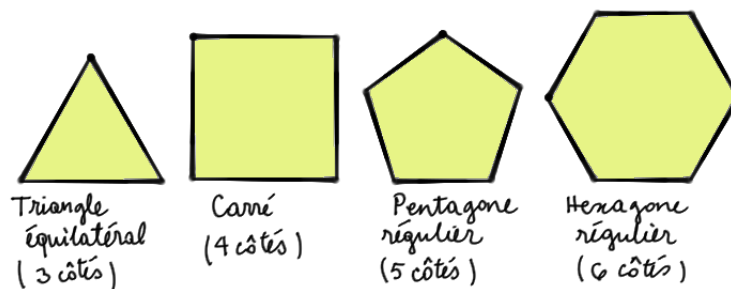


Fig. 6.19. Polygones réguliers particuliers.

### Définition 6.3.5 : Cercle circonscrit

Le **cercle circonscrit** au polygone régulier est le cercle qui passe par les sommets du polygone régulier (rayon du cercle circonscrit :  $r$  sur le dessin).

### Définition 6.3.6 : Cercle inscrit

Le **cercle inscrit** au polygone régulier est le cercle qui est tangent à tous les côtés du polygone régulier (rayon du cercle inscrit : apothème  $a$  sur le dessin).

### Définition 6.3.7 : Centre d'un polygone

On appelle **centre** ( $O$  sur le dessin) d'un polygone régulier le centre des cercles inscrit et circonscrit au polygone régulier. Les deux cercles sont *concentriques*.

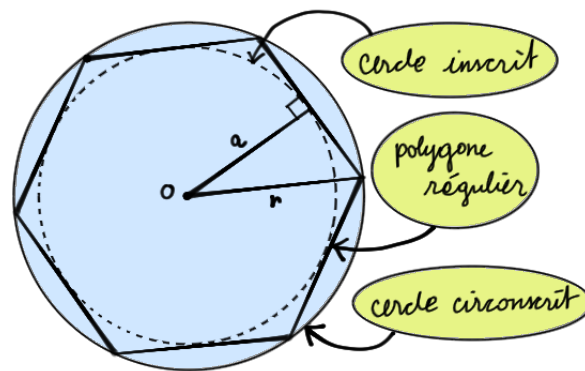


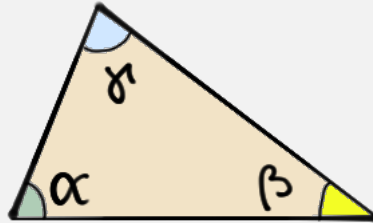
Fig. 6.20. Cercles inscrit et circonscrit.

**Remarques** à noter que

1. il existe une infinité de polygones réguliers ;
2. tout polygone régulier admet un cercle circonscrit, inscrit et un centre ;
3. apothème  $a < \text{rayon } r$

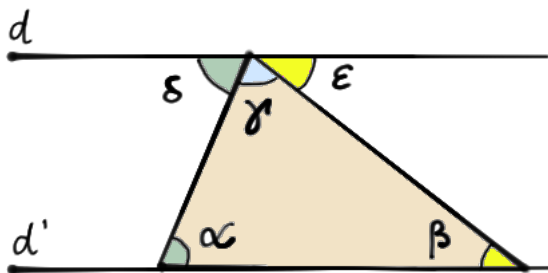
## 6.4 Somme des angles dans un polygone

### Théorème 6.4.1 : Théorème de la somme des angles dans un triangle



Dans un triangle la somme des angles vaut  $180^\circ$  :  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$   
 hypothèse conclusion

Démonstration. <sup>1</sup>



1. On trace deux droites parallèles  $d$  et  $d'$ .
2. On a :  $\delta + \gamma + \epsilon = 180^\circ$  Angle plat.
3. On a :  $\alpha = \delta$  et  $\beta = \epsilon$  Angles alternes-internes.

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

□

### Corollaire 6.4.1 :

Dans un quadrilatère la somme des angles vaut  $360^\circ$   
 hypothèse conclusion

Démonstration.

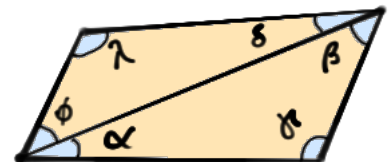
1. Un quadrilatère est toujours la réunion de deux triangles.
2. On utilise le théorème :

"Dans un triangle la somme des angles vaut  $180^\circ$ "

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ et } \delta + \lambda + \phi = 180^\circ$$

$$\Rightarrow (\alpha + \phi) + \beta + (\gamma + \delta) + \lambda = 360^\circ$$

□



1. La démonstration de ce théorème est attribuée à Pythagore lui-même.

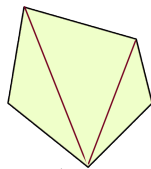
**Théorème 6.4.2 : La somme des angles dans un polygone**

Dans un polygone à  $n$  côtés  $\underbrace{\hspace{10em}}$  la somme des angles vaut  $180^\circ \cdot (n - 2)$   
hypothèse conclusion

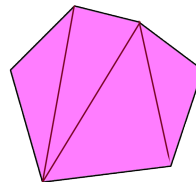
*Démonstration.*

1. Un polygone quelconque est toujours la réunion de triangles.
2. On observe par récurrence la suite des polygones à  $n$  côtés à partir de  $n = 5$  puisque les cas de  $n = 4$  et  $n = 3$  relèvent de ce qui précède. Une division de chacun d'eux en triangles permet d'affirmer qu'à chaque fois que l'on ajoute un côté au polygone précédent, cela revient à rajouter un triangle dans la subdivision (cf. tableau ci-dessous).

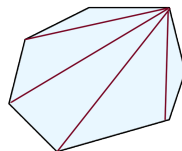
Polygone	Nombre de côtés	Nombre de triangles	Somme des angles
Triangle	3	1	$1 \cdot 180 = 180$
Quadrilatère	4	2	$2 \cdot 180 = 360$
Pentagone	5	3	$3 \cdot 180 = 540$
Hexagone	6	4	$4 \cdot 180 = 720$
Heptagone	7	5	$5 \cdot 180 = 900$
...	...	...	...
$n$ -gone	$n$	$n - 2$	$(n - 2) \cdot 180$



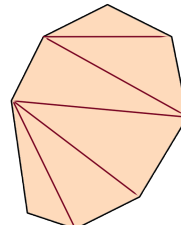
pentagone



hexagone



heptagone



Octogone

□

## Définitions importantes concernant Les démonstrations

### Définition 6.4.1 : Un axiome

Un **axiome** est un énoncé admis comme *vrai* sans justification, ou règle arbitraire ne menant à aucune contradiction, une sorte de "règle du jeu".

### Exemples

1. "Par deux points distincts, il ne passe qu'une seule droite".
2. "Deux droites parallèles n'ont aucune intersection ou conservent une même distance".

### Remarques

1. Un énoncé est **vrai** s'il est *toujours* vrai.
2. Un énoncé est **faux** s'il *n'est pas toujours* vrai :  
"Si  $n$  est un nombre entier relatif, alors  $n^2$  est un nombre naturel non nul" est un énoncé faux.

On n'admet pas d'exception : un énoncé qui est parfois vrai et parfois faux est mathématiquement faux.

### Définition 6.4.2 : Une conjecture

Une **conjecture** est un énoncé dont on a l'intuition qu'il est *vrai*, mais qui ne connaît pas encore de démonstration.

### Exemples

#### 1. Conjecture de Goldbach

"Tout nombre entier pair strictement supérieur à trois peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers (le même nombre premier pouvant être utilisé deux fois)".

#### 2. Conjecture de Legendre

"Pour tout entier  $n$  positif, il existe un nombre premier entre  $n^2$  et  $(n+1)^2$ ".

**Remarque** Il existe des milliers de conjectures mathématiques. Certaines font l'objet de recherche de la part de chercheurs (en mathématique, en physique, etc.) qui travaillent dans des universités ou des écoles d'ingénieurs.

**Définition 6.4.3 : Un théorème**

Un **théorème** est un énoncé que l'on peut *démontrer* être vrai.

**Exemples**

1. "Dans un triangle la somme des angles vaut  $180^\circ$ ".
2. "Si un nombre entier est divisible par 6, alors il est pair".

**Remarques**

1. Un théorème est toujours composé d'une **hypothèse** et d'une **conclusion**.  
L'hypothèse est constituée des données et de leurs propriétés connues. Elle doit permettre de démontrer la conclusion du théorème. La conclusion d'un théorème est la propriété découlant logiquement des hypothèses.

**Exemple**

Hypothèse : "Dans un triangle"  
Conclusion : "La somme des angles vaut  $180^\circ$ "

2. La formulation habituelle d'un théorème est de la forme :

"**Si** hypothèse **alors** conclusion" ou  
"hypothèse"  $\Rightarrow$  "conclusion"

3. Une **démonstration** est une suite de raisonnements logiques justifiés par des hypothèses, des axiomes et des définitions.

**Définition 6.4.4 : Un corollaire**

Un **corollaire** est un théorème qui est la conséquence immédiate ou un cas particulier d'un autre théorème.

**Remarque** La démonstration d'un corollaire fait donc appel à d'autres théorèmes.

**Définition 6.4.5 : La réciproque**

La **réciproque** d'un théorème est un énoncé obtenu en inversant hypothèse et conclusion.

**Exemple**

La réciproque de “Si un nombre entier est divisible par 6, alors il est pair” est “Si un nombre entier est pair, alors il est divisible par 6”.

**Remarques**

1. La réciproque d'un théorème n'est pas toujours vraie, ce qui est le cas dans l'exemple ci-dessus.
2. La réciproque du théorème de Pythagore et d Thalès est vraie.



# 7 Pythagore et Thalès

## Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Le théorème de Pythagore</b>	7-2
<b>7.2</b>	<b>Le théorème de Thalès</b>	7-9

---

## 7.1 Le théorème de Pythagore

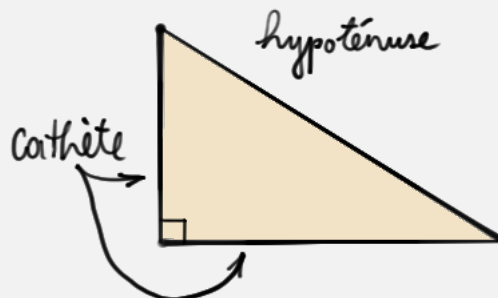
---



**Pythagore de Samos** (environ 565 – 495 av. J.-C.) est considéré comme le père des mathématiques grecques. Son éducation de base porta surtout sur les disciplines littéraires et artistiques. Il apprit la poésie, en particulier l'oeuvre d'Homère, et la pratique de la Lyre. Comme professeur, il eut trois philosophes qui l'influencèrent beaucoup. Le plus marquant fut *Phérékydes*, mais il aurait aussi été l'élève de *Thalès* et d'*Anaximandre* qui l'initiaient aux mathématiques. L'école pythagoricienne (secte) était une académie où l'on étudiait la philosophie, les mathématiques, les sciences naturelles en plus de pratiquer des rites secrets.

### Définition 7.1.1 : Hypoténuse, cathète

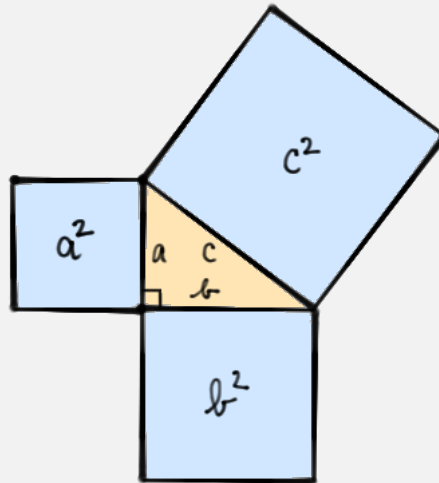
Dans un **triangle rectangle**, le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse**, c'est le côté le plus long. Les deux autres côtés s'appellent les **cathètes**.



**Théorème 7.1.1 : Théorème de Pythagore**

**Si** un triangle est rectangle, **alors** la somme des carrés des cathètes est égale au carré de l'hypoténuse :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

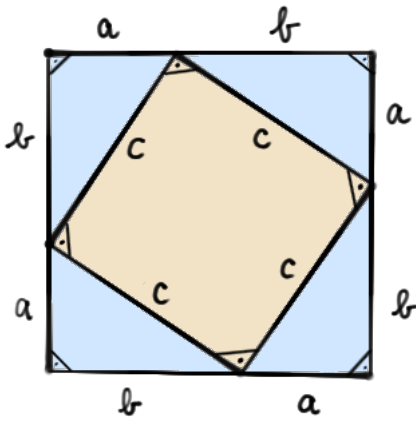
**Remarques**

1. Hypothèse : "Un triangle est rectangle".

Conclusion : "La somme des carrés des cathètes est égale au carré de l'hypoténuse".

2.  $a + b > c$ ;  $a < c$ ;  $b < c$

Démonstration.



1. On construit deux carrés. On obtient aussi quatre triangles rectangles (voir figure ci-contre). Les côtés de ces carrés mesurent respectivement  $a + b$  et  $c$ .
2. Calculons l'aire du "grand carré" de deux manières différentes :

$$\underbrace{(a + b)^2}_{\text{aire du carré de côté "a + b"}} = \underbrace{4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}}_{\text{aire d'un triangle rectangle}} + \underbrace{c^2}_{\text{aire du carré de côté "c"}}$$

3. Développons et simplifions cette relation :

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \iff a^2 + b^2 = c^2$$

□

**Remarque** La réciproque du théorème de Pythagore est également vraie :

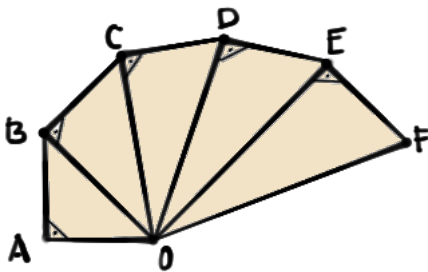
**Si  $a^2 + b^2 = c^2$  alors** le triangle dont les côtés mesurent  $a$ ,  $b$  et  $c$  est rectangle.

### Marche à suivre pour résoudre les problèmes

1. Faire un dessin avec des légendes ; indiquer les données du problème.
2. Identifier et noter dans le dessin les triangles rectangles. (*hypothèse du théorème de Pythagore*)
3. Écrire les égalités entre les longueurs des côtés des triangles rectangles. (*conclusion du théorème de Pythagore*)
4. Utiliser ces égalités pour calculer les longueurs désirées. (*résolution d'une équation*)

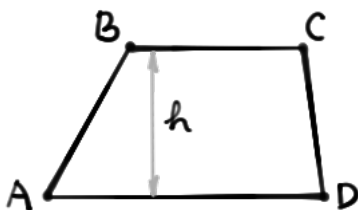
**De manière générale :** Indiquer systématiquement le nom du théorème que vous utilisez.

#### Exercice 1



Sachant que :  $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = 1$  cm, calculer les valeurs exactes des longueurs suivantes :  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ ,  $\overline{OE}$  et  $\overline{OF}$ .

#### Exercice 2

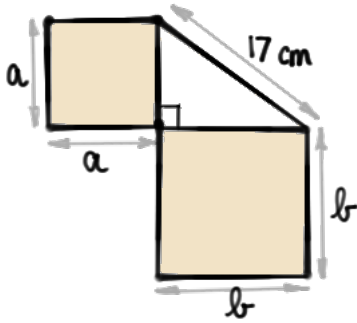


Calculer l'aire et le périmètre du trapèze  $ABCD$ .

$\overline{AB} = 35$  cm,  $\overline{BC} = 47$  cm  $\overline{AD} = 82$  cm,  $h = 25$  cm

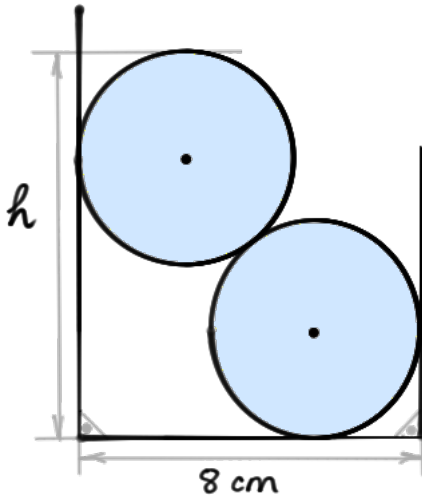
Exercice 3

Calculer l'aire de la figure coloriée ci-contre.



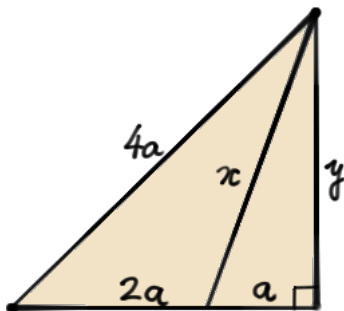
Exercice 4

Les deux cercles ont 5 cm de diamètre. Calculer la hauteur  $h$ . (Indication : utiliser les centres des cercles.)



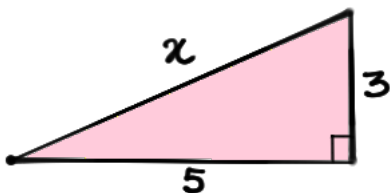
Exercice 5

Calculer  $x$  en fonction de  $a$ .



**Exercice 6**

1. Un triangle qui a des côtés de longueur 3 m, 4 m et 5 m est-il rectangle ?
2. Un triangle qui a des côtés de longueur 12 m, 13 m et 14 m est-il rectangle ?
3. Si *Le Cap* se trouve à 1275 miles de *Johannesburg*, si *Durban* est à 765 miles de *Johannesburg* et si *Le Cap* est à 1020 miles de *Durban*, quel est alors l'angle formé à *Durban* entre les routes directes toutes droites vers *Le Cap* d'une part et vers *Johannesburg* d'autre part ?

**Exercice 7**Calculer  $x$ .**Exercice 8**

Peut-on rentrer une règle de 75 cm de long dans une boîte à outils dont la base et chacun des côtés sont rectangulaires et qui mesurent 60 cm de long, 30 cm de large et 20 cm de haut ? Justifier votre réponse avec des calculs et un dessin est exigé.

**Exercice 9**

1. Calculer la longueur  $d$  de la diagonale d'un carré de côté  $a$ .

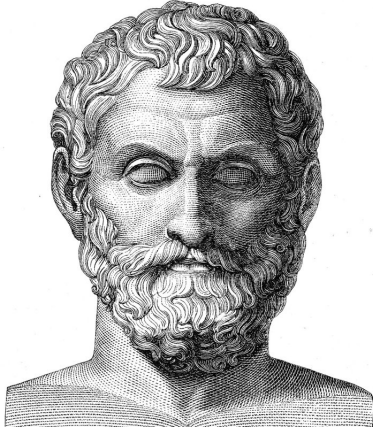
2. Calculer la longueur  $d$  de la diagonale d'un cube de côté  $c$ .
  
3. Calculer la longueur  $c$  du côté d'un cube de diagonale  $d$ .
  
4. Calculer la hauteur  $h$  d'un triangle équilatéral de côté  $a$ .
  
5. Calculer l'aire  $A$  d'un triangle équilatéral de côté  $a$ .

### Exercice 10

Deux randonneurs munis d'émetteurs récepteurs quittent le même point à 9h, l'un marchant plein sud à 4 km/h et l'autre allant plein ouest à 3 km/h. Combien de temps pourront-ils communiquer l'un avec l'autre si chaque radio a une portée maximale de 2 km ? Donner votre réponse en heures / minutes / secondes.



## 7.2 Le théorème de Thalès



**Thalès de Milet** (environ 625 – 547 av. J.-C.), l'un des sept sages de l'Antiquité était un savant grec, astronome, philosophe et mathématicien.

Le théorème de Thalès est connu et utilisé depuis l'Antiquité : il permet de calculer des longueurs inaccessibles, par exemple la hauteur d'une pyramide ou la profondeur d'un puits.

### Définition 7.2.1 : Triangles semblables, côtés correspondants

- ◇ Deux triangles sont **semblables** s'ils possèdent les mêmes angles.
- ◇ Deux côtés appartenant respectivement à deux triangles semblables sont dits **correspondants** s'ils sont opposés au même angle.

### Exemple

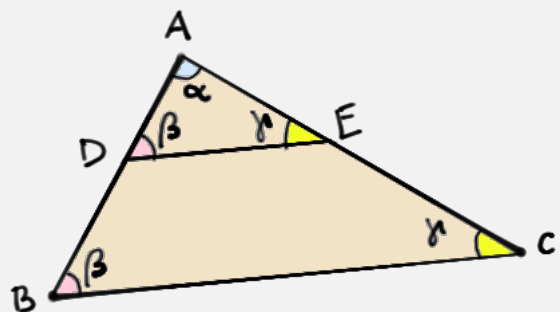
\* Les triangles  $ABC$  et  $ADE$  sont *semblables* car :

— les angles  $\widehat{AED}$  et  $\widehat{ACB}$  sont correspondants.

— les angles  $\widehat{ADE}$  et  $\widehat{ABC}$  sont correspondants.

On note alors :  $\triangle ABC \approx \triangle ADE$

\* Les côtés  $[AC]$  et  $[AE]$  sont *correspondants*, car ils sont opposés à l'angle  $\beta$ .



**Définition 7.2.2 : Rapport et proportionnalité**

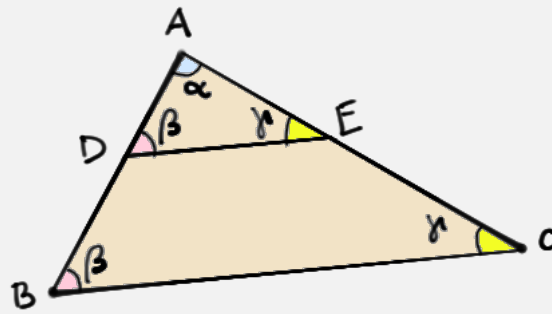
\* Le **rapport** de deux nombres  $a$  et  $b$  est le quotient de ces deux nombres.

\* On dit que  $\frac{a}{b}$  est **proportionnel** à  $\frac{c}{d}$  si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$$

**Exemple**

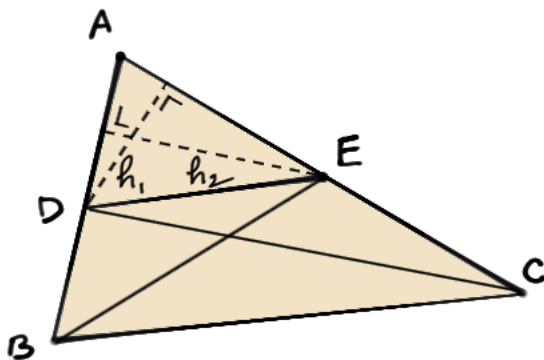
Le rapport de 3 et 4 est  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{3}{4}$  est proportionnel à  $\frac{6}{8}$ , car  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \iff 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ .

**Théorème 7.2.1 : Théorème de Thalès**

Si deux triangles sont semblables, **alors** les rapports des côtés correspondants sont proportionnels :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

*Démonstration.*



Si le triangle  $ADE$  est semblable au triangle  $ABC$ , alors la droite passant par  $DE$  est parallèle à la droite passant par  $BC$ .

Le triangle  $BDE$  a la même aire que le triangle  $CDE$  parce qu'ils ont la même base  $DE$  et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ( $DE$ ) et ( $BC$ ).

En leur ajoutant à tous deux le triangle  $ADE$ , nous obtenons deux nouveaux triangles de mêmes aires, à savoir  $ABE$  et  $ACD$ .

On peut donc écrire :

$$\frac{\text{aire}(ADE)}{\text{aire}(ABE)} = \frac{\text{aire}(ADE)}{\text{aire}(ACD)} \iff \frac{\frac{\overline{AD} \cdot h_2}{2}}{\frac{\overline{AB} \cdot h_2}{2}} = \frac{\frac{\overline{AE} \cdot h_1}{2}}{\frac{\overline{AC} \cdot h_1}{2}} \iff \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Un argument similaire permet d'établir la proportionnalité :  $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ . □

**Remarque** La réciproque du théorème de Thalès est également vraie :

Si  $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ , **alors** les triangles  $ABC$  et  $ADE$  sont semblables.

### Marche à suivre pour résoudre les problèmes

1. Faire un dessin avec des légendes ; indiquer les données du problème.
2. Identifier dans le dessin les triangles semblables. (*hypothèse du théorème de Thalès*) Vérifier à l'aide des propriétés sur les angles que les triangles présents sont bien semblables.
3. Écrire les égalités entre les rapports des côtés correspondants (*conclusion du théorème de Thalès*).
4. Utiliser ces égalités pour calculer les longueurs désirées. (*résolution d'une équation*)

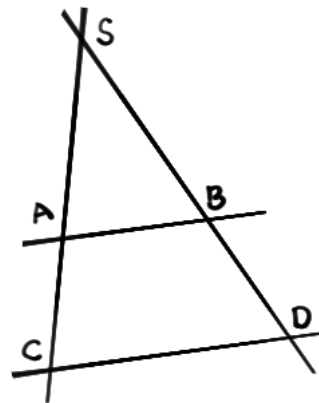
**De manière générale :** Indiquer systématiquement le nom du théorème que vous utilisez.

#### Exercice 11

Les droites  $d_{AB}$  et  $d_{CB}$  sont parallèles.

$$\overline{AS} = 8 \text{ cm}, \overline{BS} = 12 \text{ cm}, \overline{DS} = 18 \text{ cm}, \overline{AB} = 9 \text{ cm}.$$

Calculer  $\overline{CS}$  et  $\overline{CD}$ .

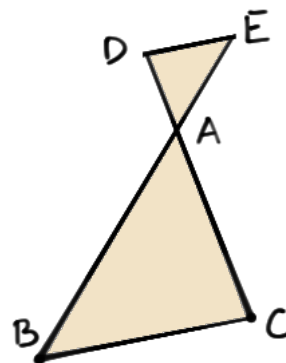


#### Exercice 12

$$[ED] // [BC]$$

$$\overline{AD} = 32 \text{ m}, \overline{AC} = 51 \text{ m}, \overline{DE} = 38 \text{ m}, \overline{AB} = 45 \text{ m}.$$

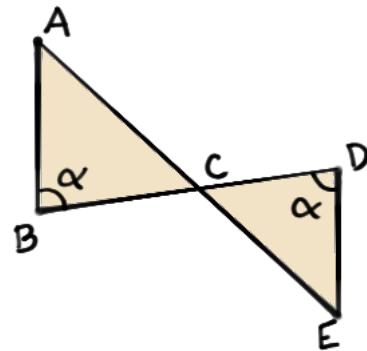
Calculer  $\overline{BC}$  et  $\overline{AE}$ .



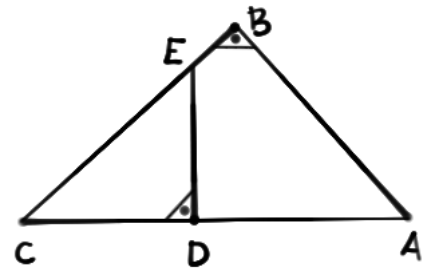
**Exercice 13**

$\overline{AC} = 5 \text{ m}$ ,  $\overline{AE} = 11 \text{ m}$ ,  $\overline{BC} = 4 \text{ m}$ ,  $\overline{DE} = 12 \text{ m}$ .

Calculer  $\overline{AB}$  et  $\overline{CD}$ .

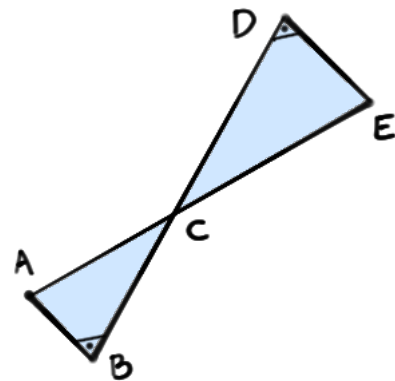
**Exercice 14**

Sachant que  $\overline{AB} = 8 \text{ mm}$ ,  $\overline{BE} = 7 \text{ mm}$ ,  $\overline{BC} = 12 \text{ mm}$ ,  
calculer  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CD}$  et  $\overline{DE}$ .

**Exercice 15**

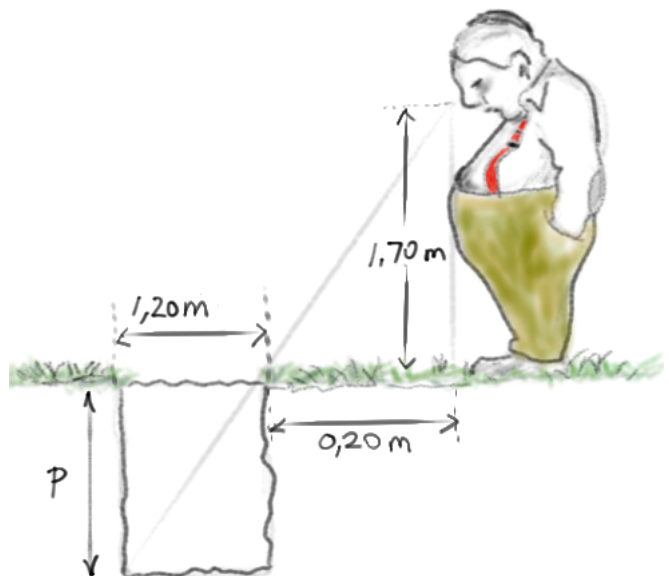
$\overline{CE} = 111 \text{ km}$ ,  $\overline{BC} = 35 \text{ km}$ ,  $\overline{ED} = 36 \text{ km}$ .

- Calculer  $\overline{AB}$  et  $\overline{BD}$ .
- Calculer l'aire de la surface hachurée.



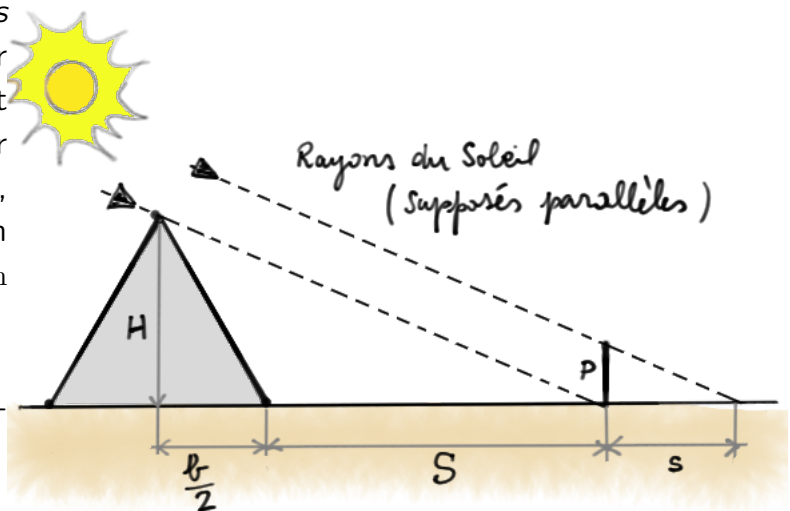
### Exercice 16

Calculer la profondeur  $p$  du puits.



### Exercice 17

Pour mesurer la hauteur  $H$  de la pyramide de Kheops, *Thalès* recourt à un bâton de longueur  $p = 2$  m qu'il tient verticalement par rapport au sol. Il fait mesurer la base  $b = 230$  m de la pyramide, la longueur  $S = 300$  m de son ombre, ainsi que l'ombre  $s = 5,7$  m du bâton.



Calculer la hauteur  $H$  de cette pyramide.

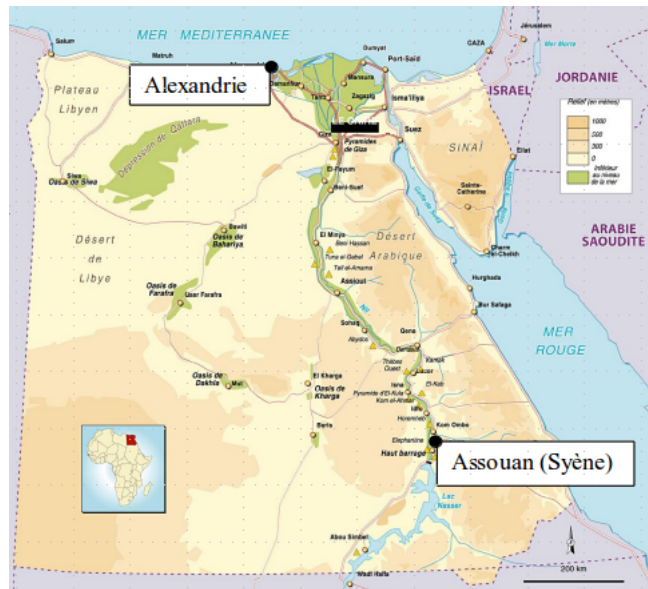
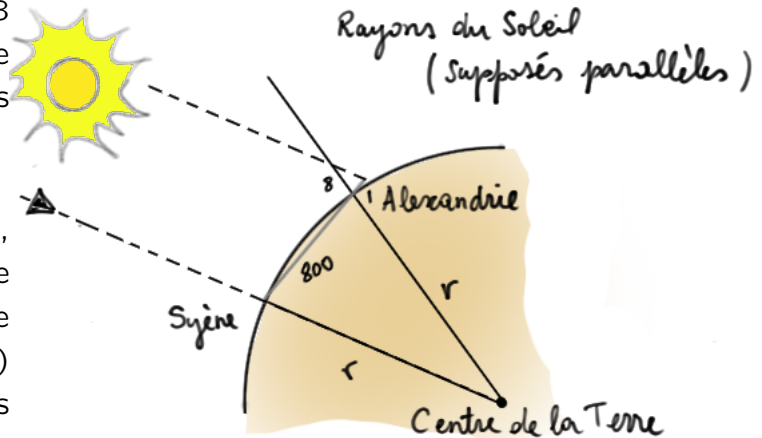
**Remarque :** C'est en hommage à cette idée qui permet cette mesure que le théorème correspondant fut attribué à *Thalès* par Les mathématiciens du 18<sup>e</sup> siècle.

### Exercice 18

Le mathématicien et astronome *Eratosthène*, (environ 280 – 198 av. J.-C.), avait évalué le rayon de la Terre à partir des observations suivantes :

À midi, le jour du solstice d'été, dans deux villes de l'actuelle Égypte : *Syène* (ville qui s'appelle aujourd'hui Assouan, sur le Nil) et *Alexandrie*, il observe les ombres. À *Syène*, le Soleil est au zénith : les rayons de ce dernier sont verticaux et l'on peut voir son image au fond d'un puits. À *Alexandrie*, ville située sur le même méridien que *Syène*, mais 800 km plus au nord, le Soleil est très haut dans le ciel, mais pas au zénith. L'ombre d'un obélisque vertical a une longueur égale au  $\frac{1}{8}$  de sa hauteur.

Comme Eratosthène, vous avez tous les éléments pour déterminer approximativement le *rayon*, puis le *diamètre* et le *périmètre* de la Terre.







# 8 Trigonométrie dans un triangle quelconque

## Sommaire

---

<b>8.1 Introduction</b> . . . . .	<b>8-2</b>
<b>8.2 Rappels</b> . . . . .	<b>8-3</b>
<b>8.3 Théorèmes relatifs aux triangles quelconques</b> . . . . .	<b>8-5</b>
<b>8.4 Exercices</b> . . . . .	<b>8-10</b>

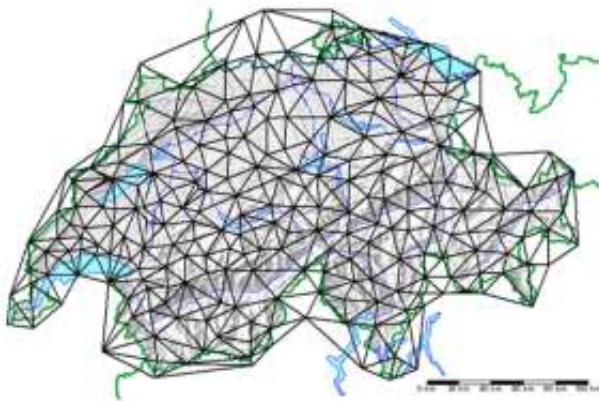
---

## 8.1 Introduction



**La trigonométrie** (du grec *trigônon*, triangle et *metron*, mesure) était à l'origine l'art de préciser uniquement par le calcul les informations absentes. Avec suffisamment d'informations, la trigonométrie nous permet de calculer la longueur des côtés et les angles d'un triangle préalablement défini.

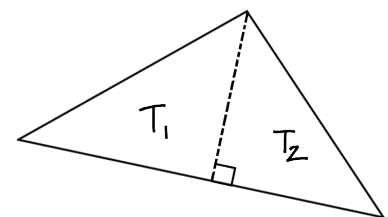
Pourquoi des triangles? Parce que ce sont les figures de base qui permettent de construire toutes les autres formes ayant des côtés rectilignes. Un polygone (carré, rectangle, trapèze, pentagone, hexagone, etc.) peut être partagé en plusieurs triangles, en menant des lignes droites d'un sommet à tous les autres.



Pour étudier les relations trigonométriques dans un triangle quelconque **on a besoin de connaître les relations trigonométriques dans un triangle rectangle.**

En effet, on constate facilement que tout triangle quelconque peut être décomposé en deux triangles rectangles.

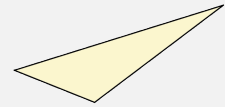
Commençons donc par un rappel sur les relations de base dans un triangle rectangle.



## 8.2 Rappels

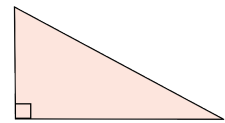
### Définition 8.2.1 : Triangle

Un **triangle** quelconque est un polygone à trois côtés.



### Triangles particuliers

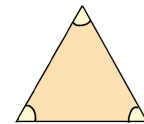
- Un triangle **rectangle** est un triangle qui possède un angle droit.



- Un triangle **isocèle** est un triangle qui possède au moins 2 angles égaux ( $\Leftrightarrow$  deux côtés égaux).



- Un triangle **équilatéral** est un triangle qui possède 3 angles égaux ( $\Leftrightarrow$  trois côtés égaux).



### Les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle

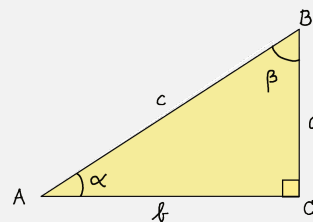
#### Définition 8.2.2 : sinus, cosinus, tangente et leur réciproque

À partir du triangle  $ABC$  rectangle en  $C$ , on définit les relations suivantes :

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1} \left( \frac{a}{c} \right)$$

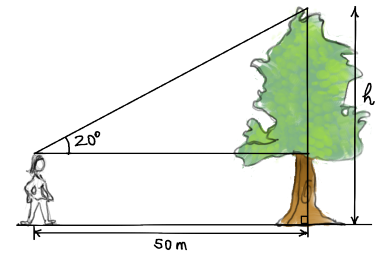
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{b}{c} \right)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right)$$

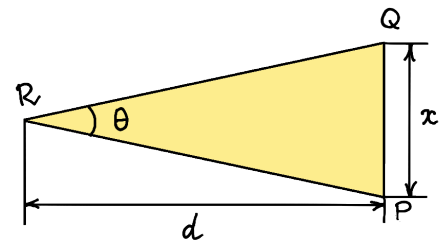


**Activité**

- a) Calculer la hauteur  $h$  de l'arbre sachant que la personne mesure 1,80 m.



- b) On connaît  $x = 10$  m et  $d = 60$  m. Calculer l'angle  $\Theta$ . (Le triangle  $PQR$  est isocèle en  $R$ )



## 8.3 Théorèmes relatifs aux triangles quelconques

Il est possible d'étendre l'utilisation de la trigonométrie aux **triangles quelconques**, c'est-à-dire aux triangles ne possédant pas forcément un angle droit grâce aux théorèmes suivants : le **théorème du sinus** et le **théorème du cosinus**.

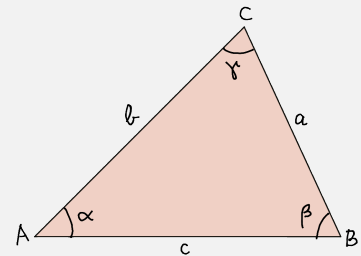
### Le théorème du sinus

#### Théorème 8.3.1 : sinus

Considérons un triangle quelconque  $ABC$  avec des côtés de longueurs  $a, b$  et  $c$  et dont les 3 angles ont pour valeurs  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Remarque :  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Alors on a

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$



#### Exemple

Résoudre le triangle  $ABC$ , connaissant  $\alpha = 48^\circ$ ,  $\gamma = 57^\circ$  et  $b = 47$ .

- Étant donné que la somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$ ,  $\beta = 180 - 48 - 57 = 75^\circ$ .
- Utilisons maintenant le théorème du sinus pour calculer  $a$  :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \Leftrightarrow a = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{47 \cdot \sin(48)}{\sin(75)} \approx 36$$

- Ensuite, avec le même théorème calculons  $c$  :

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \Leftrightarrow c = \frac{b \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{47 \cdot \sin(57)}{\sin(75)} \approx 41$$

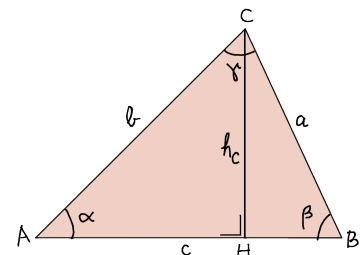
#### Remarque :

Résoudre un triangle, c'est calculer la mesure de ses côtés et de ses angles.

#### Démonstration.

Construisons dans le triangle quelconque précédent la hauteur  $h_c$  issue du sommet  $C$ , coupant le côté  $AB$  en  $H$ .

On obtient deux triangles rectangles en  $H$ .



## 8 Trigonométrie dans un triangle quelconque

Alors on a

$$\left. \begin{array}{l} \sin(\alpha) = \frac{h_C}{b} \Rightarrow h_C = b \cdot \sin(\alpha) \\ \sin(\beta) = \frac{h_C}{a} \Rightarrow h_C = a \cdot \sin(\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \Rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

En faisant le même raisonnement pour une autre hauteur ( $h_A$  ou  $h_B$ ), on obtient les égalités manquantes.

□

**Remarques**

1. Si  $\gamma = 90^\circ$  alors  $\frac{\sin(\alpha)}{\frac{a}{c}} = \frac{\sin(\gamma)}{\frac{c}{c}} = \frac{1}{c} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ , et **on retrouve la définition du sinus dans le triangle rectangle !**
2. La démonstration du théorème du sinus, dans ce cours, est présentée avec un triangle ayant 3 angles aigus. Si on considère un angle obtus, on obtient les mêmes relations qu'avec 3 angles aigus.
3. La connaissance de  $\sin(\alpha)$  ne permet pas de déterminer  $\alpha$  de manière unique, puisque deux angles supplémentaires ont même sinus. Autrement dit :  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ . Il faudra donc être prudent lors de l'utilisation du théorème du sinus, en envisageant toutes les solutions.

$$\frac{\sin(50)}{7} = \frac{\sin(\gamma)}{6} \Leftrightarrow$$

$$\sin(\gamma) = \frac{6 \cdot \sin(50)}{7} \Leftrightarrow$$

$$\gamma = \sin^{-1}(0.657) \approx 41^\circ \quad \text{ou} \quad \gamma = 180 - 41 = 139^\circ$$

On pourra ensuite éliminer la valeur indésirable en vérifiant que la condition  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  est satisfaite ou en utilisant le fait que dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

## Le théorème du cosinus

## Théorème 8.3.2 : Théorème du cosinus

Considérons un triangle quelconque  $ABC$  avec des côtés de longueurs  $a, b$  et  $c$  et dont les 3 angles ont pour valeurs  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , tous trois des angles aigus.

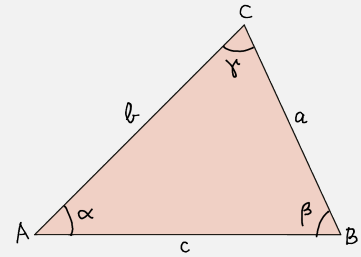
Remarque :  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Alors on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$



## Exemple

Résoudre le triangle  $ABC$ , connaissant  $a = 5$ ,  $c = 8$  et  $\beta = 77^\circ$ .

- Utilisons le théorème du cosinus pour calculer  $b$  :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos(77) \approx 71 \Rightarrow b \approx \sqrt{71} \approx 8,4$$

- Ensuite, utilisons le théorème du sinus pour calculer  $\alpha$  :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{b} = \frac{5 \cdot \sin(77)}{8,4} \approx 0,5782 \Leftrightarrow$$

$$\alpha \approx \sin^{-1}(0,5782) \approx 35^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha = 180 - 35 = 145^\circ$$

- Finalement sachant que  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , nous avons :  $\gamma = 180 - \alpha - \beta = 180 - 35 - 77 = 68^\circ$  et  $\alpha = 145^\circ$  est impossible, car  $\gamma = 180 - 145 - 77 = -42^\circ$  !

*Démonstration.*

Construisons dans le triangle quelconque précédent la hauteur  $h_C$  issue du sommet  $C$ , coupant le côté  $AB$  en  $H$ .

On obtient deux triangles rectangles en  $H$ .  $H$  divise le côté  $AB$  en deux parties :  $\overline{AH} = c_1$  et  $\overline{HB} = c - c_1$ .

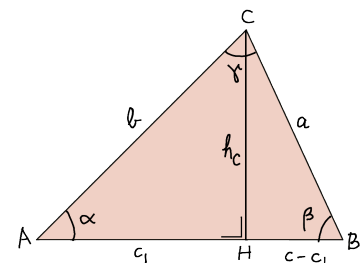
Appliquons le théorème de Pythagore aux triangles rectangles  $ACH$  et  $BCH$  :

Alors on a

$$\left. \begin{array}{l} h_C^2 = b^2 - c_1^2 \\ h_C^2 = a^2 - (c - c_1)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 - c_1^2 = a^2 - (c - c_1)^2$$

En développant et en réduisant, on a

$$b^2 - \cancel{c_1^2} = a^2 - c^2 + 2cc_1 - \cancel{c_1^2} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cc_1$$





Finalement avec  $\cos(\alpha) = \frac{c_1}{b} \Rightarrow c_1 = b \cdot \cos(\alpha)$  on obtient :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

En faisant le même raisonnement sur les autres hauteurs ( $h_A, h_B$ ), on obtient les égalités manquantes, à savoir

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \text{ et } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

□

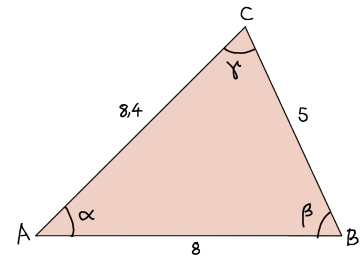
### Remarques

1. Si  $\gamma = 90^\circ$  alors  $c^2 = a^2 + b^2 - \underbrace{2ab \cdot \cos(90^\circ)}_{=0} = a^2 + b^2$  et **on retrouve le Théorème de Pythagore !**
2. La démonstration du théorème du cosinus, dans ce cours, est présentée avec un triangle ayant 3 angles aigus. Si on considère un angle obtus, on obtient les mêmes relations qu'avec 3 angles aigus.
3. Si  $\alpha$  est un angle du triangle, la connaissance de  $\cos(\alpha)$  permet de déterminer sans ambiguïté l'angle  $\alpha$  : il n'y a qu'un angle compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  tel que  $\cos(\alpha) = \nu$  si  $-1 \leq \nu \leq 1$ .

### Exemple

On cherche  $\alpha$ , alors

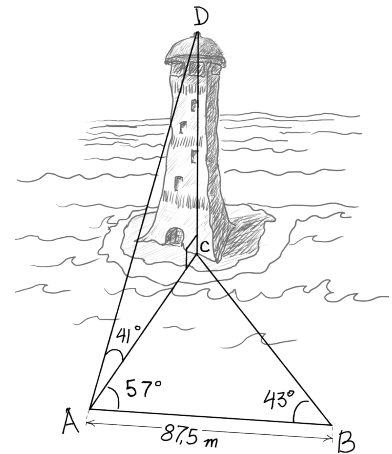
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \\ 5^2 &= 8^2 + 8,4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8,4 \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \\ 5^2 - 8^2 - 8,4^2 &= -134,4 \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \\ \frac{5^2 - 8^2 - 8,4^2}{-134,4} &= \cos(\alpha) \Leftrightarrow \\ 0,8152 &\approx \cos(\alpha) \Leftrightarrow \\ \alpha &\approx \cos^{-1}(0,8152) \approx 35^\circ \end{aligned}$$



## 8.4 Exercices

### Exercice 1

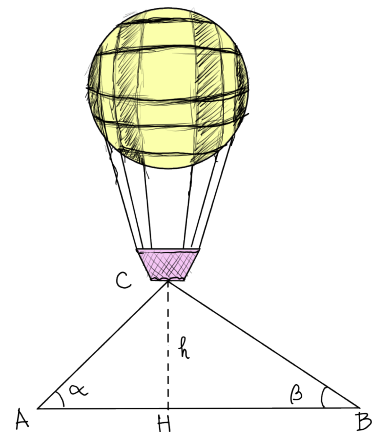
Calculer la hauteur  $h$  du phare à l'aide des données du problème (voir figure).



Remarque : Le dessin est en perspective et on considère comme négligeable la hauteur du rocher sur lequel le phare est construit.

### Exercice 2

Les angles d'élévation d'un ballon à partir de deux points  $A$  et  $B$  au sol sont respectivement de  $\alpha = 47^\circ$  et  $\beta = 24^\circ$ . Les points  $A$  et  $B$  sont distants de 8,4 km et le ballon se situe entre ces points, dans un même plan vertical.

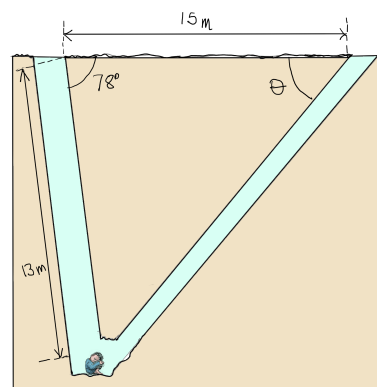


Calculer l'altitude  $h$  du ballon en mètre.

### Exercice 3

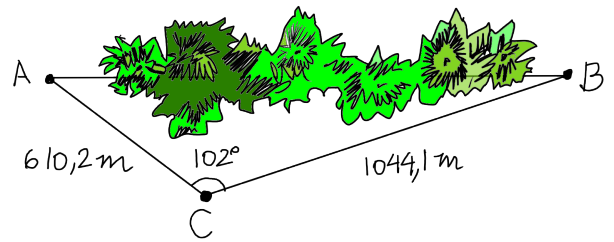
Un enfant est prisonnier au fond du puits d'une mine, dont le couloir mesure 13 m et forme un angle de  $78^\circ$  avec l'horizontale. Un tunnel de sauvetage est creusé à 15 m de l'ouverture de la mine (voir figure).

À quel angle  $\theta$ , le tunnel de sauvetage doit-il être creusé ?



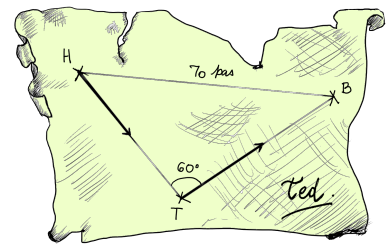
**Exercice 4**

Calculer la distance entre le point  $A$  et le point  $B$  en mètre.

**Exercice 5**

En 1872, le terrible bandit Ted avait dévalisé une diligence chargée d'or et enfoui son magot dans une ville abandonnée.

Or, la semaine dernière, le célèbre Théo Raime, en fouillant sur un marché aux puces, a découvert un vieux croquis manuscrit, dont voici le contenu :



Un mot de Ted complète ce document :

*“Je suis parti de l'hôtel (H) dans une certaine direction puis j'ai enterré mon trésor (T). J'ai ensuite tourné de  $60^\circ$  et je suis arrivé au bar (B). J'ai compté en tout 110 pas.”*

Théo Raime décide aussitôt de déterminer la position de tous les points susceptibles de cacher le trésor.

Aidez-le en indiquant la direction précise à prendre depuis l'hôtel et la distance à parcourir. **Attention** : il y a peut-être plusieurs solutions.



# 9 Cercles et disques

## Sommaire

---

<b>9.1 Définitions et rappels</b> . . . . .	<b>9-2</b>
<b>9.2 Périmètre et aire du disque</b> . . . . .	<b>9-4</b>
<b>9.3 Démonstration du calcul de l'aire du disque</b> . . . . .	<b>9-6</b>
<b>9.4 Longueur d'un arc et aire d'un secteur</b> . . . . .	<b>9-7</b>
<b>9.5 Exercices</b> . . . . .	<b>9-9</b>

---

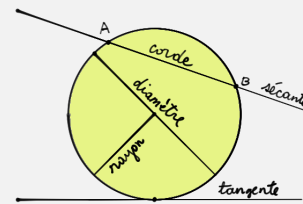
## 9.1 Définitions et rappels

---

- Un **cercle** est un ensemble de points situés à une même distance d'un point donné.
- Le point donné est le **centre**  $C$  et la distance donnée le **rayon**  $r$  du cercle.
- Un **disque** est une partie finie du plan délimitée par un cercle.
- Une droite est une **sécante** d'un cercle si elle coupe ce cercle en deux points  $A$  et  $B$  distincts.
- Le segment limité par les deux points d'intersection d'une sécante est une **corde** (on peut la voir aussi comme l'intersection d'une sécante et d'un disque).

Le terme **diamètre**  $d$  est utilisé dans deux sens différents : d'une part, c'est

- une corde d'un cercle passant par le centre de ce cercle et d'autre part c'est la longueur de cette corde.
- De la même façon, le terme **rayon** est utilisé pour un segment joignant le centre d'un cercle à un point de ce cercle et aussi pour la longueur de ce segment. (remarque :  $d = 2r$ )
- Une droite est une **tangente** d'un cercle si elle coupe ce cercle en un seul point  $T$ . Cette tangente fait un angle droit avec le rayon.
- Un **angle au centre** est un angle dont le sommet est situé au centre d'un cercle.

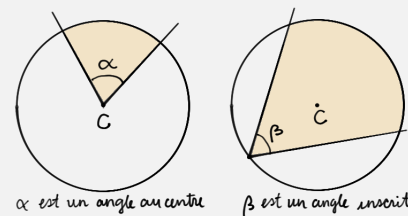


Un **angle inscrit** dans un cercle est un angle dont le sommet est situé sur le cercle et dont les côtés coupent le cercle.

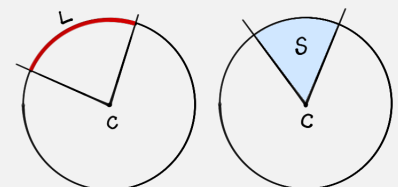
- Un **arc de cercle** est la partie d'un cercle interceptée par un angle au centre (c'est une courbe).

Un **secteur de disque** est la partie

- d'un disque interceptée par un angle au centre (c'est une surface).



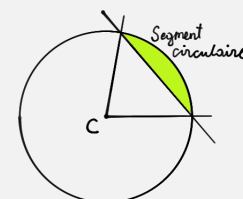
$\alpha$  est un angle au centre  $\beta$  est un angle inscrit



$L$  est un arc de cercle  $S$  est un secteur de disque

On appelle **segment circulaire** la

- portion de disque comprise entre un arc et la corde qui le sous-tend.



## 9.2 Périmètre et aire du disque

### Rappels

Le **périmètre** d'un disque (ou d'un cercle) est donné par la formule

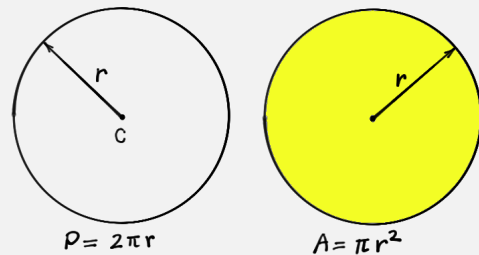
$$P = 2\pi r$$

L'**aire** de ce même disque est donnée par la formule

$$A = \pi r^2$$

Dans les deux formules on a

$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028$   
 $8419716939937510582097494459230781$   
 $64062862089986280348253421170676 \dots$



**Remarquer** que

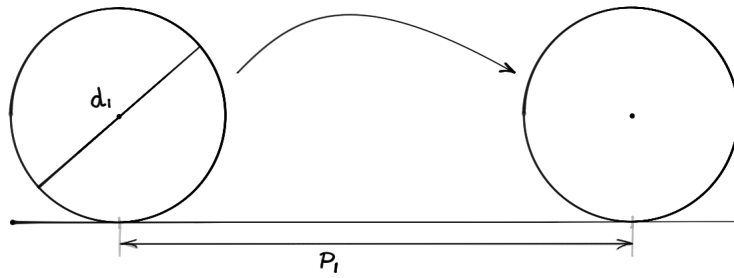
1. Dans ces formules,  $r$  représente le rayon du cercle et  $\pi$  un nombre particulier qui se lit "pi".
2. Le nombre  $\pi$ , est **un nombre irrationnel**; cela signifie qu'on ne peut pas l'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers et que son écriture décimale est illimitée et non périodique.
3. Dans les calculs à la main, on prend en général l'**approximation**  $\pi \approx 3,14$ . La calculatrice est munie d'une touche  $\pi$  qui donne une dizaine de décimales exactes.

**La définition du nombre  $\pi$**

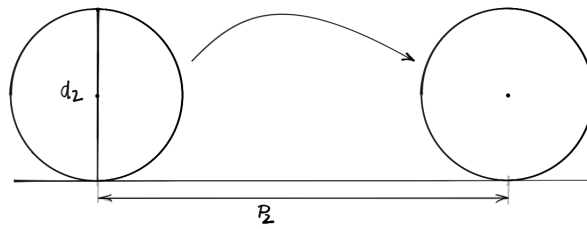
**Expérience**

Prenons une roue, peignons-la et faisons lui faire un tour sur le sol. Mesurons ensuite, la longueur de la trace faite par la peinture (périmètre  $P_1$  de la roue) et le diamètre  $d_1$  de la roue. Calculons pour finir le rapport entre le périmètre et le diamètre; on constate que  $\frac{P_1}{d_1} \approx 3,14$ .





Prenons une roue avec un diamètre  $d_2$  différent de  $d_1$ . Dans ce cas nous obtenons aussi :  $\frac{P_2}{d_2} \approx 3,14$



### Conclusion

Le rapport entre le *périmètre* et le *diamètre* du cercle (roue) est constant et vaut environ 3,14. Donc on définit :

$$\frac{P}{d} = \pi \Leftrightarrow P = \pi \cdot d \Leftrightarrow P = \pi \cdot 2 \cdot r \Leftrightarrow P = 2\pi r$$

avec  $\pi \approx 3,14$ .

#### Définition 9.2.1 : "pi"

$\pi$  est défini comme étant le rapport constant entre le périmètre et le diamètre d'un cercle.

#### Remarquer que

1. Le périmètre  $P$  du cercle est *proportionnel* à son diamètre  $d$  car  $P = \pi d$ .  
Application : Si le diamètre du cercle triple, le périmètre triple aussi.
2. Le périmètre  $P$  du cercle est *proportionnel* à son rayon  $r$  car  $P = 2\pi r$ .  
Application : Si le rayon du cercle diminue de moitié, le périmètre diminue aussi de moitié.

#### La notation $\pi$

$\pi$  est la seizième lettre de l'alphabet grec et la première lettre du mot grec *περιμετρον*, *périmètre* ou *περιφερεια*, *circonférence*, *périphérie*. Il y a plusieurs versions sur l'apparition du symbole, mais l'époque est toujours la même : vers 1600. **William Oughtred**

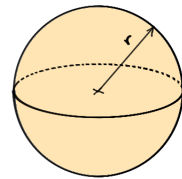
(1574-1660) en 1674 et **Isaac Barrow** (1630-1677) utilisent le symbole  $\pi$  pour représenter le périmètre d'un cercle de diamètre *un*. **Euler**, utilise la lettre  $\pi$ , dans un ouvrage sur les séries, publié en latin en 1737 puis, en 1748, dans son "Introduction à l'analyse infinitésimale", ce qui imposa définitivement cette notation.

### Le nombre $\pi$ , un nombre "naturel" ?

$\pi$  apparaît dans de très nombreux problèmes physiques et mathématiques. Par exemple, on trouve, par intégration<sup>1</sup> des formules classiques telles que :

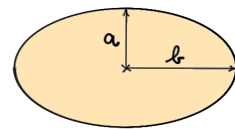
— Le volume d'une sphère de rayon  $r$  :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



— Le périmètre d'une ellipse :

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



**En astronomie**,  $\pi$  est important puisque les planètes ont en première approximation une forme de sphère et décrivent des trajectoires elliptiques autour du Soleil.

Le nombre  $\pi$ , fait également partie des **formules d'électromagnétisme**. Et dans de nombreux autres cas. . . .

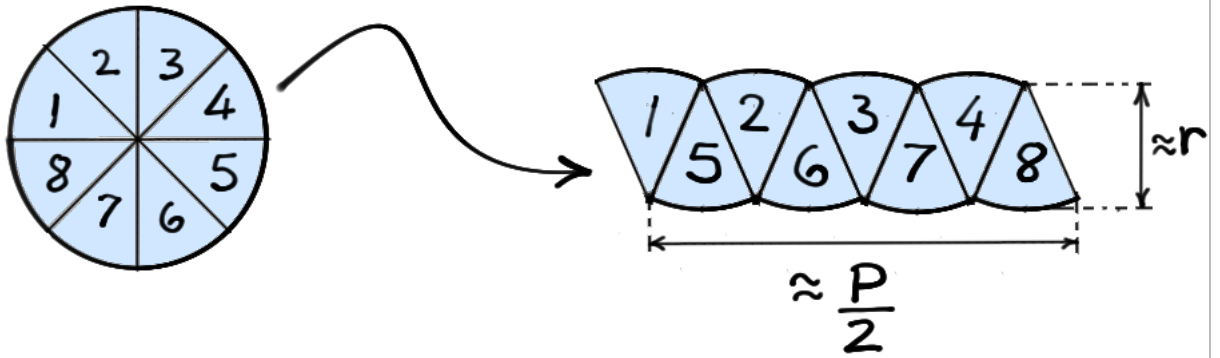
## 9.3 Démonstration du calcul de l'aire du disque

*Démonstration.*

### Expérience

- \* On suppose connue la formule donnant le périmètre du disque c'est-à-dire :  
 $P = 2\pi r$
- \* On découpe un disque en un nombre pair de secteurs de disques égaux et on dispose ces secteurs de façon à former une figure qui ressemble à un "parallélogramme ondulé".

1. Voir le cours de Monsieur Picchione, page 27 : [https://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs/serge-picchione/b1\\_college\\_analyse-partie-01\\_4e\\_2018-2019.pdf](https://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs/serge-picchione/b1_college_analyse-partie-01_4e_2018-2019.pdf)



- \* La hauteur du "parallélogramme ondulé" est environ égale au rayon  $r$  du disque.
- \* La base du "parallélogramme ondulé" est environ égale au demi-périmètre du disque, c'est-à-dire :  $\frac{P}{2}$
- \* L'aire  $A$  du "parallélogramme ondulé" est donc environ égale à  $A \approx r \cdot \frac{P}{2} = r \cdot \frac{2\pi r}{2} = \pi r^2$

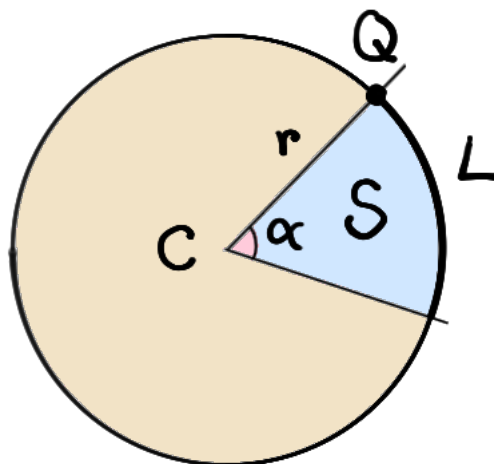
### Conclusion

Si on augmente indéfiniment le nombre de secteurs de disque on peut admettre que l'aire  $A$  du "parallélogramme ondulé" et donc du disque, vaut exactement

$$A = \pi r^2$$

□

## 9.4 Longueur d'un arc et aire d'un secteur



L'aire du secteur  $S$ , la mesure de l'angle au centre  $\alpha^\circ$ , la longueur de l'arc  $L$  et le nombre de tours  $x$  que le point  $Q$  a parcouru sur le cercle, sont des **grandeurs**

## 9 Cercles et disques

**proportionnelles.** On a alors l'égalité entre les rapports suivants :

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi r} = \frac{x \text{ tours}}{1 \text{ tours}}$$

## 9.5 Exercices

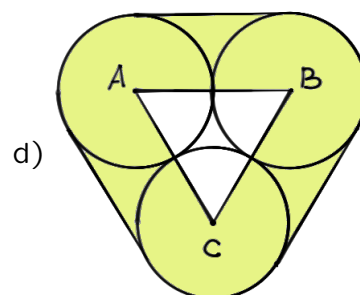
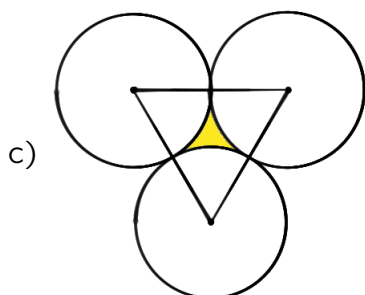
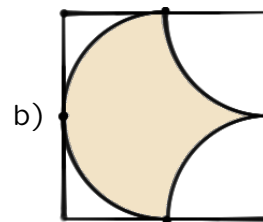
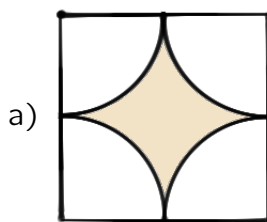
### Exercice 1

Compléter les lignes du tableau suivant : (précision : 2 décimales)

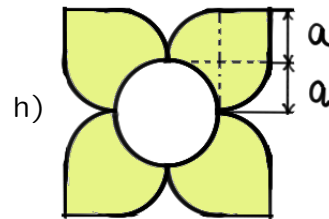
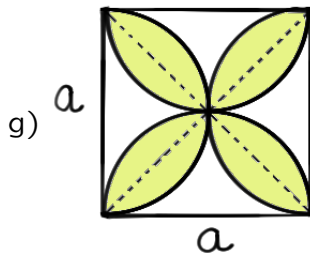
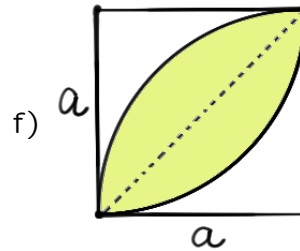
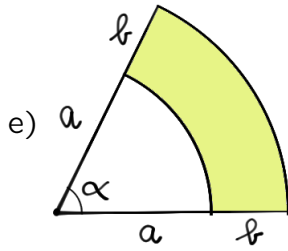
	$\alpha$	$r$	$L$	$S$	Nb de tours
(i)	$45^\circ$	8,31 cm			
(ii)		50 m	90,57 m		
(iii)	$120^\circ$		9,70 cm		
(iv)		5,88 cm		$90 \text{ cm}^2$	
(v)		10 cm			$\frac{1}{3}$
(vi)			30 m		$\frac{1}{4}$
(vii)	$20^\circ$			$90 \text{ dm}^2$	
(viii)				$10,12 \text{ m}^2$	$\frac{3}{4}$

### Exercice 2

Calculer l'aire et le périmètre des surfaces ombrées suivantes :



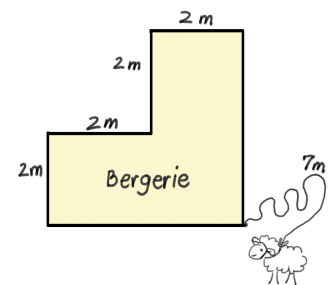
## 9 Cercles et disques



### Exercice 3

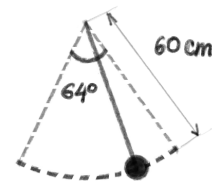
Un "pauvre" mouton était accroché par une corde de 7 m de long à l'extrémité sud-est d'une bergerie dans un champ tout plat.

Quelle était donc la superficie d'herbe ainsi mise à sa disposition? (Indication : La corde peut être tendue et le mouton ne peut pas rentrer dans la bergerie.)



### Exercice 4

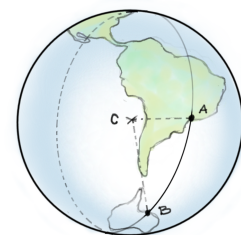
Un pendule oscille au bout d'une corde de 60 cm. Sachant que l'angle décrit est de  $64^\circ$ , trouver la longueur de l'arc décrit.



### Exercice 5

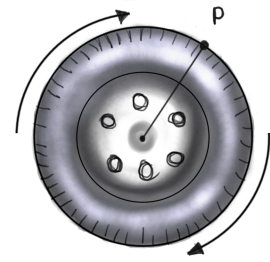
La distance entre deux points  $A$  et  $B$  sur Terre se mesure le long d'un cercle dont le centre  $C$  est au centre de la Terre et dont le rayon est égal à la distance de  $C$  à la surface (voir figure).

- Calculer la distance en kilomètres entre  $A$  et  $B$  si l'angle  $ACB = 60^\circ$ .
- Si deux points  $A$  et  $B$  sont éloignés de 1000 km, déterminer l'angle  $ACB$  en degrés.



**Exercice 6**

Une roue pour une petite voiture a un diamètre de 56 cm. Si le véhicule se déplace à une vitesse de 96 km/h, calculer le nombre de tours que la roue fait par seconde.

**Exercice 7**

La Terre effectue une rotation complète autour de son axe en 23 heures, 56 minutes et 4 secondes. Son rayon à l'équateur est selon les mesures contemporaines d'environ 6 378 km.

- (a) Calculer de combien de degrés la Terre tourne en une seconde.
- (b) Calculer la distance parcourue (en mètres) pendant une seconde par un point  $P$  situé sur l'équateur, dû à la rotation de la Terre.





# 10 Volumes

## Sommaire

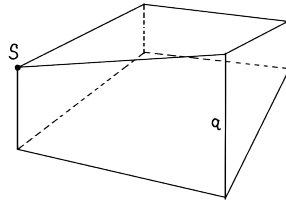
---

10.1 Généralités . . . . .	10-2
10.2 Parallélépipède rectangle et cube . . . . .	10-3
10.3 Cylindre droit . . . . .	10-3
10.4 Sphère . . . . .	10-5
10.5 Cône droit . . . . .	10-5
10.6 Pyramide . . . . .	10-6
10.7 Exercices . . . . .	10-7

---

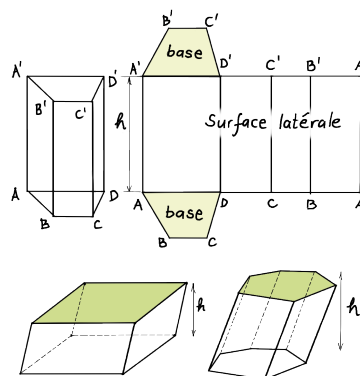
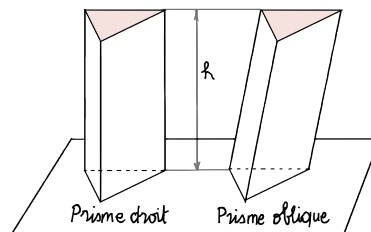
## 10.1 Généralités

On appelle **polyèdre** un solide limité de toutes parts par des portions de plan.



Les **faces** d'un polyèdre sont les polygones plans qui composent la surface du polyèdre. Les **arêtes** ("a" sur la figure) d'un polyèdre sont les côtés des polygones qui forment les faces du polyèdre ou, autrement dit, les segments intersectant deux faces. Les **sommets** ("S" sur la figure) du polyèdre sont les extrémités des arêtes. Le **développement** d'un polyèdre est la figure plane obtenue par la mise à plat de sa surface.

Soit deux polygones superposables situés dans des plans parallèles non confondus. Un **prisme** ayant pour bases ces polygones est le solide engendré par la translation qui amène un des deux polygones sur l'autre. Si la translation a une direction perpendiculaire aux plans des polygones, le prisme est **droit** (et ses faces latérales sont des rectangles), sinon il est **oblique** (et ses faces latérales sont des parallélogrammes quelconques). La **hauteur** ("h" sur la figure) d'un prisme est la distance entre les plans des bases mesurée sur n'importe quelle perpendiculaire à ces plans.



En général, si  $B$  désigne l'aire de la base et  $h$  la hauteur d'un solide, alors le volume  $V$  du solide est défini par la formule

$$V = B \cdot h$$

Les formules permettant de calculer le volume de quelques solides élémentaires sont présentées ci-après.

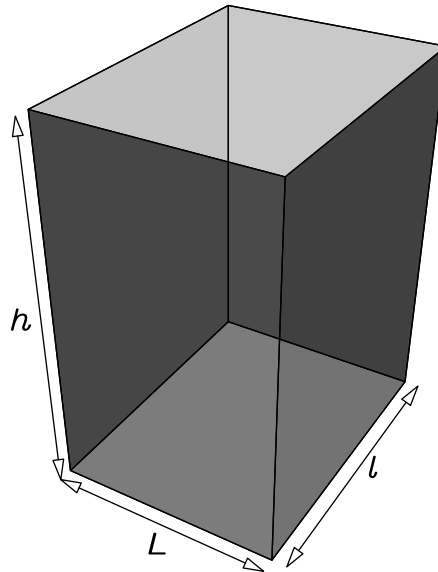
## 10.2 Parallélépipède rectangle et cube

---

On appelle **dimensions** d'un parallélépipède rectangle les longueurs de trois arêtes ayant un sommet commun. Le **parallélépipède rectangle** dont la base est un rectangle de longueur  $L$  et de largeur  $l$  et dont la hauteur est  $h$  a pour volume le nombre

$$V = L \cdot l \cdot h$$

soit le produit des trois dimensions.



En particulier, le **cube** d'arête  $c$  (c'est-à-dire de côté  $c$ ) a pour volume le nombre

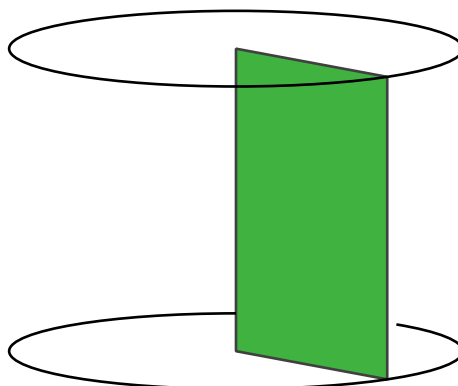
$$V = c^3$$

appelé le cube de  $c$ .

## 10.3 Cylindre droit

---

Un **cylindre droit** est un solide engendré par la rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés.

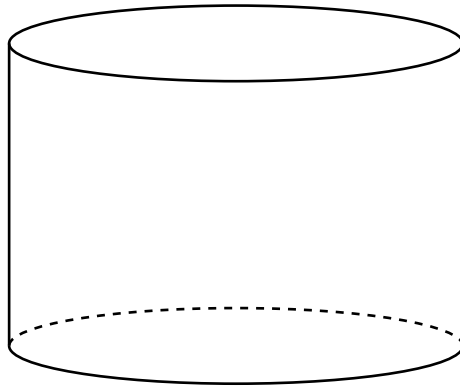


Ce côté est l'axe de symétrie et de rotation du cylindre. Le cylindre dont la base est

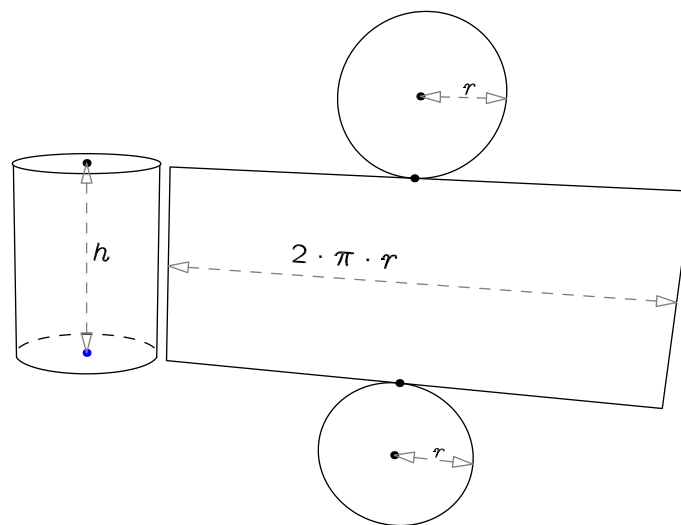
## 10 Volumes

un disque de rayon  $r$  et dont la hauteur est  $h$  a pour volume le nombre

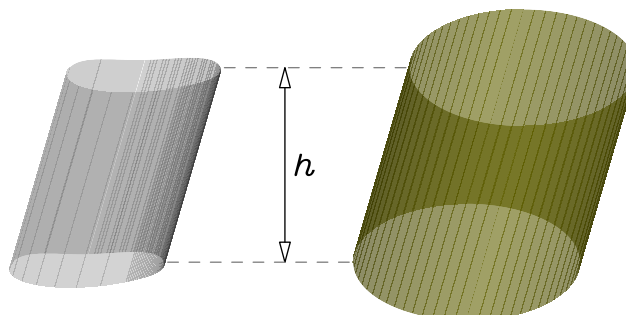
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Ci-après, le développement d'un cylindre droit.



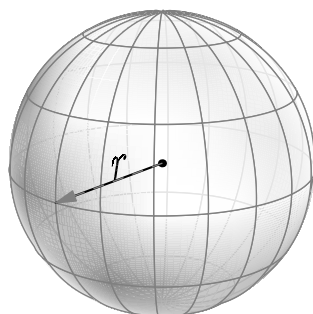
On notera qu'il existe des cylindres non circulaires, c'est-à-dire dont la base est bordée par une courbe inconnue (ni un disque, ni une ellipse pour ne citer que ces exemples), et obliques, respectivement sur les illustrations suivantes :



## 10.4 Sphère

La **sphère** de rayon  $r$  a pour volume le nombre

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

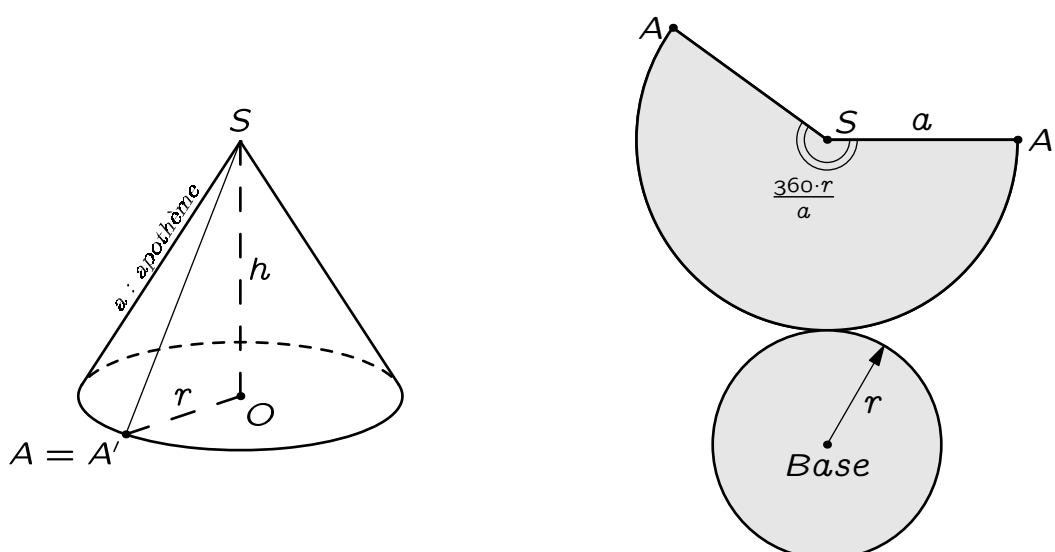


Il est démontré qu'il n'existait pas de développement de la sphère. Cependant, dans la pratique, on peut approcher la sphère à l'aide d'un choix de surfaces polygonales (donc développables) plaquées (cousues) dessus (*ballon de football, de volley-ball, etc.*).

## 10.5 Cône droit

Le **Cône droit** est limité par un disque de base de rayon  $r$  et une surface latérale conique ; son sommet  $S$  est situé sur l'axe du disque, c'est-à-dire sur la perpendiculaire en son centre au plan du disque de base. Le cône a pour volume le nombre

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$



Le cône droite est engendré par la révolution (*tour complet*) du triangle rectangle  $SOA$  autour de l'axe  $SO$ . Il existe également des cônes dits obliques.

## 10.6 Pyramide

La **pyramide** est un solide limité par une base polygonale quelconque (*c'est-à-dire à  $n$  côtés*) et des faces latérales triangulaires ayant un sommet ( $S$ ) commun. La hauteur ( $h$ ) d'une pyramide est la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le plan de la base.

Une pyramide est triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, etc. Selon que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone... Une pyramide est dite **régulière** lorsque sa base est un polygone régulier et que sa hauteur « tombe » au centre du polygone ; ses arêtes sont égales en longueur et ses faces latérales sont donc des triangles isocèles.

Par exemple, la pyramide de Khéops, à Gizeh (*Egypte*), en photo ci-dessous, est une pyramide régulière à base carrée ; ses faces latérales sont des triangles isocèles presque équilatéraux.

La pyramide a pour volume le nombre

$$V = \frac{\text{Base} \cdot h}{3}$$

où *Base* désigne l'aire de la base.

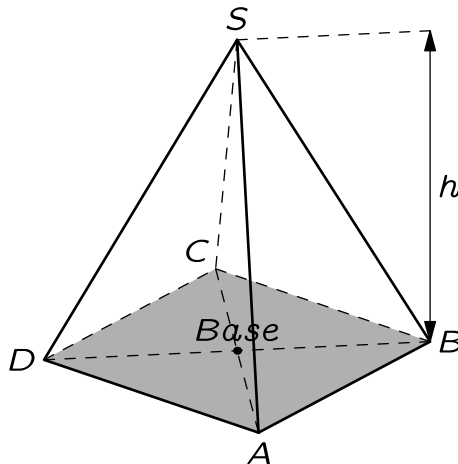
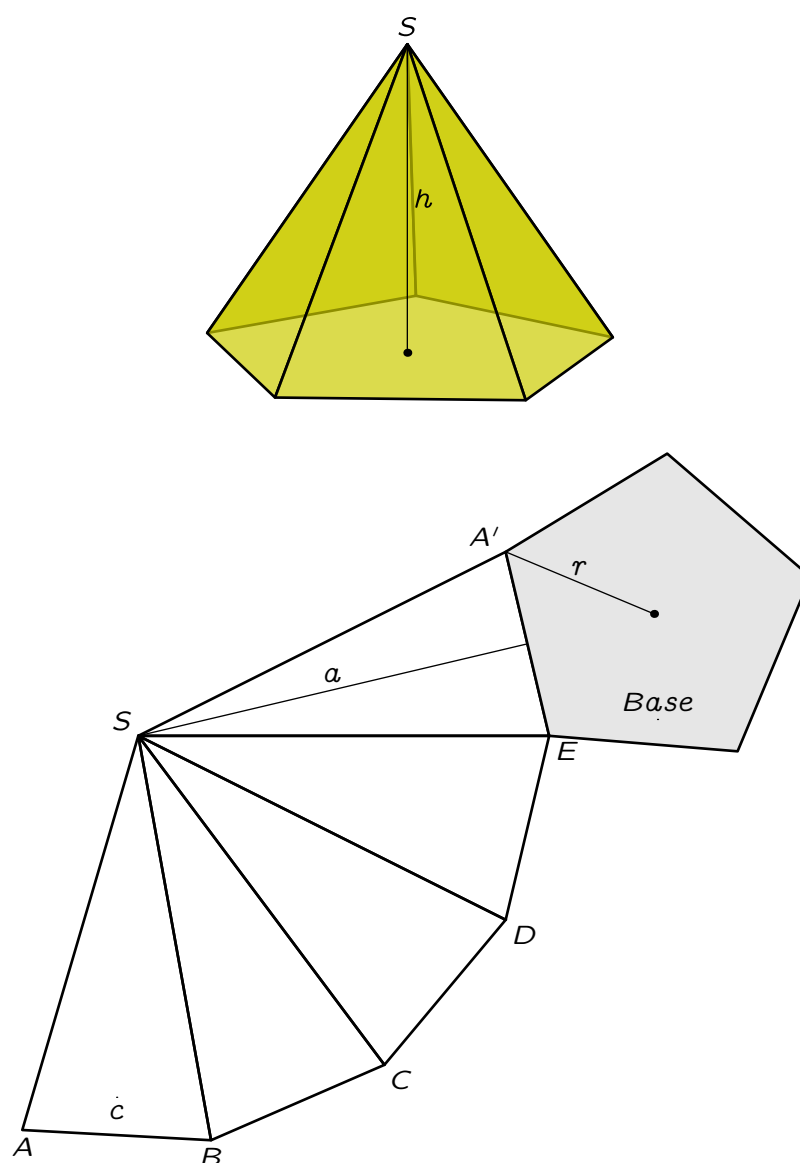


Illustration d'une pyramide régulière à base pentagonale et de son développement.



## 10.7 Exercices

---

Voir la série 13.





# 11 Probabilités

## Sommaire

---

<b>11.1 Introduction</b>	<b>11-2</b>
<b>11.2 Expérience aléatoire, événements</b>	<b>11-3</b>
11.2.1 Rappel : opérations de la théorie des ensembles	11-4
11.2.2 Opérations sur les événements	11-4
<b>11.3 Notion de probabilité et axiomes</b>	<b>11-5</b>
11.3.1 Probabilités 'combinatoires'	11-5
11.3.2 Axiomes des probabilités	11-6
<b>11.4 Probabilités conditionnelles</b>	<b>11-10</b>
<b>11.5 Épreuves successives</b>	<b>11-12</b>
<b>11.6 Théorème de Bayes</b>	<b>11-14</b>

---

## 11.1 Introduction

---

Le *calcul des probabilités* a pour objectif un traitement mathématique de la notion intuitive de hasard. Ses origines remontent au XVII<sup>e</sup> siècle durant lequel des mathématiciens célèbres, Pascal, Fermat et Jacques Bernouilli, se sont penchés sur des questions se rapportant aux jeux de hasard. Cette association explique pourquoi les probabilités, en tant que discipline mathématique, ont toujours gardé un caractère un peu particulier. Pendant une période, elles ne constituaient en effet guère plus qu'une collection de méthodes combinatoires et algébriques.

Ensuite, les probabilités ont trouvé un nombre croissant d'applications dans des domaines plus scientifiques ; d'abord dans des problèmes de statistique démographique, en théorie des erreurs d'observation et en biologie. Au XX<sup>e</sup> siècle, un nombre croissant de disciplines, qui s'étendent des sciences naturelles et techniques jusqu'aux sciences sociales et économiques, utilisent des méthodes probabilistes. On peut ainsi étudier de manière rigoureuse des phénomènes pour lesquels les *modèles mathématiques déterministes* s'avèrent inappropriés.

Cette extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard n'a été possible que grâce à un développement théorique auquel de nombreux mathématiciens ont contribué. Ce n'est que dans la première partie du XX<sup>e</sup> siècle *qu'une base axiomatique* a été établie, qui attache au calcul des probabilités une théorie rigoureuse et qui en fait ainsi une branche à part entière des mathématiques.

## 11.2 Expérience aléatoire, événements

### Définition 11.2.1 : Expérience aléatoire

Une *expérience* est dite **aléatoire** ou *stochastique* s'il est impossible de prévoir son résultat. En principe, on admet qu'une expérience aléatoire peut être répétée indéfiniment dans des conditions identiques, son résultat peut donc varier d'une réalisation à l'autre.

### Exemples

- On jette un dé et l'on observe le résultat obtenu.
- Si l'on lance trois fois de suite une pièce de monnaie, on peut distinguer 8 résultats possibles :  $PPP, PPF, \dots, FFF$ .
- On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que le côté *face* sorte pour la première fois.

### Définition 11.2.2

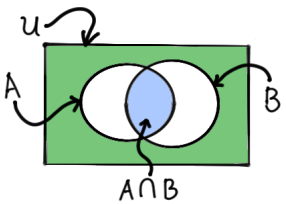
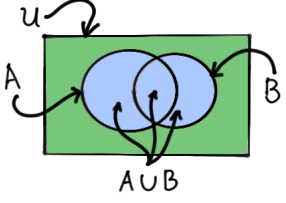
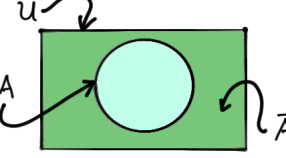
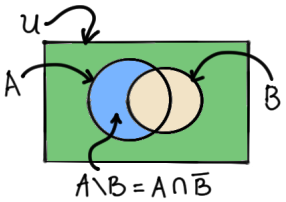
- L'ensemble, noté en général  $\Omega$ , de tous les résultats d'une expérience aléatoire est appelé **univers** ou **espace des résultats possibles** de cette expérience. Selon la nature de cette dernière, l'ensemble  $\Omega$  peut être fini (exemple (a) et (b)) ou infini (exemple (c)).
- Le nombre d'éléments d'un ensemble  $\Omega$  est noté  $\#\Omega$  ou  $m(\Omega)$ , pour *mesure* de l'ensemble. Par exemple
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$       $\#\Omega = 6 = m(\Omega)$
  - $\Omega = \{f, pf, ppf, pppf, \dots\}$       $\#\Omega = \infty = m(\Omega)$
- On appelle **événement** tout sous-ensemble de  $\Omega$ . Un événement qui contient un unique élément de  $\Omega$  est un **événement élémentaire**.

### Exemple

Si on jette un dé à 6 faces non truqué, alors on aura  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $\#\Omega = 6$  et on pourra définir les événements suivants

- $A$  est l'événement 'Un nombre pair est tiré', alors  $A = \{2, 4, 6\}$
- $B$  est l'événement 'Un nombre impair est tiré', alors  $B = \{1, 3, 5\}$
- $C$  est l'événement 'Un nombre  $\geq 4$  est tiré', alors  $C = \{4, 5, 6\}$
- $D$  est l'événement 'Le plus petit nombre tiré', alors  $D = \{1\}$

## 11.2.1 Rappel : opérations de la théorie des ensembles

Définition	Notation	Illustration
L' <b>intersection</b> de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments qui se trouvent à la fois dans $A$ et dans $B$ .	$A \cap B$	
La <b>réunion</b> ou l' <b>union</b> de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments qui se trouvent dans $A$ , dans $B$ ou dans leur intersection.	$A \cup B$	
Le <b>complémentaire</b> d'un ensemble $a$ est l'ensemble des éléments qui ne se trouvent pas dans $A$ .	$\bar{A}$	
La <b>différence</b> de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments contenus dans $A$ , mais pas dans $B$ .	$A \setminus B$	

## 11.2.2 Opérations sur Les événements

Les événements associés à une expérience aléatoire étant par définition des sous-ensembles de l'univers  $\Omega$ , il est naturel de définir des **opérations** sur les événements à l'image des opérations de la théorie des ensembles, l'une d'entre elles est **unaire** (le contraire) et les autres **binaires**. Ainsi

$A \cap B$  est appelé événement "A et B" (réalisation de A et de B)

$A \cup B$  est appelé événement "A ou B" (réalisation de A ou B ou que les deux se réalisent)

$\bar{A}$  est appelé événement "contraire de A" (non réalisation de A)

$A - B$  est appelé événement "A mais pas B" (réalisation de A mais pas de B)

Deux événements  $A$ ,  $B$  sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent être réalisés simultanément, c'est-à-dire si  $A \cap B = \emptyset$ .

## Exemples

$A \cup C = \{2; 4; 5; 6\}$  événement : 'Un nombre pair **ou** plus grand que quatre'

$B \cap C = \{5\}$  événement : 'Un nombre impair **et** plus grand que quatre'

$\bar{C} = \{1; 2; 3\}$  événement 'Un nombre plus petit que quatre'

$B - C = \{1; 3\}$  événement 'Un nombre impair **mais pas** plus grand que quatre'

$A \cap B = \emptyset$  les deux événements sont **incompatibles** (un nombre ne peut pas être pair et impair à la fois).

## 11.3 Notion de probabilité et axiomes

Le but de la présente section est d'attribuer à chaque événement  $A \in \Omega$  un nombre réel, appelé probabilité de cet événement et noté  $P(A)$ . La valeur  $P(A)$  est une mesure des chances de réalisation de l'événement  $A$  lors de l'expérience aléatoire considérée.

### 11.3.1 Probabilités 'combinatoires'

Soit  $\Omega$  un univers fini constitué de  $N$  événements élémentaires sur lequel on fait l'hypothèse d'*équiprobabilité* de réalisation des  $N$  événements élémentaires. On suppose ainsi que tous les événements élémentaires ont 'la même chance' de se réaliser.

Soit  $A$  un événement quelconque constitué de  $k$  événements élémentaires de  $\Omega$ .

On en déduit que la **probabilité d'un événement**  $A$ , noté  $P(A)$  est le nombre :  $\frac{k}{N}$ .

Cette formule s'énonce souvent comme

#### Définition 11.3.1

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

## Exemples

(a) Quelle est la probabilité de  $A$  = 'obtenir un nombre pair' en lançant un dé à six faces ?

Cas favorables : 3

Cas possibles : 6

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

(b) Quelle est la probabilité de  $B$  = 'obtenir trois fois le même côté' en lançant trois fois une pièce de monnaie ?

Cas favorables : 2

Cas possibles :  $2^3 = 8$

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$$

(c) On choisit un comité de 3 personnes parmi 5 hommes et 7 femmes. Quelle est la probabilité que les trois personnes choisies soient  $F$  = 'deux hommes et une femme' ?

Cas favorables :  $C_2^5 \cdot C_1^7 = 10 \cdot 7 = 70$

Cas possibles :  $C_3^{12} = 220$

$$P(F) = \frac{70}{220} = \frac{7}{22} = 31,8\%$$

### 11.3.2 Axiomes des probabilités

Soit  $\Omega$  un univers. On dit que l'on définit **une probabilité** sur les événements de  $\Omega$  si à tout événement  $A$  de  $\Omega$  on associe un nombre  $P(A)$ , appelé **probabilité de l'événement  $A$** .

Une probabilité doit 'intuitivement' satisfaire aux trois axiomes suivants :

#### Définition 11.3.2 : Axiomes des probabilités

- (i)  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega$  (la probabilité de tout événement est un nombre positif)
- (ii)  $P(\Omega) = 1$  (la probabilité de l'événement certain  $\Omega$  est égale à  $1 = 100\%$ )
- (iii) Si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  (la probabilité de la réunion de deux événements incompatibles est égale à la somme de leurs probabilités)

#### Remarque

Une probabilité  $P$  est une application de l'ensemble des parties de l'univers, noté  $\mathcal{P}(\Omega)$ , vers l'intervalle  $[0; 1]$  :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0; 1]$$

chaque élément de l'ensemble des parties de  $\Omega$  est un sous-ensemble de  $\Omega$ , cette notation permet d'utiliser le symbole  $\in$  :  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

**Exemple**

Si on jette un dé à 6 faces non truqué, l'univers est  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . On peut alors définir deux événements  $A$  et  $B$  tels que

$$A = \text{'un nombre pair est tiré'} = \{2; 4; 6\}$$

et

$$B = \text{'un nombre impair est tiré'} = \{1; 3; 5\}$$

Ainsi on a

$$A \cap B = \emptyset \text{ et } \Omega = A \cup B$$

et alors

$$P(\Omega) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

**Théorème 11.3.1 : Probabilité du complémentaire**

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

*Démonstration.*

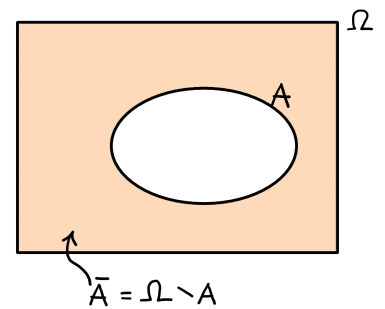
Sachant que

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

et

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

car  $A$  et  $\bar{A}$  sont des événements incompatibles, la probabilité de l'événement certain donne



$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) \\ &= P(A \cup \bar{A}) \\ &= P(A) + P(\bar{A}) \\ \Rightarrow P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

□

**Théorème 11.3.2 : Théorème 2**

$$P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$$

*Démonstration.*

Puisque

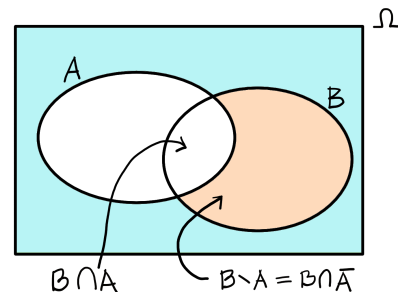
$$(B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A) = B$$

et

$$(B \cap \bar{A}) \cap (B \cap A) = \emptyset$$

car  $(B \cap \bar{A})$  et  $(B \cap A)$  sont des événements incompatibles, on peut prendre la probabilité de cette première égalité, et on a

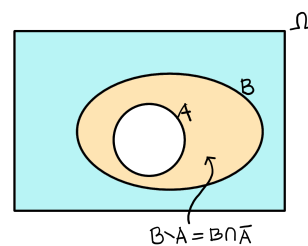
$$\begin{aligned} P(B) &= P((B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)) \\ &= P(B \cap \bar{A}) + P(B \cap A) \\ \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) &= P(B) - P(B \cap A) \end{aligned}$$



□

**Remarque**

Si  $A \subset B$  alors  $A \cap B = A$  et donc  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ .





**Théorème 11.3.3 : Théorème 3**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \subset \Omega$$

*Démonstration.*

(a) Si  $(A \cap B) = \emptyset$  alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset)$$

et on a terminé.

(b) Si  $(A \cap B) \neq \emptyset$  alors

$$A \cup B = (B - A) \cup A$$

et

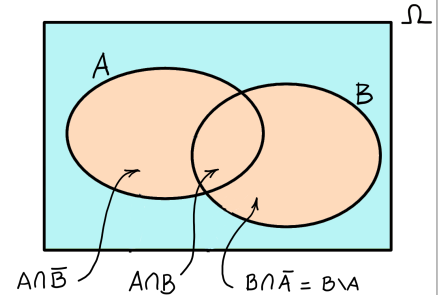
$$(B - A) \cap A = \emptyset$$

$B - A$  et  $A$  étant incompatibles.

Donc

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((B - A) \cup A) \\ &= P(B - A) + P(A) \quad \text{par l'axiome (iii)} \\ &= P(B) - P(B \cap A) + P(A) \quad \text{par le théorème 2} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

□

**Activité i**

Dans une entreprise qui compte 400 personnes, 300 d'entre elles sont assurées contre la maladie, 160 contre les accidents et 120 à la fois contre la maladie et les accidents.

Si l'on choisit au hasard une personne dans l'entreprise, quelle probabilité **en pourcent**, y a-t-il que cette personne soit assurée :

- contre la maladie, mais pas contre les accidents ?
- contre la maladie ou (non exclusif) les accidents ?
- ni contre la maladie, ni contre les accidents ?

## 11.4 Probabilités conditionnelles

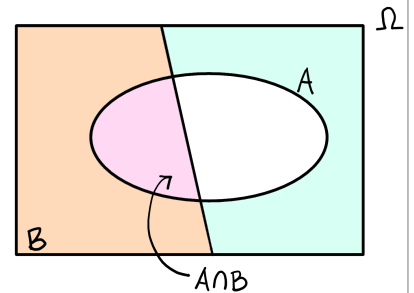
### Définition 11.4.1 : Probabilité conditionnelle

La probabilité qu'un événement  $A$  se réalise **sachant que**  $B$  s'est produit est appelée **probabilité conditionnelle**, et on écrit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

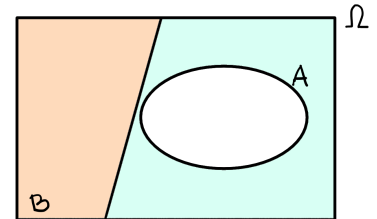
### Remarques

- (a)  $P(A|B)$  peut s'interpréter comme le fait que  $\Omega$  se restreint à  $B$  et que les résultats de  $A$  se restreignent à  $A \cap B$



- (b) Si  $A \cap B = \emptyset$  ( $A$  et  $B$  sont incompatibles),  $A$  ne peut pas se réaliser si  $B$  s'est déjà produit et donc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$$



- (c)  $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$

- (d) En général  $P(A|B) \neq P(B|A)$ .

### Exemple

On jette un dé à 6 faces non truqué. Alors  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $m(\Omega) = 6$ . Définissons les événements suivants  $A = \text{'2 sort'}$ ,  $B = \text{'un nombre pair sort'}$ , on peut donc calculer leur mesure et leurs probabilités :  $m(A) = 1$ ,  $m(B) = 3$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

L'intersection des deux a comme mesure  $m(A \cap B) = 1$  et sa probabilité vaut

$$P(A \cap B) = \frac{m(A \cap B)}{m(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Quand aux probabilités conditionnelles, on peut dire que

- La probabilité que '2 sorte' sachant qu'il s'agit "d'un nombre pair" est de

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

- La probabilité qu'un 'nombre pair' sorte sachant que '2 sorte' est de

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1$$

Et on a un exemple que  $P(A|B) \neq P(B|A)$ .

- La probabilité que '2 **ne** sorte **pas**' sachant qu'il s'agit "d'un nombre pair" est de

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

#### Théorème 11.4.1 : Théorème 4

Soient  $A, B, C, \dots$  un nombre fini (ou dénombrable) d'événements d'un univers  $\Omega$ . Alors

(a)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

(b)  $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|(A \cap B))$

(c)  $P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|(A \cap B)) \cdot P(D|(A \cap B \cap C))$

*Démonstration.* (a) Résulte de  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

(b) Résulte de  $P(C|(A \cap B)) = \frac{P((A \cap B) \cap C)}{P(A \cap B)}$

$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C|(A \cap B)) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|(A \cap B))$$

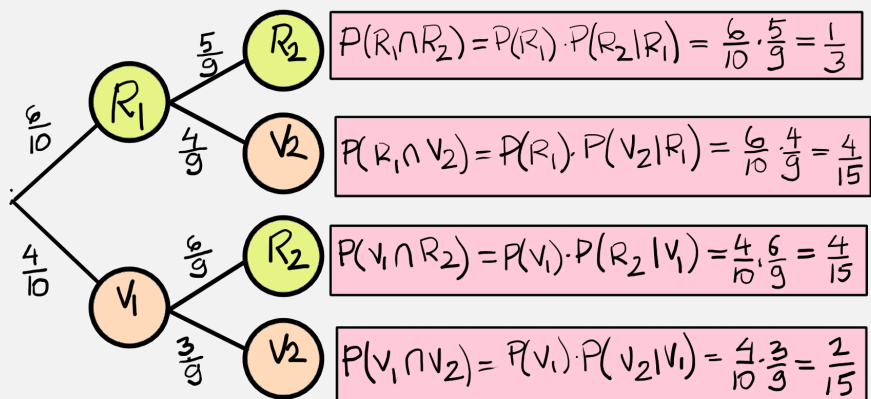
(c) Laissé en exercice. □

## 11.5 Épreuves successives

On a souvent affaire à des problèmes qui se décomposent en **épreuves successives** (indépendantes ou non). On représente souvent ce type de problème sous la forme **d'un arbre de classement**.

### Exemple : épreuves successives dépendantes

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules vertes. On tire **successivement** et **sans remise** 2 boules de l'urne. On peut représenter cette situation par **un arbre**. Au bout de chaque branche, on note l'événement qu'elle représente et, sur la branche, on note la probabilité de l'événement associé. Cela donne : (dessin)



### Propriétés et remarques

- (a) Les **chemins** de l'arbre sont des **événements élémentaires et incompatibles** deux à deux.

On a donc dans l'exemple

$$\begin{aligned}
 P(\Omega) &= P((R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)) \\
 &= P(R_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap V_2) + P(V_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap V_2) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

- (b) La **probabilité d'un chemin** est égale au **produit** des probabilités des branches qui forment ce chemin (voir théorème 4).
- (c) Pour calculer la probabilité d'un événement qui est la **réunion** de plusieurs chemins, on additionne les probabilités de ces chemins.

**Activité ii**

Quelle probabilité a-t-on de tirer

- (a) deux boules de même couleur ?
- (b) en dernier lieu une boule verte ?
- (c) deux boules de couleur verte ?
- (d) une boule rouge sachant qu'une boule verte a été tirée ?

## 11.6 Théorème de Bayes

### Exemple d'introduction

Une entreprise utilise trois types d'ampoules,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  dans la proportion de 60%, 30% et 10%. La probabilité que ces ampoules fonctionnent est respectivement de 90%, 80% et de 50%.

Quelle est la probabilité qu'une ampoule défectueuse provienne de  $T_1$  ?

#### Solution

Avec un arbre :

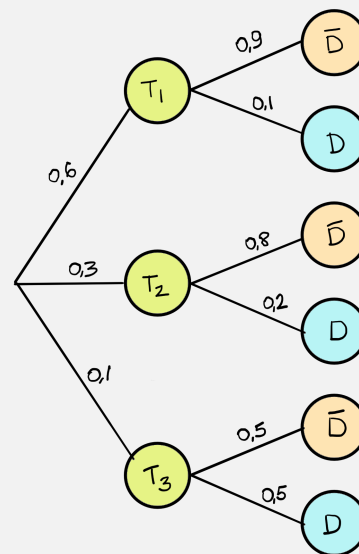
$T_1$  = 'utiliser une ampoule  $T_1$ '

$T_2$  = 'utiliser une ampoule  $T_2$ '

$T_3$  = 'utiliser une ampoule  $T_3$ '

$D$  = 'ampoule défectueuse'

$\bar{D}$  = 'ampoule non défectueuse'



$$\begin{aligned} P(T_1|D) &= \frac{P(T_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(T_1 \cap D)}{P(T_1 \cap D) + P(T_2 \cap D) + P(T_3 \cap D)} \\ &= \frac{0,6 \cdot 0,1}{0,6 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,5} = \frac{6}{17} \end{aligned}$$

On a trois événements incompatibles  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  tels que  $\Omega = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ . De plus, on dispose de l'information qu'un événement  $D$  s'est réalisé. On a alors la formule de Bayes suivante :

$$\begin{aligned} P(T_1|D) &= \frac{P(D|T_1)P(T_1)}{P(D|T_1)P(T_1) + P(D|T_2)P(T_2) + P(D|T_3)P(T_3)} \\ &= \frac{0,1 \cdot 0,6}{0,1 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,1} = \frac{6}{17} \end{aligned}$$

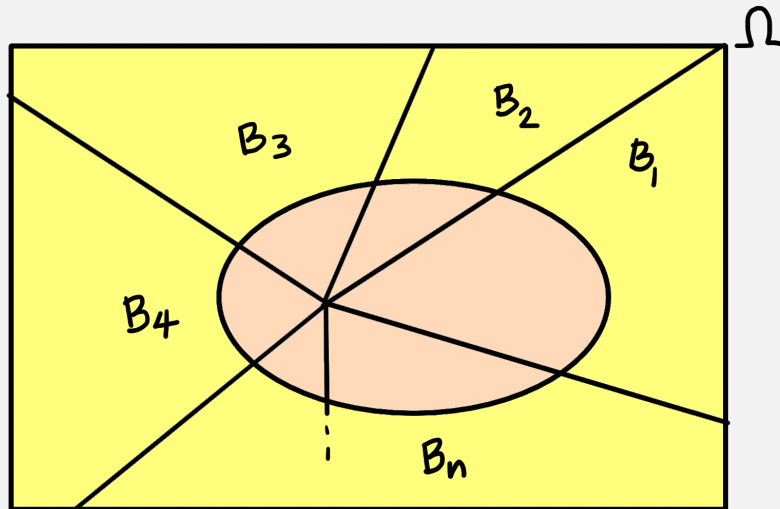
#### Remarque

Cette formule se généralise à  $n$  événements incompatibles.

**Théorème 11.6.1 : Théorème de Bayes**

Soient  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ,  $n$  événements disjoints deux à deux (c'est-à-dire que  $B_i \cap B_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$ ) et tels que  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ . Alors,

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$



*Démonstration.* On a

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega \quad \text{et} \quad A \cap \Omega = A$$

Donc, de cette seconde égalité on tire

$$\begin{aligned} A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) &= A \\ \Leftrightarrow (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n) &= A \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)) &= P(A) \\ \Leftrightarrow P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) &= P(A) \\ \Leftrightarrow P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n) &= P(A) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) &= P(A) \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} P(B_k|A) &= \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} \\ \Leftrightarrow &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} \\ \Leftrightarrow &= \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)} \end{aligned}$$

**Remarque**

Le *théorème de Bayes* est utilisé de façon classique pour calculer des “probabilités de causes” dans des diagnostics (maladies, pannes, etc.). Voir exercice 69\*.

L'application du théorème de Bayes est à la base de toute une branche de la statistique appelée *statistique bayésienne*.

**Activité iii : paradoxe des tests de dépistage**

Un laboratoire médical désire vérifier l'efficacité de son *test de dépistage* d'une maladie  $M$ . Le laboratoire recrute 5% de sujets atteints de la maladie  $M$ , le reste des sujets n'étant donc pas atteint de la maladie  $M$ . Le résultat du test est soit positif ( $T$ ), soit négatif ( $\bar{T}$ ).

Il se révèle que si un sujet n'est pas atteint de la maladie  $M$ , il a 9 chances sur 10 de réagir négativement au test et que, s'il est atteint de la maladie  $M$ , il a 8 chances sur 10 de réagir positivement. Autrement dit :  $P(\bar{T}|\bar{M}) = 0,9$  et  $P(T|M) = 0,8$ .

**Indication : dresser un arbre de classement puis utiliser le théorème de Bayes.**

- (1) Quelle est la probabilité (en pourcent) que le sujet soit malade si le test est négatif ?
- (2) Quelle est la probabilité (en pourcent) que le sujet soit malade si le test est positif ?
- (3) Quelle est la probabilité (en pourcent) que le sujet ne soit pas malade si le test est positif ?
- (4) Le test qui semble à première vue efficace, l'est-il véritablement ?



## 12 Exercices et problèmes

## 12.1 Série 1

---

### Exercice 1

Écrire en extension les deux ensembles suivants :

a)  $P = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$

b)  $R = \{x \mid x^2 = 9 \text{ et } x - 3 = 5\}$

### Exercice 2

Démontrer rigoureusement que  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

(**Indication** s'aider d'un diagramme de Venn.)

### Exercice 3

Soient les ensembles  $D = \{1, 2, 3\}$  et  $E = \{0, 5\}$ . Écrire en extension  $D \times E$ .

**Exercice 4**

Écrire le nombre  $2,21134134134\cdots = 2,21\overline{134}$  sous forme de fraction irréductible.

**Exercice 5**

Écrire les fractions  $\frac{2}{5}$  et  $\frac{432}{999}$  sous forme décimale, sans s'aider de la calculatrice.

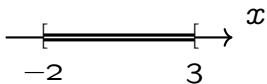
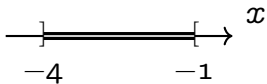
**Exercice 6**

Donner une valeur approchée par défaut de  $\frac{22}{7}$  au centième près, sans utiliser la calculatrice.

**Exercice 7**

Compléter le tableau suivant

12 Exercices et problèmes

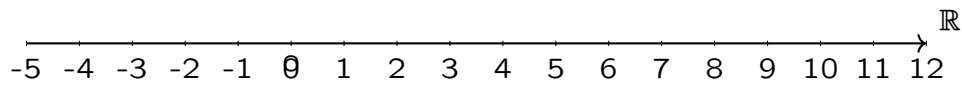
$-2 \leq x < 3$	$x \in [-2; 3[$	
$x < 0$		
	$x \in ]4; \infty[$	
$-1 \leq x \leq 5$		
	$x \in [0; 8[$	
		
	$x \in ]-\infty; -2]$	

**Exercice 8**

On considère les intervalles  $I = [-3; 2]$ ,  $J = ]-\infty; 4]$ ,  $K = [4; 8[$  et  $L = [6; +\infty[$ .

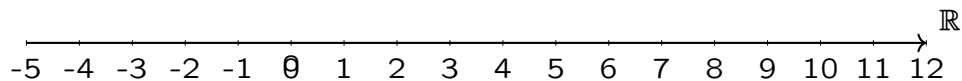
Dans chaque cas, représenter les intervalles dans des couleurs différentes et compléter

a)  $K$  et  $J$



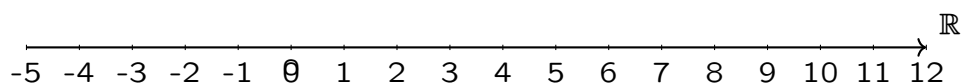
$K \cap J =$

b)  $L$  et  $K$

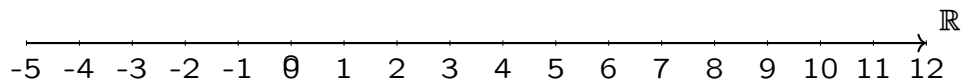


$L \cap K =$

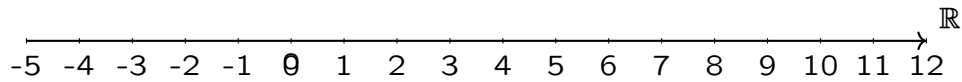
c)  $I$  et  $K$



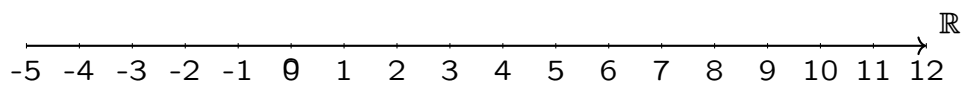
$I \cup K =$

d)  $I$  et  $J$ 

$$I \cup J =$$

e)  $J$  et  $I$ 

$$J \setminus I =$$

f)  $J$  et  $L$ 

$$J \setminus L =$$

### Exercice 9

Un professeur de musique a fait une enquête auprès de 150 élèves d'un collège. 116 élèves déclarent aimer les variétés, 52 la musique classique et 40 aiment à la fois les variétés et la musique classique.

- Combien d'élèves n'aiment que la musique classique ?
- Représenter cette situation par un diagramme de Venn et un diagramme de Carroll mettant en évidence les ensembles  $V$  (variétés) et  $M$  (musique classique) et leurs parties complémentaires.
- Combien d'élèves n'ont pas donné leur avis ?

## 12.2 Série 2

### Exercice 1

Soit  $A = \{x \mid 2x = 6\}$  et soit  $b = 3$ . Est-ce que  $A = b$  ?

### Exercice 2

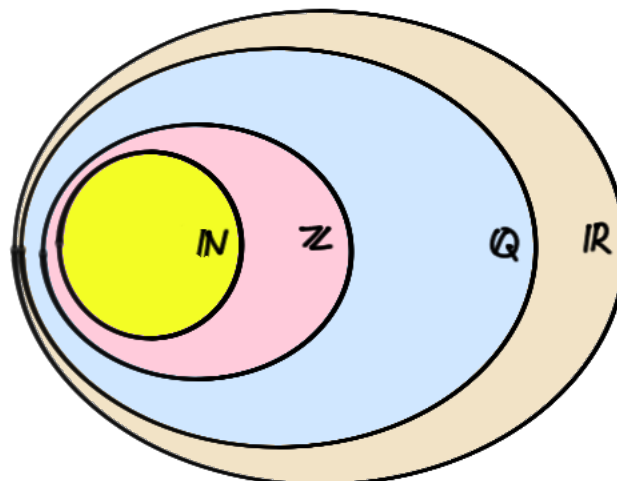
Compléter en utilisant les notations  $\in$  (appartient) ou  $\notin$  (n'appartient pas).

- |                                  |                                  |  |                                   |
|----------------------------------|----------------------------------|--|-----------------------------------|
| a) $0,3\bar{7} \dots \mathbb{Q}$ | b) $\sqrt{25} \dots \mathbb{N}$  | c) $\frac{6}{2} \dots \mathbb{N}$        | d) $\sqrt{-16} \dots \mathbb{Z}$  |
| e) $-2,5 \dots \mathbb{Z}$       | f) $\sqrt{-25} \dots \mathbb{R}$ | g) $\sqrt{\frac{3}{4}} \dots \mathbb{R}$ | h) $\sqrt{0,01} \dots \mathbb{Q}$ |
| i) $0 \dots \mathbb{R}$          | j) $-\sqrt{25} \dots \mathbb{N}$ | k) $5 \dots \mathbb{Z}$                  | l) $1,2\bar{34} \dots \mathbb{R}$ |

### Exercice 3

Recopier le diagramme de Venn ci-dessous et placer les nombres suivants :

$2,34$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $\pi$ ;  $45$ ;  $-\frac{3}{5}$ ;  $-12$ ;  $\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{9}$ ;  $0$ ;  $7,2 \cdot 10^{-2}$ ;  $7,2 \cdot 10^2$



### Exercice 4

À l'université sont organisés des cours libres d'anglais, d'économie et de statistique. Sachant que 122 étudiants suivent le cours d'anglais, 81 celui d'économie, 14 celui

de statistique, 10 ceux d'anglais et d'économie, 6 ceux d'anglais et de statistique, 11 ceux de statistique et d'économie et, enfin, 4 étudiants suivent les trois cours, combien d'étudiants suivent seulement le cours de statistique ?

### Exercice 5

Effectuer les calculs suivants :

$$a) 3 \cdot (5 + 2 \cdot (6 - (4 + 1))) + 3 + 2 \cdot 4 + 5 =$$

$$b) 49 \div (15 - 2 \cdot 4)^2 + 3 - 2 \cdot 5 =$$

### Exercice 6

Simplifier l'expression  $\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{8}}$ .

### Exercice 7

Simplifier l'expression  $\left(\frac{a^2 b^3 c^{-2}}{a^3 b^2 c}\right)^{-1}$ .

### Exercice 8

Simplifier l'expression  $\sqrt[n]{\sqrt[3]{a^{2n} b^{3n}}}$ .

### Exercice 9

Calculer  $2\sqrt[6]{a^2} - \sqrt[3]{27a} + \sqrt[3]{a}$ .

### Exercice 10

Rendre rationnel le dénominateur de la fraction  $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ , puis simplifier l'écriture.

### Exercice 11

Rendre rationnel le dénominateur de la fraction  $\frac{\sqrt{14} + \sqrt{15}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ , puis simplifier l'écriture.

### Exercice 12

Soient deux nombres entiers  $m$  et  $n$  décomposés en leur produit de facteurs premiers :  
 $m = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17$  et  $n = 2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13$ .

- Que valent exactement  $m$  et  $n$  ?
- Quel est le plus grand diviseur commun de  $m$  et  $n$  ?
- Quel est le plus petit multiple commun de  $m$  et  $n$  ?
- Quelle est la fraction irréductible équivalente à  $\frac{m}{n}$  ?

### Exercice 13

Un banquier, content de son personnel, désire partager une prime de 2 900 CHF entre trois de ses employés : son chauffeur, sa secrétaire et son domestique. Il décide de partager la prime proportionnellement à leur salaires mensuels qui sont respectivement de 1 300 CHF, 2 000 CHF et 2 500 CHF.

- Quelles seront les primes de chacun ?
- S'il avait décidé, afin de faire plus social, de partager la prime de manière inversement proportionnelle aux salaires, quelles auraient été les sommes reçues par chacun ?



## 12.3 Série 3

### Exercice 1

(L'un des enjeux du problème suivant est de mettre en évidence ce qui le distingue de la question 13.b de la Série 2, quand bien même ils traitent tous deux de proportionnalité inverse )

Un banquier, content de ses employés, désire leur verser des primes en fin d'année. Il choisit toutefois de privilégier les bas revenus en adoptant une distribution inversement proportionnelle aux salaires. Sachant que si un employé gagne CHF 2 000.— par mois, le banquier lui octroiera une prime annuelle de CHF 2 900.—, déterminer :

- La prime que recevra un employé gagnant CHF 1300.— par mois.
- La prime que recevra un employé gagnant CHF 2500.— par mois.

### Exercice 2

Choisir deux nombres entiers  $m$  et  $n$  suffisamment grands

$m = \dots\dots\dots$

$n = \dots\dots\dots$

- Décomposer  $m$  et  $n$  en leur produit de facteurs premiers (avec Geogebra, par exemple)
- Calculer le plus grand diviseur commun de  $m$  et  $n$ .
- Calculer le plus petit multiple commun de  $m$  et  $n$ .
- Effectuer le produit des pgcd et ppcm de  $m$  et  $n$ .
- Que constatez-vous ?

### Exercice 3

Écrire sous forme d'une puissance à exposant rationnel irréductible (=fraction irréductible) les expressions suivantes :

a)  $\sqrt[5]{3}$

b)  $\sqrt[4]{5^7}$

c)  $\sqrt[7]{x^5}$

d)  $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}$

e)  $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[6]{3^5}$

f)  $\sqrt[7]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^5}$

g)  $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[3]{5^4}$

h)  $\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[3]{7^5}$

i)  $\sqrt[8]{b^3} \cdot \sqrt[6]{b^5}$

j)  $\frac{\sqrt[3]{6^4 5^5}}{\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[5]{4^4}}$

k)  $\frac{\sqrt{5^9} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[7]{4} \sqrt[5]{3^3}}$

l)  $\frac{\sqrt[5]{3^7 7^2}}{\sqrt[3]{7^7} \cdot \sqrt[4]{7^5}}$

m)  $\frac{\sqrt[5]{2^2 x^5}}{\sqrt{x^7} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$

n)  $\frac{\sqrt{y^5} \cdot \sqrt[5]{y^4}}{\sqrt[6]{5} \sqrt[5]{y^3}}$

o)  $\frac{\sqrt[4]{7 a^3}}{\sqrt[5]{a^6} \cdot \sqrt[3]{a^7}}$

**Exercice 4**

Effectuer les opérations suivantes sans avoir recours à une calculatrice et donner la réponse sous forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.

$$\text{a) } \frac{\frac{2}{3} - \frac{3}{2}}{1 - 6} =$$

$$\text{b) } \frac{5}{6} \div \left( \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \right) =$$

$$\text{c) } \left( \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{8} =$$

$$\text{d) } \frac{\left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{2}{5}} =$$

$$\text{e) } \left[ \frac{2}{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{276}{-15} \right] \div \left[ \frac{2}{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{276}{-15} \right] = \text{f) } \left( \frac{2}{5} \div 3 \right) \div \left( \frac{2}{3} + 3 \right) =$$

$$\text{g) } \frac{121}{77} \cdot \frac{69}{92} =$$

$$\text{h) } -\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$\text{i) } \frac{1}{2 - \frac{5}{2 + \frac{1}{2}}} =$$

$$\text{j) } \frac{-4 \cdot (2 - 5)}{(-4) + (-3) \cdot (-1)} =$$

$$\text{k) } \frac{-\frac{3}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)}{\left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{2}{3} \right)} =$$

$$\text{l) } \frac{-\frac{2}{3} + \left( -\frac{1}{4} \right)}{-\frac{2}{3} \cdot \left( -\frac{1}{4} \right)} \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) + \left( -\frac{1}{4} \right) =$$

$$\text{m) } \frac{45}{18} \cdot \frac{70}{140} =$$

$$\text{n) } \frac{60}{48} \cdot \frac{18}{45} =$$

**Exercice 5**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}^*$  et égaux. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 & a = b \\
 \Leftrightarrow & a \cdot a = a \cdot b && \text{(multiplication par } a) \\
 \Leftrightarrow & a^2 = ab \\
 \Leftrightarrow & a^2 - b^2 = ab - b^2 && \text{(soustraction de } b^2) \\
 \Leftrightarrow & (a - b)(a + b) = b(a - b) && \text{(factorisation)} \\
 \Leftrightarrow & a + b = b && \text{(simplification par } a - b) \\
 \Leftrightarrow & b + b = b && \text{(car } a = b) \\
 \Leftrightarrow & 2b = b \\
 \Leftrightarrow & 2 = 1 && \text{(simplification par } b)
 \end{aligned}$$

Pourtant 2 n'est pas égal à 1 !! Que s'est-il passé ?

## 12.4 Série 4

---

### Exercice 1

Réduire (*simplifier et arranger*) puis préciser quels sont les degré et terme indépendant (*constante*) de l'expression polynomiale obtenue :

a)  $-2x^2 + 5x - 3x^3 - 4x + 3 - 5x^3 - x - 2 + 3x^2$

b)  $5x - 7x^2 + 3x^3 - 4x + 2x^3 - 5x + 3 + 5x^3$

### Exercice 2

Éliminer les parenthèses, réduire puis préciser quels sont les degré et terme indépendant de l'expression polynomiale obtenue :

a)  $1 - (3 - 2(3 - 2))$

b)  $2x - (3x - (2x - 4x))$

c)  $5x - (3x^2 - (3x - x^2)) - (3x^2 - 5x) + (-4x - x^2)$

### Exercice 3

Effectuer (*distribuer, développer*) les multiplications.

a)  $2x \cdot (4x^2 - 3)$

b)  $5x^2 \cdot (3x^3 - 2x + 1)$

### Exercice 4

Effectuer les multiplications puis réduire le résultat obtenu en indiquant son degré et sa constante.

a)  $(5x - 4)(3x^2 - 2)$

b)  $(-3x^2 + 2)(5x^2 - 2x + 1)$

### Exercice 5

Idem pour l'expression  $(x^2 - 5)(3x^2 + 1)(1 - 4x)$  (en commençant par multiplier les deux premières parenthèses entre elles).

**Exercice 6**

En s'aidant des identités remarquables du cours, distribuer et développer les expressions suivantes, en précisant, au préalable, la valeur des paramètres  $a$  et  $b$  dans lesdites identités.

a)  $(2x + 7)^2$

b)  $(4x + 3)(4x - 3)$

c)  $(x^2 + y^2)$

d)  $(3xy + 2)(3xy + 2)$

e)  $(x^2 - 7y^2)^2$

f)  $(4x^3 - 5)(4x^3 + 5)$

g)  $(x - 2)^3$

h)  $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

**Exercice 7**

Mettre en évidence le plus grand facteur commun possible entre les différents termes.

a)  $5x^5 + 15x^4 - 20x^2$

b)  $-6a^3 + 12a^2 - 8a^2b$

c)  $3x^3y - 9x^2y^2 + 6xy^3$

**Exercice 8**

Factoriser en utilisant une mise en évidence (ce qui nécessite parfois un peu d'astuce...).

a)  $(2a + 1)(a - 2) - 3(2a + 1)$

b)  $3(x + 4) + (x - 3)(x + 4)$

c)  $(5 - x)(x + 7) + (x - 5)(1 - 3y)$

d)  $(x - 3)^2 + 5(x - 7)(x - 3)$

e)  $5x^5 + 15x^3 + 3x^2 + 9$

f)  $(a + 2)b^3 - 5(a + 2)b^2 + 3a + 6$

### Exercice 9

En s'aidant des identités remarquables du cours, factoriser les expressions suivantes, en précisant, au préalable, la valeur des paramètres  $a$  et  $b$  dans lesdites identités.

a)  $4x^2 + 12x + 9$

b)  $16x^2 - 49$

c)  $-6x + x^2 + 9$

d)  $4x^2y^2 + 9 - 12xy$

e)  $81t^2 - 72t^2 + 16$

f)  $9x^2 - 30x + 25$

g)  $x^3 - 125$

## 12.5 Série 5

---

### Exercice 1

Mettre les polynômes ci-dessous sous une forme ordonnée réduite (de la plus haute puissance à la plus basse) et préciser le degré du polynôme.

a)  $P(x) = x^4 - 7x + 10x^2 - 3x + 5x^4 - 7x^3 - 6x + 2$

b)  $P(x) = -x^3 - 2x - 6 + 4x^5 - 5x^3 + 5x - 7x^3 - 4x$

c)  $P(x) = -2x^5 + 3 + 5x^2 - 6x^5 - 2x^3 - 7x - 8x^5 + 1$

### Exercice 2

Remplacer  $x$  par une valeur numérique (donnée) dans le polynôme  $P(x)$ , et faire le calcul.

a)  $x = 1$  dans  $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$

b)  $x = -2$  dans  $P(x) = -3x^3 + 5x^2 - 2x - 3$

c)  $x = 3$  dans  $P(x) = -2x^3 + 6x^2 + 32x - 96$

### Exercice 3

Effectuer la division euclidienne du polynôme  $P(x)$  (dividende) par le polynôme  $D(x)$  (diviseur) afin d'obtenir le quotient  $Q(x)$  et le reste  $R(x)$ .

a)  $P(x) = 2x^2 - 5x + 7$  et  $D(x) = x - 1$

b)  $P(x) = x^3 + 5x^2 + 4$  et  $D(x) = x + 2$

c)  $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$  et  $D(x) = x^2 - 4x - 3$

d)  $P(x) = x^3 - 3x - 2$  et  $D(x) = x - 2$

e)  $P(x) = -2x^3 + 13x^2 - 16x - 15$  et  $D(x) = x - 3$

### Exercice 4

Calculer (sans faire la division euclidienne) le reste  $R(x)$  de la division du polynôme  $P(x)$  par le polynôme  $D(x)$ . Puis vérifier le résultat obtenu en faisant la division.

a)  $P(x) = x^2 - 7x + 4$  et  $D(x) = x - 1$

b)  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 10$  et  $D(x) = x + 2$

c)  $P(x) = -2x^3 + 8x^2 - 5x - 12$  et  $D(x) = x - 3$

d)  $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - x + 2$  et  $D(x) = x + 4$

e)  $P(x) = x^3 + 5x + 42$  et  $D(x) = x + 3$

### Exercice 5

Tester plusieurs valeurs entières de  $x$  (entre  $-3$  et  $3$ ), dans le polynôme  $P(x)$ , jusqu'à obtenir 0. En déduire une décomposition de ce polynôme  $P(x)$  (de degré 3) en produit de polynômes de degré 1 et 2.

- a)  $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$
- b)  $P(x) = -2x^3 + 13x^2 - 16x - 15$
- c)  $P(x) = x^3 - 3x - 2$
- d)  $P(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 4$
- e)  $P(x) = x^3 + 5x^2 - 16x + 4$

N'oubliez pas d'utiliser **Geogebra** afin de contrôler la vraisemblance de vos propositions au moyen de l'outil de calcul formel



The image shows the Geogebra software interface. The 'Calcul formel' (Formal Calculation) menu item is highlighted with a red circle. Below the main window, a toolbar contains several icons: an equals sign, an approximation symbol, a checkmark, a fraction, parentheses, a square root, and a function symbol. Red arrows point from these icons to handwritten labels in yellow ovals: 'évaluer' (evaluate), 'factoriser' (factorize), 'développer' (expand), 'substituer' (substitute), and 'résoudre' (solve).



## 12.6 Série 6

### Exercice 1

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$ .

1.  $5x - 3 = 0$
2.  $\frac{x(x-3)}{x-2} = 0$
3.  $x(x-2) = 3(x^2 - 4)$
4.  $x^2 - 5x + 6 = 0$
5.  $\frac{x^2 - 4x + 3}{x-1} = 0$
6.  $\frac{x}{x-3} = 2$
7.  $(x-1)(3-4x) - (x-1)^2 = 0$
8.  $(2x+1)(x-4) = x^2 - 16$
9.  $\frac{x+1}{3} + \frac{x-4}{5} = \frac{8x}{15}$

### Exercice 2

Lors de la résolution d'un problème par l'algèbre, il est impératif de suivre le scénario suivant :

- ① **Choisir** l'inconnue (ou les inconnues) et les désigner par une lettre ;
- ② **transcrire** le problème sous forme d'équation ;
- ③ **résoudre** l'équation ;
- ④ **conclure** en examinant si la solution trouvée est satisfaisante, c'est-à-dire vraisemblable.

10. En ayant à l'esprit (et sur papier... Cf. 2.7.1) qu'une équation du type  $\sqrt{A} = B$  équivaut à  $A = B^2$  avec  $B \geq 0$ , résoudre l'équation  $\sqrt{x+1} = x-5$ .
11. Le triple d'un nombre, diminué de 4, est égal à son double augmenté de 7. Quel est ce nombre ?
12. Dans un vieux papyrus découvert en Égypte, on trouve le problème de partage suivant : "Sur un ta de blé de 21 mesures, le paysan doit donner au pharaon une part égale au cinquième de la sienne. Quel partage faire ?
13. Le père Galion a un jardin carré. Il en augmente tous les côtés de 4 mètres. La mesure de la surface augmente alors de  $72 \text{ m}^2$ . Trouver le côté du carré initial.

## 12 Exercices et problèmes

14. On raconte que sur la tombe du mathématicien Diophante était inscrit un problème résumant sa vie : "Sa douce enfance dura le sixième de sa vie. Puis après un douzième de sa vie, son menton s'est couvert de barbe. Après un septième encore, il se marie. Cinq années passent et la naissance d'un fils le comble de joie. Le sort voulut que la vie de ce fils soit finalement deux fois plus courte que celle de son père et après la mort de son enfant, Diophante vécut encore quatre années." À quel âge est donc mort Diophante ?
15. Avec 25 pièces, toutes de 1 Fr ou de 2 Fr, j'ai une somme de 38 Fr. Combien ai-je de pièces de chaque sorte ?

## 12.7 Série 7

---

### Exercice 1

Ci-dessous, trois équations de degré 2 sous forme standard  $ax^2 + bx + c = 0$ . Préciser la valeur des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  ainsi que la valeur du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$ , puis résoudre en utilisant la formule classique.

a)  $-2x^2 + 10x - 8 = 0$

b)  $-3x^2 + 12x - 12 = 0$

c)  $4x^2 - 7x + 11 = 0$

### Exercice 2

Simplifier l'écriture puis résoudre.

a)  $x^2 - 4x - 2(x + 3) = 4$

b)  $-2(5 - 3y)^2 + 5(5 - 3y) - 3y = -7$

c)  $x \cdot \frac{18 - 2x}{5} = 8$

### Exercice 3

Soit le polynôme  $P(x)x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ .

- Soit  $x = 2$ . Calculer  $P(2)$ .
- Effectuer la division euclidienne de  $P(x)$  par  $(x - 2)$ .
- Comparer le reste  $R(x)$  de la division avec la valeur  $P(2)$ .
- Résoudre l'équation  $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$ .
- Faire de même (c'est-à-dire de **a**) à **d**)) avec  $x = 3$ .
- Faire de même (de **a**) à **d**)) avec  $x = -3$ .

### Exercice 4

Factoriser les polynômes ci-dessous en observant les indications.

## 12 Exercices et problèmes

a)  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

**Indication**  $P(4) = 0$ .

b)  $P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$

**Indication**  $-5$  est une racine de  $P$ .

c)  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

**Indication**  $\frac{1}{2}$  est solution de l'équation  $P(x) = 0$ .

### Exercice 5

Sans utiliser la division euclidienne, vérifier si  $P(x) = 8x^3 - 14x^2 - 7x + 6$  est divisible par  $\left(x + \frac{3}{4}\right)$ .

### Exercice 6

$P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 9x + 18$  est-il divisible par  $(x - 2008)$ ? Justifier sans faire de calculs inutiles.

### Exercice 7

Résoudre les équations suivantes dans  $\mathbb{R}$ . Pour ce faire chercher d'abord une solution rationnelle de l'équation à l'aide du théorème des diviseurs, puis utiliser le critère de divisibilité par  $(x - a)$  pour factoriser les polynômes.

a)  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

b)  $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$

c)  $x^3 + x^2 - 2 = 0$

d)  $x^3 - 2x = -1$

e)  $x^4 = -5x^2$

f)  $3x^3 - 8x^2 + 3x + 2 = 0$

g)  $9t^3 + 8 = 18t^2 + 4t$

h)  $12u^3 + 4u^2 - 13u + 4 = 0$

## 12.8 Série 8

---

**NB** : ci-après, la lettre grecque  $\Delta$ , signifie "delta", se veut le symbole désignant une droite.

### Exercice 1

Les points  $(2; 5)$ ,  $(0; -4)$  et  $(4; 8)$  appartiennent-ils à la droite  $\Delta : y = 3x - 4$  ?

### Exercice 2

Déterminer l'équation de la droite passant par les points  $(1; 2)$  et  $(-3; 6)$ .

### Exercice 3

Déterminer l'équation de la droite passant par les points  $(-1; 3)$  et  $(7; 3)$ .

### Exercice 4

Déterminer l'équation de la droite passant par les points  $(-1; 3)$  et  $(-1; -5)$ .

### Exercice 5

Les points  $(0; -3)$ ,  $(-2; 7)$  et  $(\frac{3}{2}; 0)$  appartiennent-ils à la même droite ?

### Exercice 6

Écrire l'équation cartésienne de la droite  $\Delta$  définie par  $m = -2$  et  $(1; 0) \in \Delta$ .

### Exercice 7

Déterminer la pente de la droite d'équation  $3x - 2y + 4 = 0$ .

### Exercice 8

Déterminer l'équation de la droite passant par  $P = (5; -7)$  qui est parallèle à la droite d'équation  $6x + 3y = 4$ .

### Exercice 9

Déterminer l'équation de la droite passant par  $P = (5; -7)$  qui est perpendiculaire à la droite d'équation  $6x + 3y = 4$

### Exercice 10

Donner l'équation cartésienne de la droite  $\Delta$  parallèle à  $\Delta'$  et passant par  $(2; -3)$ , avec  $(5; 4) \in \Delta'$  et  $(6; 2) \in \Delta'$ .

## 12.9 Série 9

---

### Exercice 1

En utilisant chacune des méthodes vues au cours (combinaison, substitution et déterminants), résoudre le système  $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 4x - 5y + 30 = 0 \end{cases}$

### Exercice 2

À l'aide de la méthode de substitution résoudre le système  $\begin{cases} 5x - 4y = 11 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$

### Exercice 3

À l'aide de la méthode de combinaison résoudre le système  $\begin{cases} 27x + 19y = -3 \\ -9x - 13y = 21 \end{cases}$

### Exercice 4

À l'aide de la méthode des déterminants résoudre le système  $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 4x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$

### Exercice 5

Résoudre le système  $\begin{cases} (2x - 1 + y)(y + 1) = 0 \\ xy - x^2 + 3y + 9 = 0 \end{cases}$

### Exercice 6

Résoudre les deux systèmes ci-dessous puis interpréter graphiquement chacune des deux équations du système ainsi qu'les solutions obtenues :

$$\text{a) } \begin{cases} y = 0,5x + 2 \\ y = -1,5x - 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = 1,4x + 1,3 \\ y = 1,4x - 2,3 \end{cases}$$

### Exercice 7

Trouver un nombre à deux chiffres tel que la différence entre 4 fois le chiffre des unités et trois fois le chiffre des dizaines soit égale à 1, et que, renversé (c'est-à-dire, en intervertissant les deux chiffres), le nombre diminue de 9.

### Exercice 8

Un bateau à moteur, fonctionnant à plein régime, parcourt 4 km en remontant la rivière (contre un courant constant) en 15 minutes (=  $\frac{1}{4}$  heure). Le retour (avec le même courant et à plein régime) prend 12 minutes (=  $\frac{1}{5}$  heure). Trouver la vitesse du courant et la vitesse propre du bateau en eau calme.

### Exercice 9

On achète pour 200 Frs d'essence à une pompe. On s'aperçoit qu'à une autre pompe le prix du litre est inférieur de 0,50 Frs. On aurait pu ainsi avoir 5 litres de plus pour le même prix. Quel était le prix de l'essence à la première pompe et combien en avait-on pris ?

### Exercice 10

Une mule se promenant avec une ânesse se plaignait d'être trop chargée, et lui dit : "Si je t'avais donné un de mes sacs, nous en aurions autant l'une que l'autre ; et si tu m'en avais donné un des tiens, j'en aurais le double de toi.". Déterminer le nombre de sacs de chacun.



## 12.10 Série 10

---

### Exercice 1

Les points  $(2; 5)$ ,  $(0; -4)$  et  $(4; 8)$  appartiennent-ils à la parabole  $f(x) = y = 3x^2 - 5x - 4$  ?

### Exercice 2

Déterminer les intersections avec  $Ox$  de la parabole  $f(x) = y = 6x^2 + 7x - 3$ .

### Exercice 3

On considère la parabole d'équation  $f(x) = y = x^2 - 4x + 7$ . Donner les coordonnées du sommet, l'équation de l'axe de symétrie et ses intersections avec les axes  $Ox$  et  $Oy$ .

### Exercice 4

Parmi les paraboles d'équation  $f(x) = y = 2x^2 + mx + p$ , déterminer celle qui contient les points  $(2; -1)$  et  $(3; 2)$ .

### Exercice 5

Parmi les paraboles d'équation  $f(x) = y = x^2 + mx + p$ , déterminer celle dont le sommet est  $(-2; 5)$ .

### Exercice 6

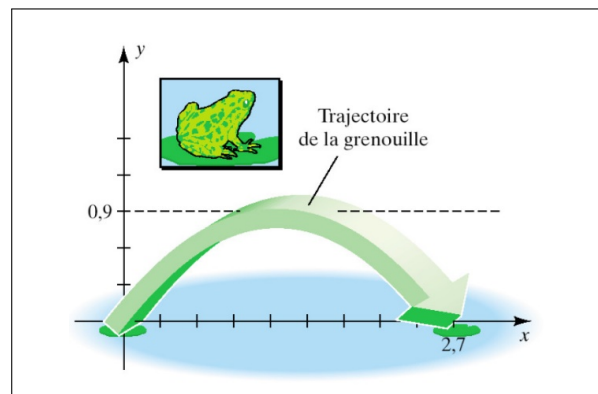
Déterminer  $m$  pour que la parabole d'équation  $f(x) = y = x^2 + (m + 1)x + m$

- soit tangente à  $Ox$  (c'est-à-dire ne touche l'axe  $Ox$  qu'en un seul point) ;
- passe par l'origine ;
- ait l'axe  $Oy$  comme axe de symétrie ;
- ait pour sommet un point d'ordonnée (coordonnée  $y$ ) égale à  $-4$ .

**Exercice 7**

Les bonds des animaux sauteurs sont typiquement des trajectoires paraboliques. La figure ci-contre illustre le bond d'une grenouille superposé à un système de coordonnées.

La longueur du saut est de 2,7 m et la hauteur maximale au-dessus du sol est de 0,9 m.



Donner, sous la forme  $y = ax^2 + bx + c$ , l'équation de la trajectoire du saut de la grenouille.

**Exercice 8**

La formule  $h(t) = 128t - 16t^2$  donne la hauteur (en mètres) d'un objet au-dessus de sol au temps  $t$  (donné en secondes).

- Combien de temps mettra l'objet pour atteindre la hauteur maximale ?
- Quelle sera la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
- Combien de temps mettra l'objet pour toucher à nouveau le sol ?
- Combien de temps mettra l'objet pour atteindre une hauteur de 192 m ? Pourquoi y a-t-il deux solutions ?

**Exercice 9**

Une entreprise produit des pièces métalliques pour les voitures. Le coût de production journalier varie en fonction du nombre  $x$  de pièces produites. Il est donné par la fonction suivante :

$$C(x) = \frac{1}{10}x^2 - 10x + 1500$$

- Quel est le coût de production pour une quantité de 20 pièces par jour ?
- Pour quel nombre de pièces le coût de production journalier est-il le plus bas ? Quel est alors ce coût ?
- Pour quelle quantité de pièces le coût est-il égal à 1610 Frs ?
- Quel est le coût lorsque la production est arrêtée ?

**Exercice 10**

On considère les fonctions de degré 2 ci-dessous. Pour chacune d'entre elles dessiner la courbe correspondante en suivant la méthode du cours.

a)  $f(x) = y = -3x^2 + 12x - 12$

b)  $f(x) = y = x^2 - 5x + 6$

c)  $f(x) = y = 4x^2 - 6x + 13$

## 12.11 Série 11

---

### Exercice 1

Pour chacune des fonction cubiques  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ,  $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x - 3$  et  $h(x) = -9x^3 + 12x^2 + 3x - 4$ ,

- calculer son ordonnée à l'origine ;
- dresser une liste de ses zéros rationnels possibles ;
- déterminer un zéro et effectuer une division sans reste de la fonction. (**indication** : *connaissant une racine, la division peut s'opérer plus rapidement à l'aide du schéma de Horner qui a été illustré en cours ; pour rappel, il s'agitssait de ne travailler qu'avec les coefficients du polynôme et la première racine détectée.*) ;
- en donner une forme factorisée ;
- calculer l'ensemble de ses zéros ;
- dresser le tableau des signes de la fonction ; (**indication** : *décomposer la fonction en ses facteurs et étudier le signe de chaque facteur puis en conclure le signe global.*) ;
- déterminer son centre de symétrie ;
- calculer, le cas échéant, ses extremums locaux (c'est-à-dire des sommets éventuels!) ;
- représenter graphiquement la fonction dans un repère en calculant, si nécessaire, des points supplémentaires.

### Exercice 2

Étudier l'exemple de la section 3.3 du Chapitre 4 (optimums d'une fonction cubique).

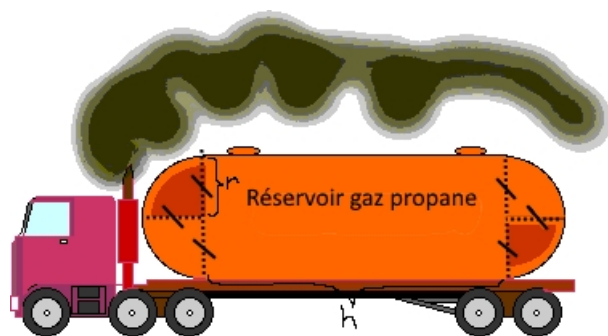
### Exercice 3

On veut construire un réservoir pour le gaz propane sous la forme d'un cylindre circulaire droit d'une hauteur de 10 m terminé par un hémisphère à chaque extrémité. Déterminer le rayon qui donne un volume de  $27\pi \text{ m}^3$ .

**Formules nécessaires :**

— Le volume d'une sphère est donné par :  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

— Le volume d'un cylindre circulaire droit est donné par :  $V = \pi r^2 h$ .



## 12.12 Série 12

---

### Exercice 1

Déterminer le terme général des suites ci-dessous.

a)  $-7; -9; -11; -13; -15; \dots$

b)  $\frac{10}{3}; \frac{14}{3}; 6; \frac{22}{3}; \frac{26}{3}; 10; \dots$

c)  $130; 120; 110; 100; 90; \dots$

d)  $0, 13; 0, 26; 0, 39; 0, 52; 0, 65; \dots$

e)  $2\pi; 4\pi; 6\pi; 8\pi; 10\pi; \dots$

### Exercice 2

Calculer les sommes suivantes.

a)  $25 + 35 + 45 + \dots + 515 =$

b)  $-12 - 19 - 26 - 33 - \dots - 383 =$

c)  $-10 - 2 + 6 + 14 + \dots + 142 =$

d)  $\sum_{k=1}^{70} 5k - 4 =$

e)  $\sum_{k=1}^{50} \frac{4 - 3k}{7} =$

f)  $\sum_{k=1}^{100} \text{pair } 4k + 6 =$

### Exercice 3

Soit la suite  $u_n$  dont le terme général est donné par  $-3n + 8$ .

a) Calculer le 23<sup>ème</sup> terme.

b) À quel rang se trouve le terme  $-2971$  ?

c) Le terme  $-200$  se trouve-t-il dans cette suite ?

d) Calculer la somme des 30 premiers termes.

### Exercice 4

Il pleut tous les jours ! Le mardi, premier jour pluvieux d'une longue période d'observations, le pluviomètre d'une station météo contient 72 mm d'eau et chaque jour on constate exactement 4,5 mm de plus que le jour précédent dans l'appareil, en sachant que l'appareil est vidé de son eau à la fin de chaque journée.

On note  $H_n$  la suite des précipitations journalières, avec  $H_1 = 72$  mm.



- Donner la mesure du pluviomètre à la fin des 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> jour de pluie.
- Exprimer le terme général  $H_n$  de la suite des mesures.
- Qu'indique le pluviomètre le mardi de la semaine suivante ?
- Quelle quantité (en mm) d'eau sera tombée durant les 15 premiers jours ?

### Exercice 5

Déterminer le terme général des suites ci-dessous.

- 1300; 130; 13;  $\frac{13}{10}$ ;  $\frac{13}{100}$ ; ...
- 4; 6; 9; 13; 5; 20; 25; ...
- 625; 125; 25; -5; 1; ...
- 1, 2; 1, 44; 1, 728; 2, 0736; -2, 48832; ...

### Exercice 6

Calculer les sommes suivantes.

- $0,00007 + 0,0007 + 0,007 + 0,07 + \dots + 7'000'000$
- $S_{20}$  pour  $u_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
- $S_{30}$  pour  $u_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
- $\sum_{k=1}^{25} \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- $\sum_{k=1}^{18} 2^k$  pour  $k$  impair

### Exercice 7

La location annuelle initiale d'un appartement se monte à 18'000 Frs. Dans le contrat le locataire doit accepter chaque année une augmentation de 5% par rapport au loyer de l'année précédente. On note  $L_n$  la suite des loyers annuels, avec  $L_1 = 18'000$  Frs.



- Déterminer le loyer des 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> année.
- Exprimer le terme général  $L_n$  de la suite des loyers.
- À combien s'élève le loyer de la 10<sup>ème</sup> année ?
- Calculer la somme payée au total durant 10 années de location.



## 12.13 Série 13

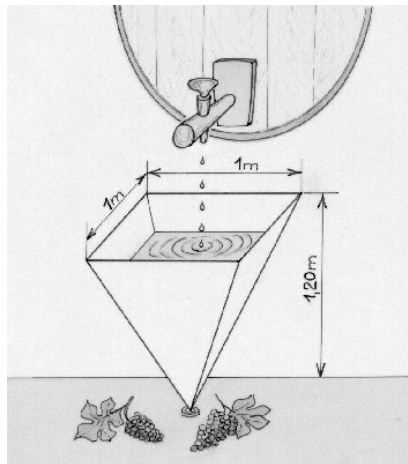
### Exercice 1

Calculer les volumes suivants :

- un cube de côté 2 cm ;
- un parallélépipède rectangle de longueur 4 m, de largeur 3 m et de hauteur 1,5 m ;
- un prisme droit dont la base est un triangle rectangle de mesures 6 mm, 8 mm et 10 mm et dont la hauteur vaut 10 mm ;
- un cylindre droit de rayon 2 cm et de hauteur 5 cm ;
- une pyramide à base carrée de côté 5 m et de hauteur 6 m ;
- un cône de rayon 3 cm et de hauteur 5 cm ;
- une sphère de rayon 3 km.

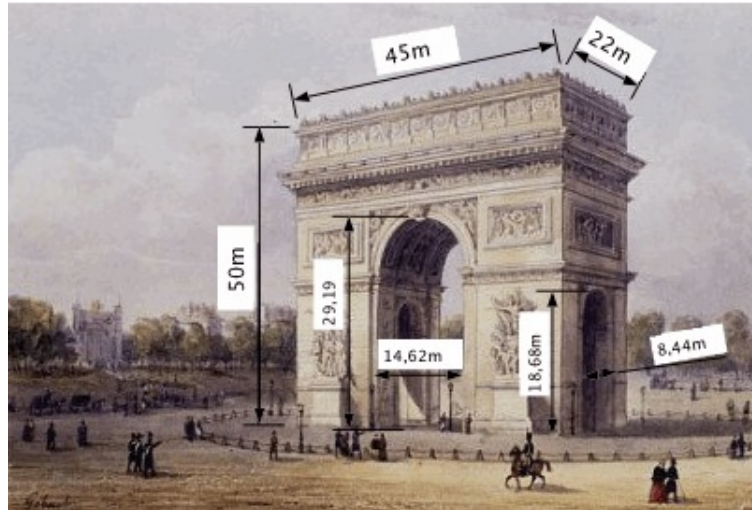
### Exercice 2

Calculer le nombre de mètres cubes d'eau que cette fontaine peut contenir :



### Exercice 3

Calculer le volume de pierre utilisé pour construire l'Arc de Triomphe de l'Étoile à Paris, achevé en 1836 au terme d'une trentaine d'années de travaux décidés par l'empereur Napoléon 1<sup>er</sup>.

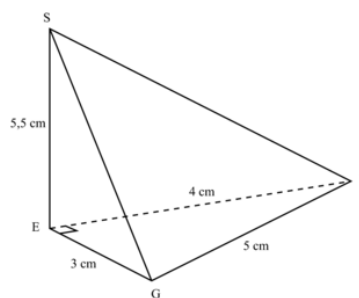


#### Exercice 4

Quel est le volume d'un cône droit dont le diamètre de la base mesure 20 cm et l'apothème mesure 13 cm ?

#### Exercice 5

Déterminer le volume de ce solide de hauteur  $\overline{SE}$  :



#### Exercice 6

On connaît le côté  $c = 3,87 \text{ cm}^3$  du carré de base d'une pyramide de volume  $V = 50,72 \text{ cm}^3$ . Calculer la hauteur  $h$  de cette pyramide.

**Exercice 7**

On connaît le volume  $V = 48,52 \text{ cm}^3$  d'une sphère (boule). Calculer la longueur  $r$  de son rayon.

**Exercice 8**

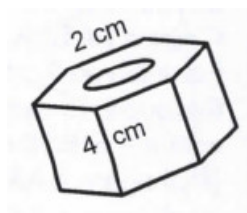
On connaît la hauteur  $h = 6,44 \text{ cm}$  d'un cône ainsi que son volume  $V = 28,91 \text{ cm}^3$ . Calculer le rayon  $r$  du disque de base de ce cône.

**Exercice 9**

On connaît la hauteur  $h = 8,46 \text{ cm}$  d'un cylindre ainsi que son volume  $V = 94,51 \text{ cm}^3$ . Calculer le rayon  $r$  du disque de base de ce cylindre.

**Exercice 10**

On veut percer un prisme à base hexagonale régulière de côté  $2 \text{ cm}$  et de hauteur  $4 \text{ cm}$ . Quel diamètre de mèche choisir pour que le volume soit diminué de moitié ?

**Exercice 11**

Un tas de gravier forme une pyramide régulière de base carrée et de hauteur  $8 \text{ m}$ . La longueur des arêtes reliant la base de la pyramide à son sommet est de  $12 \text{ m}$ . On veut stocker ce gravier dans un hangar cylindrique de hauteur  $6 \text{ m}$ , que l'on souhaite remplir à ras bord. Quel doit être le diamètre de ce hangar ?

**Exercice 12**

On remplit un vase cylindrique de  $17 \text{ cm}$  de hauteur, puis on verse le liquide dans un second vase ayant la forme d'une demi-sphère de rayon  $12 \text{ cm}$ . On refait encore deux fois l'opération, de sorte que le second récipient soit plein. Quel est le rayon du vase cylindrique ?

## 12.14 Série 14

---

### Exercice 1

On propose à Marlène de lancer simultanément trois pièces de monnaie parfaitement symétriques de 10, 20 et de 50 centimes respectivement. Elle pourra conserver les pièces qui présentent le côté pile.

- (a) Décrire l'univers  $\Omega$ .
- (b) Quelle probabilité a-t-elle de gagner
  - (i) 20 centimes ?
  - (ii) moins de 50 centimes ?
  - (iii) plus de 20 centimes ?

### Exercice 2

En utilisant les lois de De Morgan ainsi que les théorèmes de probabilités calculer les probabilités des événements ci-dessous en sachant que  $A$ ,  $B$  et  $A \cup B$  sont trois événements de probabilités 0,4; 0,5 et 0,6 respectivement :

- |                |                      |                            |
|----------------|----------------------|----------------------------|
| (a) $\bar{A}$  | (d) $\bar{A} \cap B$ | (g) $A \cup \bar{B}$       |
| (b) $\bar{B}$  | (e) $A \cap \bar{B}$ | (h) $\bar{A} \cap \bar{B}$ |
| (c) $A \cap B$ | (f) $\bar{A} \cup B$ | (i) $\bar{A} \cup \bar{B}$ |

### Exercice 3

Un sac contient 20 jetons. La moitié d'entre eux sont noirs, les autres blancs. Un quart des jetons portent en plus une marque spéciale ; trois de ces derniers sont noirs. On tire au hasard un jeton du sac. Quelle est la probabilité que ce jeton :

- (a) soit noir et porte une marque ?
- (b) soit noir sachant qu'il porte une marque ?
- (c) ne porte pas de marque sachant qu'il est blanc ?

### Exercice 4

Les 2000 habitants d'un village se répartissent de la manière suivante en fonction du groupe sanguin et du facteur Rhésus.

## Répartition

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>AB</b>	<b>O</b>
<b>Rh+</b>	656	162	83	720
<b>Rh-</b>	144	38	17	180

Si un habitant de ce village (suite à un accident ou lors d'une opération) a besoin d'une transfusion sanguine, quelle est la probabilité en % qu'il ait besoin :

- de sang **O** et **Rh+** ?
- de sang **Rh-**, sachant qu'il a un groupe sanguin **AB** ?
- de sang **B** et **Rh-** ?
- de sang **A** sachant qu'il a un facteur **Rh-** ?
- de sang **Rh-** sachant qu'il a un groupe sanguin **A** ?

**Exercice 5**

On dispose de deux urnes. La première, appelée *A*, contient 2 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules jaunes. La seconde, appelée *B*, contient 5 boules vertes et 3 boules rouges. On procède à l'expérience suivante. On lance un dé bien équilibré :

- si le nombre de points obtenu est inférieur ou égal à 2, on tire une boule de l'urne *A*.
- si le nombre de points obtenu est strictement supérieur à 2, on tire une boule de l'urne *B*.

Après avoir utilisé un arbre de classement, calculer les probabilités suivantes :

- Tirer une boule verte.
- Tirer une boule verte sachant que le nombre de points obtenu est strictement plus grand que 2.
- qu'une boule rouge tirée provienne de l'urne *B* (*application du théorème de Bayes*)

**Exercice 6**

Une boîte contient 5 ampoules dont deux sont défectueuses. Les ampoules sont testées les unes après les autres jusqu'à ce que les 2 ampoules défectueuses soient trouvées. Dessiner un arbre de classement puis répondre aux questions suivantes :

- Quelle est la probabilité que la recherche cesse après le deuxième test ?
- Quelle est la probabilité que la recherche cesse après le troisième test ?

### Exercice 7

Trois marques  $A$ ,  $B$  et  $C$  de biberons se partagent le marché avec des parts respectives de 43%, 34% et 23%. Chaque marque propose des modèles avec tétine simple ( $S$ ) ou à trois vitesses ( $V$ ) : 35% des tétines de la marque  $A$  sont simples, ainsi que 25% de la marque  $B$  et 74% de la marque  $C$ . Un jeune père achète au hasard un biberon. Il constate que le biberon a une tétine simple. Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque  $C$ ? (*Indication : dessiner un arbre de classement puis utiliser le théorème de Bayes.*)

### Exercice 8

Dans un collège imaginaire, 20% des garçons et 45% des filles ont choisi l'option forte de mathématiques. De plus, dans ce collège, il y a 60% de filles. Si un élève est choisi au hasard dans les cours de mathématiques fortes, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ?

### Exercice 9

Dans une entreprise :

10% des employés ont fait des études supérieures ;

70% de ceux qui ont fait des études supérieures occupent un poste administratif ;

20% de ceux qui n'ont pas fait d'études supérieures occupent un poste administratif.

On choisit au hasard un employé dans la section administrative. Quelle est la probabilité (en %) qu'il ait fait des études supérieures ?

