Quel est le nombre de côtés d'un polygone ayant un nombre donné de diagonales ?

Robinson Cartez

18 janvier 2021

Il n'est pas immédiat de répondre à cette question. Soit parce que nous ne savons tout simplement pas comment nous y prendre, soit parce que nous ne nous souvenons plus, alors que c'est une question à laquelle nous avons été confrontés par le passé. Le but est d'illustrer par cet exemple une application de la démonstration par induction (récurrence).

Table des matières

1 Introduction

Après la consultations d'une liste de problèmes de géométrie pour le secondaire, je m'arrête sur le premier. Il faut dire que c'est une publication en langue anglaise, dès lors ma traduction a été un peu rapide et cela a donné un énoncé inversé.

Combien de côtés a un polygone convexe ayant 40 diagonales ?

En essayant de répondre à la question de tête et le plus rapidement possible, je constate que la réponse est moins évidente que ce que je pensais au premier abord. D'autant plus que je ne résous pas tous les jours des problème de comptage de côtés de polygones convexes connaissant le nombre de diagonales. Il faut déjà connaître la formule, si elle existe, qui en donne le nombre... de quoi ? Bon, soit le nombre de sommets en fonction du nombre de diagonales, soit le nombre de diagonales en fonction du nombre de sommets. Comme le but est de trouver sans avoir besoin de connaître par coeur cette formule, si elle existe, je suis contraint "de partir de zéro". Et je ne souhaite pas non plus aller consulter un formulaire, espérant y trouver une telle formule.

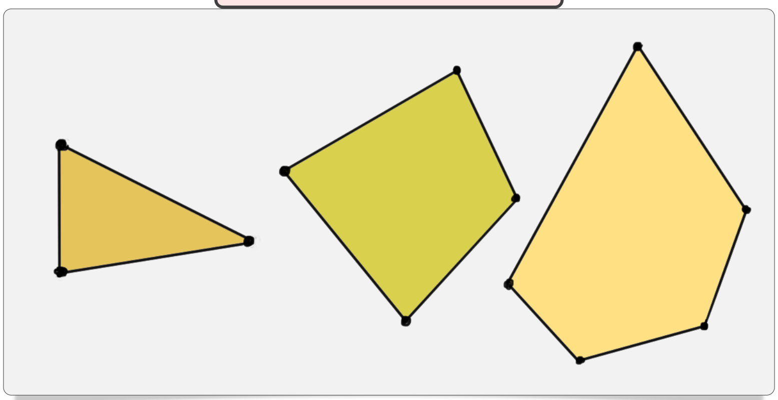
2 Développement

J'organise donc la stratégie pour attaquer le problème. Pour résoudre le problème posé, il faut voir s'il est possible de trouver une formule qui donne, soit le nombre de sommets d'un polygone convexe ayant le nombre de ses diagonales ; ou bien s'il est possible de donner le nombre de diagonales en ayant le nombre de ses sommets.

2.1 Comprendre l'énoncé

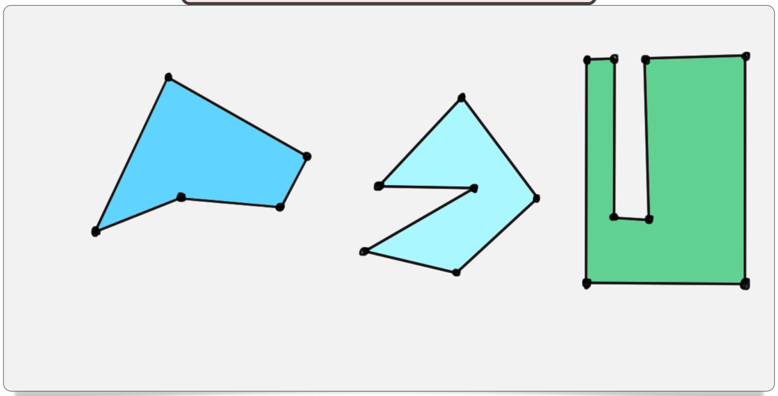
Il faut avoir compris tous les mots de l'énoncé. Les **polygones convexes** sont des figures géométriques planes ayant plusieurs angles, et il est facile de voir que ce nombre d'angles doit être supérieur ou égal à trois.

Polygones convexes



Ensuite le mot convexe. Une **figure plane convexe** est une figure qui contient tout segment dont les extrémités sont deux points du bord de la figure. On suppose naturellement, que le bord fait partie de la figure.

Polygones non convexes



Finalement une diagonale. Une diagonale d'un polygone convexe est un segment interne à la figure dont les extrêmités sont deux sommets de la figure. Ici, un bord n'est pas une diagonale. Un exemple clair de figure qui ne contient pas de diagonale sont les triangles. D'un autre côté, le carré a deux diagonales.

Du point de vue du langage employé, on dira 3-gone, 4-gone, etc. pour les polygones à 3 angles, à 4 angles, etc. En général, le mot réservé pour un polygone est un n-gone. Le mot "poly" est un préfixe, du grec *polus*, nombreux, indiquant la multiplicité. Et le mot "gone", du grec *gônia*, coin, angle.

2.2 Stratégie de résolution

Peu à peu on se souviens qu'il existe une formule qui donne le nombre de diagonales d'un n-gone, en fonction de n, le nombre de sommets.

On se dirige ainsi petit à petit vers une recherche heuristique du nombre de diagonales de quelques n-gones simples, dans un premier temps pour fixer les idées.

Ensuite, on va utiliser les réponse trouvées, sous forme de liste, de tableau, etc. pour conjecturer une formule qui nous donne le nombre de diagonales. Assez vite on va remarquer que cette formule doit être prouvée par une démonstration. La technique idéale pour ce genre de démonstrations est la preuve par induction ou par récurrence.

2.3 L'heuristique

Construisons un tableau à deux entrées : le nombre de sommets d'une part et le nombre de diagonales associées au polygone ayant ce nombre de sommets. C'est la manière la plus naturelle de procéder. En effet, puisque ce qui compte est le nombre de points, on va choisir le cercle comme support de nos différents dessins, pour y placer le nombre de points et les relier, en créer un polygone puis compter le nombre de diagonales que l'on arrive à y placer.

Nombre de sommets	Nombre de diagonales
3	0
4	2
5	5
6	9
7	14
...	...
n	?

Un observation attentive qu'on a l'habitude de faire dans ce genre de recherches, est celle qui consiste à regarder les intervalles entre les réponses obtenues, surtout dans la deuxième colonne.

On observe un séquence de différences croissante : 2, 3, 4 et 5. Cette observation est cruciale, car elle permet, moyenant un certain travail de produire une formule qui donne le nombre de diagonales en fonction du nombre de sommets. En clair de dire que

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$$

2.4 La démonstration par récurrence

Vient ensuite le moment de montrer que cette formule est vraie pour des nombres de sommets supérieurs à 7, dans notre cas. C'est la démonstration par récurrence.

Elle se construit en deux étapes.

(1) On démontre que le prédicat est vrai pour un nombre fini de cas initiaux.

(2) On démontre que si le prédicat est vrai pour un cas quelconque, alors il est vrai aussi pour le cas suivant.

2.5 Démonstration

Propriété

Le nombre de diagonales pour un polygone convexe de n sommets est

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$$

Démonstration. En effet, pour $n \leq 7$ la formule $d(n)$ est vérifiée. Ceci constitue la prmière étape de la démonstration.

Ensuite, montrons que la formule reste vraie pour $n+1$, c'est-à-dire, que

$$d(n+1) = \frac{(n+1)(n+1-3)}{2}$$

Si au polygone de n sommets nous ajoutons un nouveau sommet, le nombre de nouvelles diagonales sera de $n-2+1$. En effet, le nouveau sommet aura forcément deux voisins, avec lesquels il ne peut pas former de diagonales : cela fait que le nouveau sommet formera $n-2$ nouvelles diagonales avec les $n-2$ sommets qui ne sont pas ses voisins. Le "$+1$" s'explique par le fait que l'ancien bord qui reliait les voisins du nouveau sommet, devient alors une nouvelle diagonale.

En tout, après avoir ajouté un nouveau sommet, on aura $d(n)+n-1$ diagonales, c'est-à-dire que

$$d(n+1) = d(n) + n - 1$$

Vérifions et terminons la démonstration en montrant que les deux expressions pour $d(n+1)$ correspondent :

$$
\begin{aligned}
d(n+1) &= \frac{(n+1)(n+1-3)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n-2)}{2} \\
&= \frac{n^2-2n+n-2}{2} \\
&= \frac{n^2-2n+n-2-n+n}{2} \\
&= \frac{n^2-3n+2n-2}{2} \\
&= \frac{n^2-3n}{2}+\frac{2n-2}{2} \\
&= \frac{n(n-3)}{2}+\frac{2(n-1)}{2} \\
&= d(n)+(n-1)
\end{aligned}
$$

□

3 Réponse à la question

Maintenant que nous savons que notre formule est correcte, nous pouvons répondre à la question.

Ainsi on doit savoir s'il existe un n tel que

$$d(n) = 40$$

En développant on a

$$
\begin{aligned}
\frac{n(n-3)}{2} &= 40 \Leftrightarrow \\
n(n-3) &= 80 \Leftrightarrow \\
n^2-3n-80 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Delta = (-3)^2 + 4 \cdot 80 = 9 + 320 = 329$$

Ce discriminant (Δ) n'est pas un carré parfait : $\sqrt{329} \approx 18{,}138$. De ce fait n ne peut pas être un entier comme attendu. C'est donc qu'un tel polygone n'existe pas.

Une réponse alternative : puisque $d(10) = 35$ et que $d(11) = 44$ il n'y a pas de polygone convexe entre le 10-gone et le 11-gone !