Équations quadratiques

Robinson Cartez

d'après une idée de Lorella Linder

3 juin 2020

La notion de fonction est désormais connue pour vous. Passons maintenant à la résolution des équations du second degré. Une fonction du second degré (en une inconnue, ici x) est une expression contenant une seule fois l'inconnue au carré. Si ce n'est pas le cas, il faut réduire cette expression et la ramener à une forme dite **standard**

$$ax^2 + bx + c$$

Dès que l'on ajoute une égalité à cette expression cela devient une équation.

Le but ici est d'exercer différentes notions expliquées en début de dossier. Pour certains d'entre vous, ce sont des nouvelles notions. Mais cela ne doit pas être un prétexte pour ne pas travailler sur les questions posées. Allez le plus loin possible. Et surtout, posez des questions.

Table des matières

1 Notions/rappels

1.1 Équations

Une équation quadratique est une expression de la forme suivante (dite **forme standard**) :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

que l'on peut voir aussi écrite sans le "point" de multiplication :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ce dernier étant alors sous-entendu.

Dans cette équation "x" est l'inconnue (qu'il faut trouver pour que l'égalité soit vraie) et a, b et c sont des nombres réels (c'est-à-dire qui appartiennent à l'ensemble noté $\mathbb{R}$).

Pour résoudre une telle équation on utilise des formules "toutes prêtes" appelées **formules de Viète**, dues au mathématicien français, François Viète (1540-1603). Je ne les donne pas séparément, vous pourrez les trouver dans n'importe quel manuel de mathématiques qui parle du sujet (chercher par exemple sur le net "formules de Viète"). Par contre je montre comment les utiliser.

Avant tout, il faut mettre l'équation sous forme standard. Puis il faut identifier les valeurs pour a, b et c.

Ensuite, **il faut** calculer la valeur de la première des formules

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

où "Δ" est une lettre grecque de nom "delta" et qui désigne le nombre discriminant, c'est-à-dire un nombre nous permettant de décider s'il y a ou non des solutions pour l'équation donnée.

On passe à l'analyse du discriminant, donc si

1. $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solutions. Vous pouvez répondre par

   Pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

2. $\Delta = 0$, alors il y a une seule solution. Vous pouvez répondre par

$$\boldsymbol{x = \frac{-b}{2a}}$$

   ou

$$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

   cette dernière façon si l'on vous demande de donner l'ensemble solution.

3. $\Delta > 0$, alors il y a deux solutions. Vous pouvez répondre par

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

   ou

$$S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; \ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

   cette dernière façon si l'on vous demande de donner l'ensemble solution.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)^2 - 8x = 0$.

Solution : Il faut commencer par mettre l'équation sous forme standard, car on "voit", après le développement de la parenthèse, qu'il s'agit d'une équation du second degré. Dans tous les cas il faut développer l'expression puis réduire :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - 8x = 0 &\Leftrightarrow \\ (x+1)(x+1) - 8x = 0 &\Leftrightarrow \\ x^2 + 2x + 1 - 8x = 0 &\Leftrightarrow \\ x^2 - 6x + 1 = 0 &\end{aligned}$$

À ce stade on **identifie** la valeur des lettres a, b et c :

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 1$$

Et ensuite le calcul de Δ :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = 36 - 4 = 32$$

Puisque $\Delta > 0$ il y a deux solutions, donc

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-(-6) + \sqrt{32}}{2 \cdot (1)} \\ &= \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-(-6) - \sqrt{32}}{2 \cdot (1)} \\ &= \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

et

$$\boldsymbol{S = \left\{3 + 2\sqrt{2};\ 3 - 2\sqrt{2}\right\}}$$

1.2 Domaine de définition

Le **domaine de définition** d'une fonction (ou d'une expression algébrique) est l'ensemble de nombres auquel appartient la variable "x" pour garantir la validité de l'image c'est-à-dire, du résultat de l'expression une fois le calcul effectué grâce à la valeur donnée à "x".

Exemple 1

Si f est une fonction en x, prennant des valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$$

alors si $x = 3$ il y aura une division par 0, ce qui n'est pas défini, donc il faut éviter cette division par zéro. Le moyen de le faire est d'éviter que x soit égale à 3, on doit donc "enlever" de l'ensemble de départ (celui des pré-images) la valeur 3. Pour noter cette exclusion, on met les nombres interdits dans un ensemble

$$\{3\}$$

puis on écrit le domaine de définition

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{3\}$$

le signe "\" est un "moins" ensembliste, l'opération soustraction pour les ensembles.

Exemple 2

Si g est une expression de la forme

$$g(x) = 3 + \sqrt{x - 1}$$

alors

$$\mathcal{D}_g = [1;\ +\infty[$$

c'est-à-dire que tous les x valables sont ceux dont l'expression

$$x - 1 \geq 0$$

est vraie, c'est-à-dire

$$x \geq 1$$

des x plus grands ou égaux à 1.

La raison est que **la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie**.
D'où l'intervalle des valeurs valables $[1;\ +\infty[$. Pour donner le domaine de définition on écrira

$$\mathcal{D}_g = [1;\ +\infty[$$

qui veut dire que la fonction g est définie pour tous les x de 1 à l'infini.

2 Problèmes

(1) Résoudre les équations suivantes avec les formules de Viète.

a) $12x^2 - 10x - 2 = 0$

b) $(x + 3)^2 - (x + 2)(2 - x) = 10x + 1$

c) $0{,}24x^2 = 13{,}2x + 72$

(2) En utilisant les formules de Viète, dire pour quelles valeurs du paramètre d l'équation ci-dessous

$$x^2 + d \cdot x + 12{,}25 = 0$$

possède

a) une solution,

b) deux solutions,

c) aucune solution dans $\mathbb{R}$?

(3) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 4} - \frac{8x}{x - 4}$$

a) Déterminer le domaine de définition de f, c'est-à-dire donner $\mathcal{D}_f$.

b) Trouver les solutions (arrondies au centième) de l'équation

$$f(x) = 0$$

(indice : remplacer $f(x)$ par sa définition...)

(4) Dans un rectangle un côté est 7 cm plus grand que le double de l'autre côté. Nous savons que la surface est de 60 cm^2. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?