Équations quadratiques (correction)

Robinson Cartez

d'après une idée de Lorella Linder

3 juin 2020

La notion de fonction est désormais connue pour vous. Passons maintenant à la résolution des équations du second degré. Une fonction du second degré (en une inconnue, ici x) est une expression contenant une seule fois l'inconnue au carré. Si ce n'est pas le cas, il faut réduire cette expression et la ramener à une forme dite **standard**

$$ax^2 + bx + c$$

Dès que l'on ajoute une égalité à cette expression cela devient une équation.

Le but ici est d'exercer différentes notions expliquées en début de dossier. Pour certains d'entre vous, ce sont des nouvelles notions. Mais cela ne doit pas être un prétexte pour ne pas travailler sur les questions posées. Allez le plus loin possible. Et surtout, posez des questions.

Table des matières

1 Notions/rappels

1.1 Équations

Une équation quadratique est une expression de la forme suivante (dite **forme standard**) :

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

que l'on peut voir aussi écrite sans le "point" de multiplication :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ce dernier étant alors sous-entendu.

Dans cette équation "x" est l'inconnue (qu'il faut trouver pour que l'égalité soit vraie) et a, b et c sont des nombres réels (c'est-à-dire qui appartiennent à l'ensemble noté $\mathbb{R}$).

Pour résoudre une telle équation on utilise des formules "toutes prêtes" appelées **formules de Viète**, dues au mathématicien français, François Viète (1540-1603). Je ne les donne pas séparément, vous pourrez les trouver dans n'importe quel manuel de mathématiques qui parle du sujet (chercher par exemple sur le net "formules de Viète"). Par contre je montre comment les utiliser.

Avant tout, il faut mettre l'équation sous forme standard. Puis il faut identifier les valeurs pour a, b et c.

Ensuite, **il faut** calculer la valeur de la première des formules

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

où "Δ" est une lettre grecque de nom "delta" et qui désigne le nombre discriminant, c'est-à-dire un nombre nous permettant de décider s'il y a ou non des solutions pour l'équation donnée.

On passe à l'analyse du discriminant, donc si

1. $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solutions. Vous pouvez répondre par

   Pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

2. $\Delta = 0$, alors il y a une seule solution. Vous pouvez répondre par

   $$\boldsymbol{x = \frac{-b}{2a}}$$

   ou

   $$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

   cette dernière façon, si l'on vous demande de donner l'ensemble solution. Bien évidemment vous devez substituer les lettres a, b et c par les nombres de l'équation donnée.

3. $\Delta > 0$, alors il y a deux solutions. Vous pouvez répondre par

   $$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

   ou

   $$S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

   cette dernière façon, si l'on vous demande de donner l'ensemble solution.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)^2 - 8x = 0$.

Solution : Il faut commencer par mettre l'équation sous forme standard, car on "voit", après développement de la parenthèse, qu'il s'agit d'une équation du second degré. Dans tous les cas il faut développer l'expression puis réduire :

$$\begin{aligned} (x+1)^2 - 8x = 0 &\Leftrightarrow \\ (x+1)(x+1) - 8x = 0 &\Leftrightarrow \\ x^2 + 2x + 1 - 8x = 0 &\Leftrightarrow \\ x^2 - 6x + 1 = 0 & \end{aligned}$$

À ce stade on **identifie** la valeur des lettres a, b et c :

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 1$$

Et ensuite le calcul de Δ :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = 36 - 4 = 32$$

Puisque $\Delta > 0$ il y a deux solutions, donc

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-6) + \sqrt{32}}{2 \cdot (1)} \\ &= \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-(-6) - \sqrt{32}}{2 \cdot (1)} \\ &= \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

et

$$\boldsymbol{S = \left\{3 + 2\sqrt{2};\ 3 - 2\sqrt{2}\right\}}$$

1.2 Domaine de définition

Le **domaine de définition** d'une fonction (ou d'une expression algébrique) est l'ensemble des nombres auquel appartient la variable "x" pour garantir la validité de l'image c'est-à-dire, du résultat de l'expression une fois le calcul effectué grâce à la valeur donnée à "x".

Exemple 1

Si f est une fonction en x, prennant des valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que

$$f(x) = \frac{2x - 1}{3 - x}$$

alors si $x = 3$ il y aura une division par 0, ce qui n'est pas défini, donc il faut éviter cette division par zéro. Le moyen de le faire est d'éviter que x soit égal à 3, on doit donc "enlever" de l'ensemble de départ (celui des pré-images) la valeur 3. Pour noter cette exclusion, on met les nombres interdits dans un ensemble

$$\{3\}$$

puis on écrit le domaine de définition

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{3\}$$

le signe "\" est un "moins" ensembliste, l'opération soustraction pour les ensembles.

Exemple 2

Si g est une expression de la forme

$$g(x) = 3 + \sqrt{x-1}$$

alors

$$\mathcal{D}_g = [1;\ +\infty[$$

c'est-à-dire que tous les x valables sont ceux dont l'expression

$$x - 1 \geq 0$$

est vraie, c'est-à-dire

$$x \geq 1$$

des x plus grands ou égaux à 1.

La raison est que **la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie**.
D'où l'intervalle des valeurs valables $[1;\ +\infty[$. Pour donner le domaine de définition on écrira

$$\mathcal{D}_g = [1;\ +\infty[$$

qui veut dire que la fonction g est définie pour tous les x de 1 à l'infini.

2 Problèmes

(1) Résoudre les équations suivantes avec les formules de Viète.

a) $12x^2 - 10x - 2 = 0$

Solution

On peut diviser par deux toute l'équation. Puis

$$6x^2 - 5x - 1 = 0$$

Calcul de Δ

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (6) \cdot (-1) = 25 + 24 = 49$$

Comme $\Delta > 0$ il y a deux solutions :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5+\sqrt{49}}{2\cdot 6} \\ &= \frac{5+7}{12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{5-\sqrt{49}}{2\cdot 6} \\ &= \frac{5-7}{12} \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

b) $(x+3)^2-(x+2)(2-x)=10x+1$

Solution

Il faut commencer par développer puis déduire et mettre l'équation sous forme standard.

$$
\begin{aligned}
(x+3)^2-(x+2)(2-x)=10x+1 &\Leftrightarrow \\
x^2+6x+9-(x+2)(2-x)=10x+1 &\Leftrightarrow \\
x^2+6x+9-2x+x^2-4+2x=10x+1 &\Leftrightarrow \\
x^2+6x+9-2x+x^2-4+2x-10x-1=0 &\Leftrightarrow \\
2x^2-4x+4=0 &\Leftrightarrow \\
x^2-2x+2=0 &
\end{aligned}
$$

Puis on identifie les lettre a, b et c :

$$a=1; \quad b=-2; \quad c=2$$

Et on calcule Δ :

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot(1)\cdot(2)=4-8=-2$$

Comme $\Delta<0$... :

Il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

c) $0{,}24x^2=13{,}2x+72$

Solution

On met l'équation sous forme standard :

$$0{,}24x^2-13{,}2x-72=0$$

On calcule Δ :

$$\Delta=(-13{,}2)^2-4\cdot(0{,}24)\cdot(-72)=174{,}24+69{,}12=243{,}36$$

Comme $\Delta>0$ il y a deux solutions, qui sont

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{13{,}2+\sqrt{243{,}36}}{0{,}48}=\frac{13{,}2+15{,}6}{0{,}48} \\
&= \frac{28{,}8}{0{,}48} \\
&= 60
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{13{,}2-\sqrt{243{,}36}}{0{,}48}=\frac{13{,}2-15{,}6}{0{,}48} \\
&= \frac{-2{,}4}{0{,}48} \\
&= -5
\end{aligned}
$$

(2) En utilisant les formules de Viète, dire pour quelles valeurs du paramètre d l'équation ci-dessous

$$x^2+d\cdot x+12{,}25=0$$

possède

a) une solution,

b) deux solutions,

c) aucune solution dans $\mathbb{R}$?

Solution

On prépare le "terrain" en identifiant la valeur des lettres a, b et c puis en calculant Δ :

$$a = 1, \quad b = d, \quad c = 12{,}25$$
$$\Delta = d^2 - 4 \cdot (1) \cdot (12{,}25) = d^2 - 49 = (d+7) \cdot (d-7)$$

a) $\Delta = 0 \Leftrightarrow\ d^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow\ (d+7) \cdot (d-7) = 0 \Leftrightarrow\ d = 7$ ou $d = -7$.

b) $\Delta > 0 \Leftrightarrow\ d^2 - 49 > 0 \Leftrightarrow\ d^2 > 49 \Leftrightarrow\ d > 7$ ou $d < -7$.

c) $\Delta < 0 \Leftrightarrow\ d^2 - 49 < 0 \Leftrightarrow\ d^2 < 49 \Leftrightarrow\ d < 7$ ou $d > -7$.

(3) Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x-2}{x+4} - \frac{8x}{x-4}$$

a) Déterminer le domaine de définition de f, c'est-à-dire donner $\mathcal{D}_f$.

Solution

On doit éviter la division par 0. On veut donc que les deux expressions suivantes soient vraies

$$x - 4 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad x + 4 \neq 0$$

Ce qui arrive si et seulement si

$$x \neq 4 \qquad \text{et} \qquad x \neq -4$$

Il faut donc exclure ces deux nombres de l'ensemble des pré-images. On a donc le domaine de définition suivant :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-4;\ 4\}$$

b) Trouver les solutions (arrondies au centième) de l'équation

$$f(x) = 0$$

(indice : remplacer $f(x)$ par sa définition...)

Solution

Il faut tout d'abord remplacer $f(x)$ par sa définition :

$$\frac{x-2}{x+4} - \frac{8x}{x-4} = 0$$

Ensuite, il faut trouver le dénominateur commun. Ici on prend les deux parenthèses comme s'il s'agissait de nombres. Comme il s'agit de "nombres" différents, le dénominateur commun le plus simple est le produit des deux "nombres", c'est-à-dire $(x+4) \cdot (x-4)$. On multiplie alors la première fraction par $(x-4)$ et la seconde par $(x+4)$, cela donne :

$$\frac{(x-2)(x-4)}{(x+4)(x-4)} - \frac{8x(x+4)}{(x-4)(x+4)} = 0$$

On va ensuite multiplier TOUTE l'équation par ce même dénominateur commun. Puisqu'à droite il y a un zéro, en multipliant par un nombre cela reste zéro.

Vous pouvez aussi remarquer le raisonnement suivant, qui amène le même résultat : *Puisque le dénominateur ne peut jamais être zéro, pour que ces deux fractions soient zéro il faut et il suffit que les numérateurs soient égaux à zéro. Alors on ne garde que les numérateurs :*

$$(x-2)(x-4) - 8x(x+4) = 0$$

On développe les parenthèses, puis on réduit les expressions :

$$\begin{aligned}
(x-2)(x-4) - 8x(x+4) = 0 &\Leftrightarrow \\
x^2 - 6x + 8 - 8x(x+4) = 0 &\Leftrightarrow \\
x^2 - 6x + 8 - 8x^2 - 32x = 0 &\Leftrightarrow \\
-7x^2 - 38x + 8 = 0 &
\end{aligned}$$

On identifie les lettres a, b et c :

$$a = -7, \quad b = -38, \quad c = 8$$

On calcule Δ :

$$\Delta = (-38)^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 8 = 1\,444 + 224 = 1\,668$$

Puisque $\Delta > 0$ il y a deux solutions :

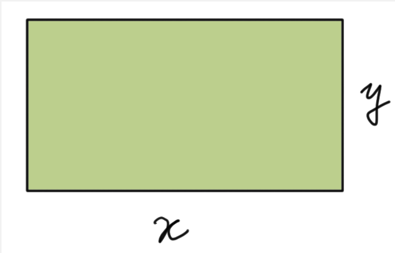
$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{38 + \sqrt{1\,668}}{-14} \\
&\approx -5{,}63
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{38 - \sqrt{1\,668}}{-14} \\
&\approx 0{,}20
\end{aligned}$$

(4) Dans un rectangle un côté est 7 cm plus grand que le double de l'autre côté. Nous savons que la surface est de 60 cm^2. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Solution

On modélise par un dessin :



Ensuite on a un côté qui est dépendant de l'autre, ce qui nous fait une équation :

$$x = 2y + 7$$

Puis nous avons la valeur de la surface, là aussi nous avons une équation :

$$x \cdot y = 60$$

qui s'écrit plus simplement comme :

$$(2y + 7) \cdot y = 60$$

On utilise donc cette deuxième équation qui ne contient qu'une seule inconnue, y. Pour ce faire on applique les formules de Viète : identifier la valeur des lettres a, b et c puis on calcule Δ, et on conclut :

$$a = 2, \quad b = 7, \quad c = -60$$

$$\Delta = (7)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-60) = 49 + 480 = 529$$

Comme $\Delta > 0$ on a deux solutions :

$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{529}}{4} = \frac{-7 \pm 23}{4} = \begin{cases} 4 & \text{Ok, valeur acceptée.} \\ -\dfrac{30}{4} & \text{Ce n'est pas une longueur !} \end{cases}$$

Donc, $y = 4$ et $x = 2 \cdot 4 + 7 = 15$ et la réponse est

Les dimensions du rectangle sont 4×15 **cm.**