# La notion de *fonction*

Robinson Cartez

November 19, 2023

La notion de fonction est tellement générale, que l'on a de la peine à s'en défaire et tout autant, pour certaines presonnes, à la comprendre.

Le but ici est de définir mathématiquement la notion de fonction, mais aussi d'amener des exemples permettant de lui donner un sens.

La "fonction" est partout, il suffit lancer son lave vaisselle pour s'en rendre compte !

## Contents



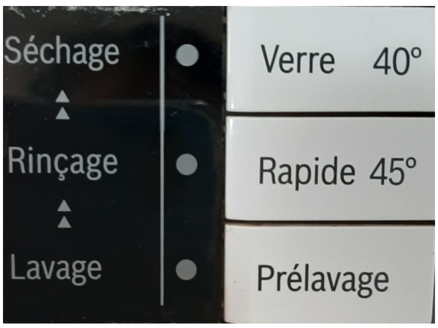
## 1 Qui l'utilise ?

On utilise quotidiennement l'expression "en fonction de ...", sans même s'en rendre compte.

### À la maison

En effet, la plupart des appareils éléctroménager comportent, dans leur mode d'emploi une référence au mot "fonction". Pour fonctionner (encore !) un appareil doit effectuer un certain travail, et ce travail dépend du choix de l'utilisateur.

Par exemple, lorsqu'on enclenche un lave-vaisselle, on peut choisir la fonction "Prélavage" au lieu de lavage. Le lavage des assiettes, quant à lui, peut se faire de différentes manière: Rapide, Verres 40°, Eco 50°, auto $45 - 65°$ ou Intensif 70°.


Et la liste des appareils qui nous entourent est longue.

C'est donc nous, les humains, qui les premiers avons besoin de la notion de fonction pour désigner une activité, un rôle, une tâche à effectuer, un processus.

### En entreprise

Dans ce contexte, l'on parle "la fonction d'un employé". Dans ce cas sa fonction détermine quelle est la tâche qu'il a à accomplir au sein de l'entreprise. Un mot que vous connaissez sans doute est "fonctionnaire". Par exemple votre enseignant est un fonctionnaire.

Mais la notion de fonction, nécessite d'autres "ingrédients". Par exemple, un **caissier** dans une grande surface, a besoin de personnes qui achètent des produits pour accomplir son travail. Son rôle, sa fonction est de fait passer les personnes de l'état d'**acheteurs** à celui de **propriétaires**. C'est une manière de voir sa fonction. Ce qui est important pour nous ici c'est la notion **relation** qu'il existe entre l'état d'"acheteur" et celui de "propriétaire".

### Dans la rue

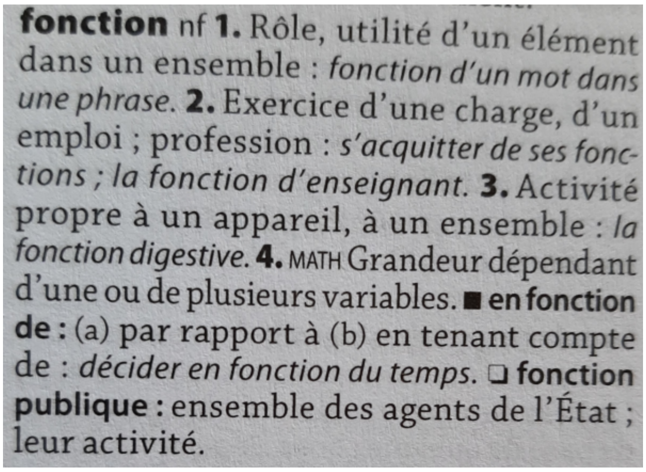
Lorsque vous êtes dans la rue, essayez de vous demander quel rôle ont certaines personnes dans ce contexte. Essayez d'identifier quelle sont les relations entre les personnes, entre les choses et même entre les personnes et les choses, pourquoi pas avec des situations.

Par exemple, le bus. Sa fonction est de transporter des gens d'un endroit à un autre. Il met en relation une personne avec **<u>un</u> lieu particulier**.

En effet, les personnes qui prennent le bus ne peuvent descendre qu'à un seul endroit. Il est impossible pour elles de descendre à deux endroits différents, en même temps ! Ici nous pouvons déjà entrevoir ce que pourrait être la définition de fonction mathématique que nous donnons par la suite.

## 2 Qu'est-ce qu'une fonction mathématique ?

Tout d'abord, montrons ce que nous dit le Larousse de Poche+ 2017:



**fonction** nf **1.** Rôle, utilité d'un élément dans un ensemble : *fonction d'un mot dans une phrase.* **2.** Exercice d'une charge, d'un emploi ; profession : *s'acquitter de ses fonctions ; la fonction d'enseignant.* **3.** Activité propre à un appareil, à un ensemble : *la fonction digestive.* **4.** MATH Grandeur dépendant d'une ou de plusieurs variables. ■ **en fonction de :** (a) par rapport à (b) en tenant compte de : *décider en fonction du temps.* ❑ **fonction publique :** ensemble des agents de l'État ; leur activité.

Ce qui nous intéresse ici est évidemment la partie mathématique.

### Grandeurs

Par rapport à ce que nous avons déjà dit, la **grandeur** est un nombre et représente "la chose" mise en *relation* avec une autre chose. Pour nous, ce seront des nombres qui seront mis en relation avec d'autres nombres.

### Dépendance

La **dépendance** est la manière que la fonction a de mettre en *relation* les grandeurs en jeu. Il faut savoir qu'un fonction mathématique peut utiliser plus que deux grandeurs lorsqu'elle agit sur celles-ci. Mais nous nous contenterons de **deux** grandeurs.

### Variable

Comme vous le savez déjà, en mathématiques nous utilisons des **variables**. C'est des lettres qui représentent les valeurs des grandeurs mises en *relation* et que nous appelons $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.

### Relation

Le mot qui est au centre de la notion de fonction est **relation**.

Le mot relation veut dire "lien de cause à effet". C'est important pour nous ces mots **cause** et **effet**.

Par exemple, et sans entrer dans les détails, lorsque l'on pousse un verre jusqu'au bord d'une table, et que nous continuons ainsi jusqu'à ce qu'il tombe, on peut sans doute déjà imaginer la conséquence que cette action va avoir sur le verre: il va tomber et va se briser.

Dans cette exemple, la "poussée jusqu'au bord de la table", constitue la **cause** et "il va tomber et se briser" constitue l'**effet**. On peut alors *définir la fonction qui brise un verre* (qui n'est pas unique, car d'autres *fonctions* peuvent aussi briser des verres). Cette fonction mettra en **relation** deux "grandeurs": le verre et le verre brisé.

### Couples

Nous avons donc des **couples** qui sont en relation, ou plutôt dans une relation particulière. Une paire n'est pas ordonnée, *a priori*, c'est pour cela que nous utilisons le mot couple, qui est en fait **une paire ordonnée**: $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

Une liste de paires peut être la définition d'une fonction. Vous vous souvenez des tableaux de proportionnalité.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Qté | 1 | 12 | 2 | ... |
| Prix (Fr) | 2,5 | 30 | 5 | ... |

Les couples ici sont (1; 2,5), (12; 30) et (2; 5)

### Transformation

Une fonction mathématique est aussi une **transformation** qui est opérée sur les valeurs des grandeurs en entrée, que l'on va appeler $x$. La valeurs transformée est appelée $y$, mais il ne faut pas oublier que cette valeur était $x$ au départ, et que c'est la **f**onction qui l'a transformée en $y$. Donc, tout naturellement nous appelons $f(x)$ cette valeur $y$, ainsi $f(x) = y$.

## 3 Où est-ce que l'on utilise une fonction ?

En général dans tout le domaine scientifique.

À chaque fois que nous voulons exprimer une transformation, une relation, une dépendance, le niveau d'un changement, l'éloignement des choses les unes des autres, la quantité consommée, restante, qu'il y aura après un certain temps, etc.

### En biologie

Un exemple peut être le rôle des protéines dans les organismes vivants.

FONCTIONS DES PROTEINES

| Fonction | Exemple | Rôle |
|---|---|---|
| Élément structural | Collagène | Force de tension |
| Transporteur | Hémoglobine | Transport de l'oxygène |
| Hormone | Insuline | Contrôle concentration Glucose sanguin |
| Récepteur | Acétylcholine | Induction de la contraction musculaire |
| Défense contre les infections | Anticorps | Liaison à un agent infectueux pour le détruire |
| Enzymes | Trypsine | Dégradation protéines ingérées dans l'intestin |
| Mouvement | Myosine | Contractilité des muscles |

http://biologiefacil.blogspot.com/2013/07/proteines-2.html

## En économie

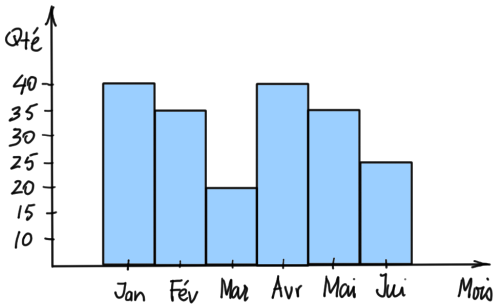
Une fonction peut être "le troc", bien qu'en réalité il y ait des fonction économiques beaucoup plus complexes que celle-ci.


## En météorologie

En météorologie, il s'agit, essentiellement de tâches de prévision en fonction de cetains paramètres, ou variables. Par exemple le lieu où l'on se trouve, ou encore la hauteur à laquelle on se trouve. La prévision peut être transmise sous plusieurs formes. L'une d'entre elles est l'image d'une évolution, sous forme de pictogrammes, en fonction du temps (les autres paramètres sont cachés et servent à créer la prévision. Pour rappel nous ne nous intéressons qu'à des fonctions à deux variables). Donc ici le temps qu'il fait dépend du temps qui passe (!).


### En statistique

En statistiques descriptive, presque tout est illustré sous forme de graphique. En général des graphiques à deux entrées. Les valeurs des deux grandeurs en relation, sont placées sur des axes, l'un vertical et l'autre horizontal.




À ce point de l'exposé, on peut préciser que la valeur de l'**axe vertical** **<u>dépend</u>** de la valeur de l'**axe horizontal**.

### En informatique

En informatique, la fonction est centrale. Sans entrer dans les détails un ordinateur en lui-même est une fonction en ce sens qu'il ne fait que traiter l'information qu'on lui donne et il restitue cette information transformée. Par exemple lorsque vous écrivez avec votre traitement de texte, vous tapez sur le clavier, cela génère une impulsion éléctronique (l'information en entrée) qui est traitée par tout un tas d'éléments internes à l'ordinateur, pour ensuite être restituée sous forme de texte affiché à l'écran (l'information transformée).

Le lien avec les mathématiques est presque directe.

**Fonction $f(x) = 2 \cdot x$ en langage Python**

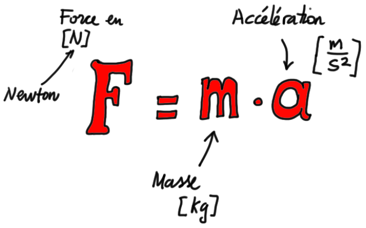
```
def f(x):
      return x*2
```

L'execution de cette fonction se fait en donnant une **valeur en entrée** et la fonction donne une **valeur en sortie** $f(3) = 6$.

## En physique

Le physicien décrit tout son domaine de connaissances à l'aide de fonctions. Vu de notre point de vue, il s'agit plutôt de formules. Arrivés à ce stade, le formalisme mathématique se perd un petit peu, car ce qui intéresse le physicien c'est d'abord de décrire un phénomène, c'est seulement ensuite, lorsqu'il faudra faire des calculs précis ou bien démontrer une prévision, que le formalisme mathématique reprend sa place.

Par exemple la "force" exercée sur un objet dépend de deux grandeurs: la masse de l'objet et l'accélération de l'objet. Le physicien écrira $F = m \cdot a$, alors que si c'est $F$ le nom de la fonction, en mathématiques il faut écrire $F(m, a) = m \cdot a$ pour signifier que $F$ dépend de deux paramètres (variables) ici la masse $m$ et l'accélération $a$.




Donc, en physique on visualise et on utilise beaucoup les formules, qui sont, selon les cas (qui est à gauche du signe $=$), des fonctions. La grandeur exprimée par les variables de la "formule" (car pour nous ce sont des fonctions) peut être directement ou inversement proportionnelle aux autres grandeurs de la formule. C'est une partie importante de l'étude en mathématiques des formules et de la notion de dépendance et de proportionnalité des grandeurs.

## En mathématiques

Maintenant que l'on a une vue un peu plus large de la notion de **fonction**, donnons sa définition mathématique.

**Définitions**

Soient deux ensembles[a] $A$ et $B$, distincts ou non. Une correspondance de $A$ vers $B$ qui associe à tout élément de $A$ *exactement* un élément de $B$ est une **fonction de $A$ vers $B$**.

Si $\boldsymbol{f}$ désigne cette fonction, alors on note

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{B}$$

la fonction en question.

Dans ce contexte, $\boldsymbol{A}$ est l'**ensemble de départ** et $\boldsymbol{B}$ celui l'**ensemble d'arrivée**.

Si $\boldsymbol{a}$ est un élément de $\boldsymbol{A}$, on désigne par $\boldsymbol{f(a)}$ (qui se lit "f de a") l'élément de $\boldsymbol{B}$ qui lui correspond: $\boldsymbol{f(a)}$ est l'**image de a par $\boldsymbol{f}$**.

L'ensemble $\boldsymbol{A}$ est l'ensemble des **pré-images** ou **antécédents**.

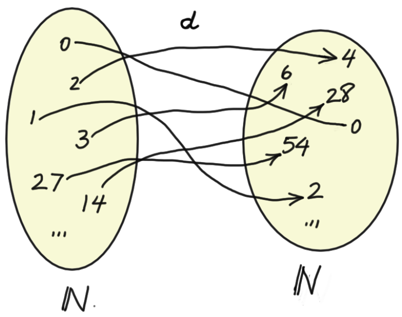
L'ensemble $\boldsymbol{B}$ est l'ensemble des **images**.

Finalement l'ensemble des couples $\boldsymbol{(a,\ f(a))}$ est une définition de la fonction $\boldsymbol{f}$.

[a] En réalité, nous définissons une *application* c'est à dire une fonction pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ a une et une seule image, c'est-à-dire que la fonction est partout définie, ce n'est pas toujours le ca.

Par exemple, l'idée de **doubler un entier naturel** est représenté par la fonction illustrée ci-dessous. Nous pouvons appeler cette fonction $\boldsymbol{d}$ pour "doubler" qui prends en **entrée**, dans la variable $\boldsymbol{x}$ un entier naturel ($\mathbb{N}$) et a comme image ($\boldsymbol{d(x)}$) un autre entier naturel représenté par la variable $\boldsymbol{y}$. Ainsi on peut écrire mathématiquement que la fonction $\boldsymbol{d}$ va des entiers naturels vers les entiers naturels:

$$\boldsymbol{d} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$$
$$\boldsymbol{d} : \boldsymbol{x} \rightarrow 2 \cdot \boldsymbol{x}$$



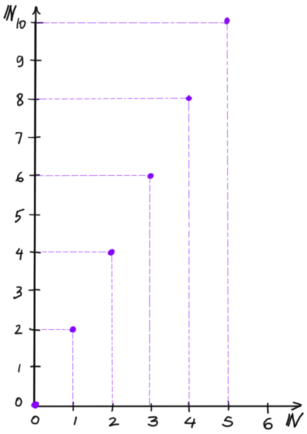

La donnée d'un **fonction** équivaut à la donnée de son ensemble de départ $\boldsymbol{A}$, et de son ensemble d'arrivée $\boldsymbol{B}$, et **d'un moyen de déterminer l'image de chaque élément de $\boldsymbol{A}$**.

## 4 Comment utiliser les fonctions ?

Avant tout il faut en acquérir la notation. Comme décrit ci-dessus, il faut se demander si l'on connaît la définition de la fonction considérée. La fonction "doubler un entier naturel" peut aussi être décrite comme suit

$$\begin{array}{lccc} d \; : & 0 \to 0 & \text{ou} & d(0) = 0 \\ & 1 \to 2 & & d(1) = 2 \\ & 2 \to 4 & & d(2) = 4 \\ & 3 \to 6 & & d(3) = 6 \\ & \ldots & & \ldots \\ & 27 \to 54 & & d(27) = 54 \\ & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Mais aussi par un graphique dont les points sont les intersections des entiers




ou encore pas un ensemble (certes infini !) de couples $(x;\ y)$:

$$\{(0;\ 0), (1;\ 2), (2;\ 4), (3;\ 6), \ldots\}$$

mais aussi par un tableau à deux entrées

| Fonction "double d'un entier naturel": $y = 2x$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| $d(x) = y$ | 0 | 2 | 4 | 6 | ... |

### Représentation

Nous avons vu comment représenter une fonction: par une définition en français, par un ensemble de couples, par un tableau et par un graphique.

Dans sa représentation graphique, la fonction est composée par la *totalité* des couples, correspondant aux coordonnées des points sur le graphique. Bien entendu, on ne peut pas représenter tous les points étant donné les limitations physiques de la feuille sur laquelle on travaille. C'est une "vision de l'esprit" que de penser que les droites et les courbes que l'on trace, sont composées d'une infinité de poinst, et donc de couples $(x;\ y)$.

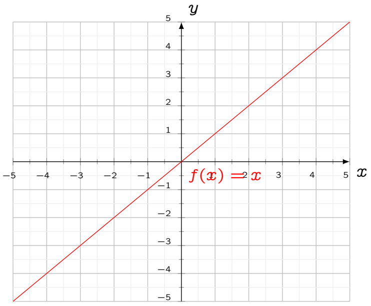
## Quelques fonctions particulières

Il y a certaines fonctions particulières qu'il faut absolument connaître.

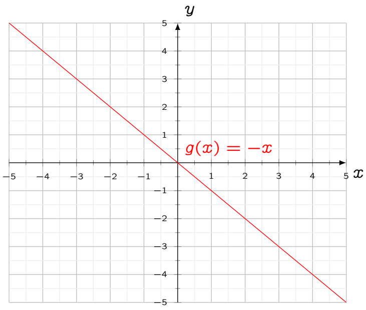
**Remarque** : Bien que les tableaux utilisés ne contienent que des nombres entiers, nous "savons" qu'entre deux nombres entiers il y a d'autres nombres, mais que nous avons fait le choix de ne pas les montrer: il y aurait trop de nombres. Donc c'est un choix que de **se donner** des nombres entiers. Bien sûr la valeur de l'**image** dépend de celle de la **pré-image** !

C'est pour cela que le "trait" de la fonction est en continu.

| $f(x) = x$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 4 |
| 5 | 5 |
| 6 | 6 |

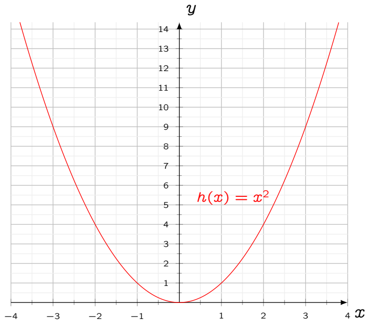



| $g(x) = -x$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 3 | $-3$ |
| 2 | $-2$ |
| 1 | $-1$ |
| 0 | 0 |
| $-1$ | 1 |
| $-2$ | 2 |
| $-3$ | 3 |

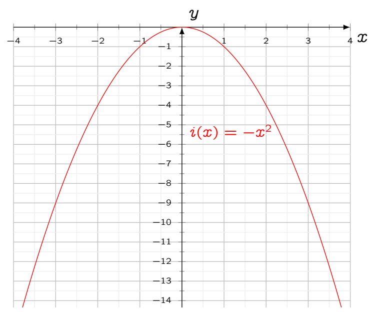



On peut se demander: *Pour quels $x$ les deux fonctions sont identiques ?* On peut y répondre en **posant l'équation** $f(x) = g(x)$, puisqu'on veut que les deux fonctions $f$ et $g$ soient égales. **Réponse ?**

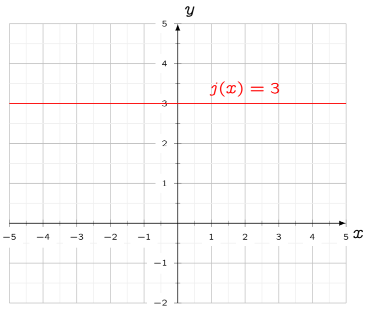
| $h(x) = x^2$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 4 | 16 |
| 3 | 9 |
| 2 | 4 |
| 1 | 1 |
| $-0$ | 0 |
| $-1$ | 1 |
| $-2$ | 4 |
| $-3$ | 9 |
| $-4$ | 16 |



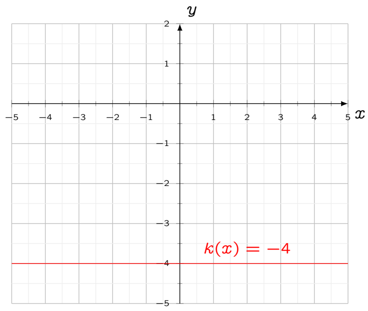

| $i(x) = -x^2$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 4 | $-16$ |
| 3 | $-9$ |
| 2 | $-4$ |
| 1 | $-1$ |
| $-0$ | 0 |
| $-1$ | $-1$ |
| $-2$ | $-4$ |
| $-3$ | $-9$ |
| $-4$ | $-16$ |




| $j(x) = 3$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 3 | 3 |
| 2 | 3 |
| 1 | 3 |
| 0 | 3 |
| $-1$ | 3 |
| $-2$ | 3 |
| $-3$ | 3 |
| $-4$ | 3 |
| $-5$ | 3 |




| $k(x) = -4$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 3 | $-4$ |
| 2 | $-4$ |
| 1 | $-4$ |
| 0 | $-4$ |
| $-1$ | $-4$ |
| $-2$ | $-4$ |
| $-3$ | $-4$ |
| $-4$ | $-4$ |
| $-5$ | $-4$ |




Comme plus haut, une question qui peut revenir dans les **exercices** est : *pour quelles valeurs de $x$ les fonctions $i$ et $k$ sont égales ?*

**Réponse ?**

### Représentation algébrique

Pour répondre aux questions précédentes, nous pouvons lire les valeurs directement sur le graphique et/ou sur le tableau. Rechercher celles qui correspondent à la question posée puis répondre, en tout cas, pour les valeurs affichées sur le graphique et/ou sur le tableau.

Mais parfois, et le plus souvent, cela ne suffit pas. Alors on utilise la notation algébrique des fonctions et on pose une **équation**. Si ce que l'on veut est *la valeur de $x$ pour laquelle $f(x)$ et $g(x)$ soient égales*, alors on écrit

$$\begin{gathered} f(x) = g(x) \\ \Leftrightarrow x = -x \\ \Leftrightarrow x + x = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot x = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \end{gathered}$$

Et on a terminé. La réponse est donc: *lorsque $x = 0$*.

Et de même pour la seconde question:
*pour quels valeurs de $x$ les fonctions $i$ et $k$ sont-elles égales ?*
alors

$$\begin{gathered} i(x) = k(x) \\ \Leftrightarrow -x^2 = -4 \\ \Leftrightarrow x^2 = 4 \\ \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \\ \Leftrightarrow x = \pm 2 \end{gathered}$$

Et on peut répondre que c'est pour $x \in \{-2;\ 2\}$.

**Un autre *classique* des questions conceranant les fonctions mathématiques**, est de savoir si telle ou telle valeur vérifie une certaine équation.
Par exemple soit la fonction $f(x) = 2 - 3x$, et on voudrait savoir si $x = \frac{1}{3}$ vérifie l'équation $f(x) = 0$.

Ce qu'il faut faire, est **remplacer** $x$ par $\frac{1}{3}$ dans l'expression plus haut et constater ou pas que les deux côtés du signe égal sont ou pas égaux:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 - 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 - \frac{3}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 = 0 \\ & \text{ce qui est faux, car } 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Et donc, la réponse est, *Non, $x = \frac{1}{3}$ ne vérifie pas l'équations.*

**L'autre *classique*, concerne le calcul de valeurs, c'est-à-dire trouver les images**.

*Soit la fonction $f(x) = 2x - 7$, compléter le tableau suivant et dire quelle est l'image de $-2$ par $f$ ?*

| $f(x) = 2x - 7$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 3 | |
| 2 | |
| 1 | |
| 0 | |
| $-1$ | |
| $-2$ | |
| $-3$ | |
| $-4$ | |
| $-5$ | |

On commence par substituer la valeur de $x = 3$ dans l'expression $f(x)$ et puis on calcule:

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 7 = 6 - 7 = -1$$

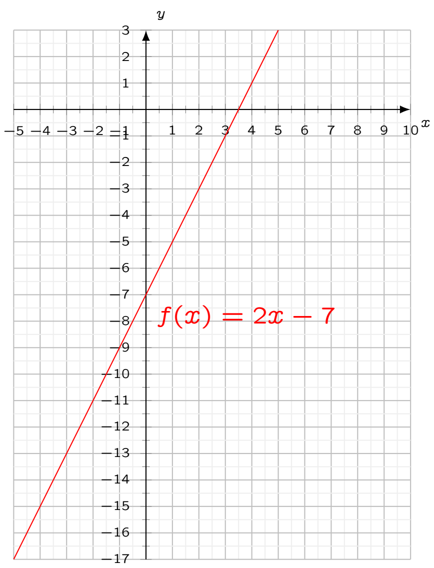
etc.

| $f(x) = 2x - 7$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| 3 | $-1$ |
| 2 | $-3$ |
| 1 | $-5$ |
| 0 | $-7$ |
| $-1$ | $-9$ |
| $-2$ | $-11$ |
| $-3$ | $-13$ |
| $-4$ | $-15$ |
| $-5$ | $-17$ |

**Enfin, il s'agit d'utiliser la connaissance qu'on a de la fonction pour en tracer la graphique**.

Commencer par tracer les deux axes. Pour ce faire observer l'étendue des valeurs de la colonne des $x$ et de celle des $y$.

Si par exemple, comme ici, il n'y a pas de nombre négatifs dans la colonne des $y$, vous pouvez soit ne pas continuer l'axe verticale sur les valeurs positives, soit (ce qui est conseillé) prévoir très peu de valeurs positives sur l'axe verticale. En effet, il est préférable d'avoir aussi des valeurs positives, car même si elles ne figurent pas dans le tableau, cela ne veut pas dire qu'il n'y en a pas.



## 5 Rappel sur les droites

Une **droite** est une fonction linéaire dont la forme est

$$f(x) = a \cdot x + b$$

où $a$ représente la *pente* de la droite et $b$ l'*ordonnée à l'origine*.

Nous avons vu plus haut des exemples de droite. Mais voici une autre

$$f(x) = 3x + 2$$

ici la pente est 3 et l'ordonnée à l'origine est 2.

La **pente** est le rapport de la différence des coordonnées verticales par la différence des coordonnées horizontales de deux points appartenant à la droite. Autrement dit

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

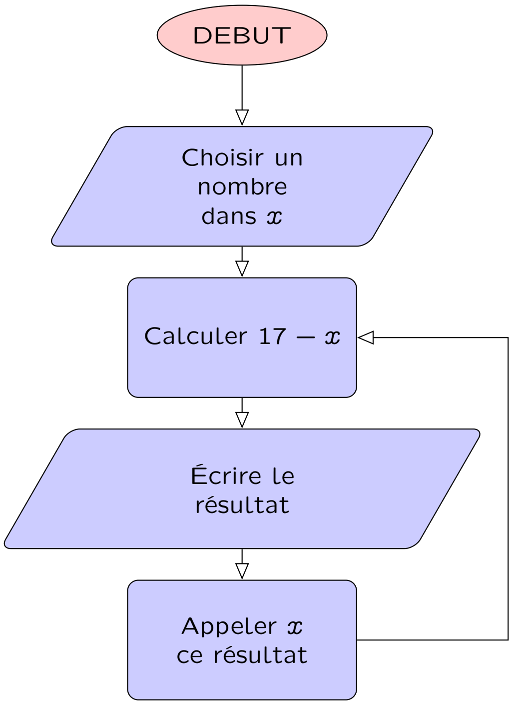
où $(x_1;\ y_1)$ et $(x_2;\ y_2)$ sont deux points de la droite.

L'**ordonnée à l'origine** est la hauteur, sur l'axe des $y$, à laquelle la droite coupe l'axe des $y$. Mais c'est aussi le résultat de l'évaluation de la fonction $f$ en 0, c'est-à-dire $f(0)$.

Par exemple, $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$ qui est l'ordonnée à l'origine de la fonction ci-dessus.

## 6 Questions

a) Avec l'aide de votre calculatrice essayez la machine perpetuelle suivante.




Ce diagramme est appelé un "organigramme". Il s'agit de suivre les indications des cases, les "exécuter", puis de suivre les flèches. Comme vous pourrez le constater à sa lecture, cet organigramme n'a pas de fin. Il a un "Début", mais pas de "Fin", puisque il y a une flèche qui nous renvoi en haut vers le calcul à effectuer, encore et encore.

Donc, vous prenez du papier, un crayon (une gomme !), votre calculatrice, si besoin, et vous choisissez un nombre au hasard.

Écrivez ce nombre et appelez-le $x$

$$x = 12{,}5$$

Ensuite, calculer :

$$17 - x = 17 - 12{,}5 = 4{,}5$$

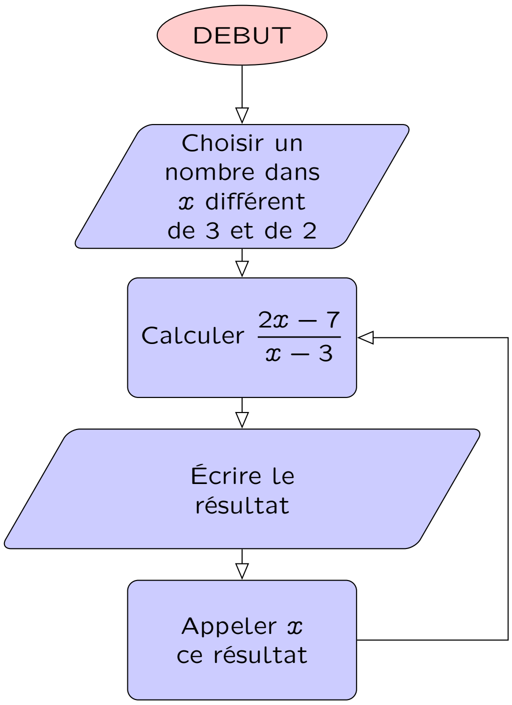
Appelez ce nombre $x$:

$$x = 4{,}5$$

Recommencez. . .

Le but est de savoir: *qu'est-ce qu'il se passe pour différents choix du premier nombre choisi ?.*

b) Même tâche que pour la question précédente.




c) Même tâche que pour la question précédente.