# La notion de *fonction* (suite)

Robinson Cartez

May 19, 2020

La notion de fonction est tellement générale, que l'on a de la peine à s'en défaire et tout autant, pour certaines presonnes, à la comprendre.

Le but ici est de définir mathématiquement la notion de fonction.*

La "fonction" est partout, il suffit lancer son lave vaisselle pour s'en rendre compte !

## Contents


1 **Notion de Variable** . . . . . . . . 1

2 **Fonctions réelles de variables réelles** . . . . . . . . 2

3 **Rprésentation graphique** . . . . . . . . 3

4 **Domaine de définition** . . . . . . . . 4

5 **Fonctions polynômes** . . . . . . . . 5

6 **Fonctions rationnelles** . . . . . . . . 7


## 1 Notion de Variable

**Définition**

Une **variable** sur un ensemble $E$ est une lettre qu'on se donne le droite de remplacer (effectivement ou par la pensée) par chacun des éléments de l'ensemble $E$.

Par exemple, si l'on admet que $x$ est une variable de l'ensemble de tous les nombres réels ($\mathbb{R}$), et que l'on prend les expressions suivantes dans lesquelles figure la lettre $x$

a) $-x$

b) $x^2 - 9$

c) $x \to x^3$

d) $x^2 + x - 1 = 0$

on peut décider de remplacer cette lettre par n'importe quel nombre réel, par exemple par $-7{,}2$. Alors ces expressions deviennent

a) $+7{,}2$

b) $(-7{,}2)^2 - 9$

c) $-7{,}2 \to (-7{,}2)^3$

d) $(-7{,}2)^2 + (-7{,}2) - 1 = 0$

**NB:** Lorsque vous remplacez la variable par une valeur, mettez des parenthèses à la place de la lettre, puis placer à l'intérieur la valeur de la lettre. De cette manière vous éviterez des érreurs de signe et donc de calcul !

*Gérard Charrière, *L'algèbre mode d'emploi*

**Définition**

Une variable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qui prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres réels, s'appelle **variable réelle**.

## 2 Fonctions réelles de variables réelles

**Définition**

On appelle **fonction réelle** d'une variable réelle toute fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par exemple

**(1)** Soit la fonction $f$ qui associe à tout nombre réel son carré augmenté de 3 (c'est-à-dire $x^2+3$). Cette fonction définition peut être donnée de manière précise par la notation déjà rencontrée suivante

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2+3 \end{aligned}$$

Cette notation indique clairement le nom de la fonction ($f$), l'ensemble de départ ($\mathbb{R} \to \ldots$), l'ensemble d'arrivée ($\ldots \to \mathbb{R}$), la variable ($x$), et la définition de la fonction ($x^2+3$).

Cette notation signifie que pour trouver l'image d'un nombre de l'ensemble de départ, il suffit de remplacer, partout où elle apparaît, la variable $x$ par ce nombre.

Ainsi l'image de $-8$ est $(-8)^2+3$. On dira que la fonction "$f$ prend en $-8$ la valeur $(-8)^2+3$", ce que l'on peut écrire aussi

$$f(-8) = (-8)^2 + 3$$

et de façon générale

$$f(x) = x^2 + 3$$

**(2)** La fonction définie par "tripler un entier naturel", traduit l'idée de prendre un nombre entier de l'ensemble des nombres entiers et d'en tripler sa valeur, c'est-à-dire de le multiplier par 3. Cette fonction peut être nommée $g$ et définie comme suit

$$\begin{aligned} g \ : \ \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 3x \end{aligned}$$

## 3 Rprésentation graphique

Une fonction de l'ensemble $\mathbb{R}$ vers l'ensemble $\mathbb{R}$, peut être représentée dans un plan muni de deux axes graduées, généralement perpendiculaires.

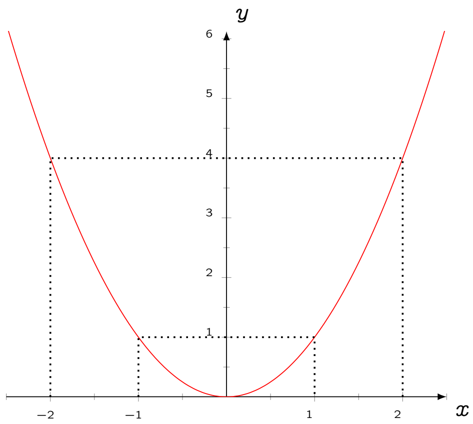
En fait, on calcule les images d'un certain nombre d'éléments (ici des nombres) bien choisis. Chaque nombre et son image sont les coordonnées cartésiennes d'un point du graphique.

Par exemple

**(1)** prenons la fonction "carré", définie par

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

| $f(x) = x^2$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| $-3$ | 9 |
| $-2$ | 4 |
| $-1$ | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 9 |

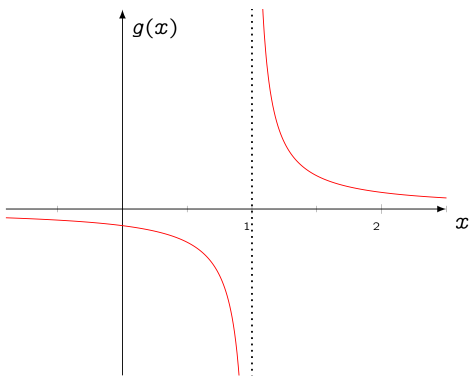



**(2)** On peut aussi prendre une fonction un peu plus complexe

$$\begin{aligned} g \ : \ & \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

Cette fonction ne peut pas prendre la valeur $x = 1$. Car la division par zéro n'est pas définie. Raison pour laquelle, on va "ôter" de l'ensemble de départ l'élément 1, ce qui est visible dans l'expression "$\ldots\mathbb{R} - \{1\}\ldots$".

| $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| $-3$ | $-0{,}25$ |
| $-2$ | $-0{,}5$ |
| 0 | $-1$ |
| 0,5 | $-2$ |
| 0,9 | $-10$ |
| 1,1 | 10 |
| 1,5 | 2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0,5 |




**NB:** On peut être tenté de chercher l'image par $g$ de l'élément 1. Mais si on le fesait on serait amenés à calculer

$$\frac{1}{0}$$

ce qui est absurde, car la division par zéro n'est pas définie. Ceci justifie la suppression de l'élément 1 de l'ensemble de départ. L'expression mathématique réservée est "$g$ **n'est pas définie en** 1".

## 4 Domaine de définition

Il existe deux opérations élémentaires qui "n'aboutissent" pas forcément au moment de calculer. Il s'agit de la division et de l'extraction de la racine carrée. Par exemple

$$\frac{5}{0}$$

ou encore

$$\sqrt{-9}$$

ne représentent pas un nombre réel, c'est-à-dire un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$.

C'est pour cela que lors de l'étude des fonctions réelles il faut prendre quelques précautions et définir quels sont les éléments que l'on peut prendre pour effectuer nos calculs.

Considérons par exemple la fonction $f$ et la fonction $g$ définies par

$$f(x) = \frac{1}{x-7} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x-7}$$

Nous constatons sans peine que si l'on remplace $x$ par 7 dans l'expression $\frac{1}{x-7}$, on obtient une **division par zéro** qui n'est pas définie. Par ailleurs si on remplace $x$ par des nombres strictement inférieurs à 7, dans l'expression $\sqrt{x-7}$ nous obtenons l'**extraction de la racine carrée d'un nombre négatif**, ce qui n'est pas non plus défini.

En conséquence, l'ensemble de départ, ici $\mathbb{R}$ doit être restreint et ne peut pas être prit tout entier. Il faut donc **définir** son **domaine de définition**.

**Définition**

L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ pour lesquels une expression est définie s'appelle le **domaine de définition** de cette expression. Et on le note $\mathcal{D}$.

Par exemple

**(1)** Le domaine de définition de l'expression

$$\frac{1}{x-7} \qquad \text{est} \qquad \mathcal{D} = \mathbb{R} - \{7\}$$

**(2)** Le domaine de définition de l'expression

$$\sqrt{x-7}$$

est l'ensemble des nombres supérieurs ou égaux à 7

$$\mathcal{D} = [7;\ \infty[$$

**Définition**

L'**ensemble de départ** d'une fonction réelle est une partie du domaine de définition de l'expression qui lui est associée.

Par exemple

**(1)** pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x-7}$, l'ensemble de départ est une partie de l'ensemble $\mathbb{R} - \{7\}$. Pour cela on peut choisir que les nombres entiers sans le 7: $\mathbb{Z} - \{7\}$, ou que les réels négatifs: $\mathbb{R}_-$, etc.

**(2)** pour la fonction $g(x) = \sqrt{x-7}$, l'ensemble de départ est une partie de l'ensemble $\mathcal{D} = [7;\ +\infty[$. Pour cet ensemble on peut choisir la partie des nombres supérieure à 10: $[10;\ +\infty[$, etc.

## 5 Fonctions polynômes

**Définition**

Une **fonction polynôme** est une fonction donnée par une écriture de la forme

$$\begin{aligned} p \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto p(x) \end{aligned}$$

où $p(x)$ désigne un polynôme en $x$ à coefficients réels.

Par exemple

**(1)**

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^3 \end{aligned}$$

**(2)**

$$\begin{aligned} g \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto 3x - 2 \end{aligned}$$

**(3)**

$$\begin{aligned} h \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto 17 \end{aligned}$$

**(4)**

$$\begin{aligned} i \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto -9x^4 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

**(5)**

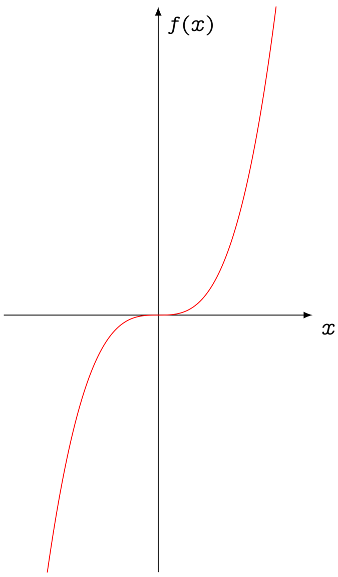
$$\begin{aligned} k \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x \end{aligned}$$

**(6)**

$$\begin{aligned} l \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

**NB:** Les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ceci en raison qu'un polynôme ne comporte pas de racine carrée de la variable et l'exposant de la variable est toujours positif. Ce dernier point exclu la division par la variable $x$. Voici la représentation, par exemple de la fonction

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^3 \end{aligned}$$



**Définition**

- Une fonction polynôme est dite **fonction du premier degré** lorsque le polynôme associé est du premier degré.
- Une fonction polynôme est dite **fonction du deuxième degré** lorsque le polynôme associé est du deuxième degré.
- Etc.

**NB:**

- **Le graphique d'une fonction du premier degré est toujours une droite**. Pour le construire il suffit donc de calculer les images de deux éléments.
- Le graphique d'une fonction du deuxième degré est toujours une courbe possédant un axe de symétrie parallèle au second axe de coordonnées. Cette courbe porte le nom de **parabole**.

**Définition**

Considérons une fonction polynôme

$$\begin{aligned} p \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto p(x) \end{aligned}$$

S'il existe un nombre $a$ tel que $p(a) = 0$, on dit que $p$ **s'annule en** $a$ ou que $a$ **est un zéro de** $p$.

Par exemple

**(1)** $-2$ et $3$ sont des uéros de la fonction

$$\begin{aligned} p \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

En effet,

$$p(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$$

et

$$p(3) = (3)^2 - (3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$$

**(2)** $\frac{2}{3}$ est un zéro de la fonction

$$\begin{aligned} g \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto 3x - 2 \end{aligned}$$

En effet,

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 2 = 2 - 2 = 0$$

## 6 Fonctions rationnelles

**Définition**

Une **fonction rationnelle** est une fonction donnée par une écriture de la forme

$$\begin{aligned} q \ : \ \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto q(x) \end{aligned}$$

où $q(x)$ désigne une fraction rationnelle en $x$ et $\mathcal{D}$ son domaine de définition.

Par exemple

a)

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g \ : \ \mathbb{R} - \{-3;\ 3\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x-2}{x^2-9} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h \ : \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

**NB:** L'étoile après le nom de l'ensemble dans $\ldots \mathbb{R}^* \ldots$ veut dire que le zéro ne fait pas partie de l'ensemble.

Voici une représentation graphique de la fonction

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$