La notion de *fonction* (problèmes Correction)

Robinson Cartez

June 2, 2020

La notion de fonction est tellement générale, que l'on a de la peine à s'en défaire et tout autant, pour certaines presonnes, à la comprendre.

Le but ici est d'exercer la notion de fonction au travers de divers problèmes faisant appel à la conception de fonction et aux autres notions arithmétiques et de traitement des informations.

La "fonction" est partout, il suffit lancer son lave vaisselle pour s'en rendre compte !

Contents

1 Problèmes

Nous avons vu que la notion de fonction impliquait des couples de nombres, souvent notés $(x;\ y)$. Pour des fonction du premier degré, ayant une ordonnée à l'origine de zéro, les coordonnées de chaque point, peuvent être soit proportionnelles, soit inversement proportionnelles. (**Pourquoi faut-il que l'ordonnée à l'origine soit égale à zéro ?**)

Réponse: Pour qu'une relation de proportionnalité entre deux grandeurs puisse exister, il faut justement qu'il y ait proportionnalité (directe) entre les deux grandeurs. En d'autres termes, si on appelle x l'une des grandeurs et y l'autre, alors nous avons une relation de proportionnalité qui s'écrit TOUJOURS comme ceci:

$$y = k \cdot x$$

où k est ce qu'on appelle le coefficient de proportionnalité. On voit aussi la ressemblance de cette expression avec l'équation de la droite, étudiée en classe:

$$y = a \cdot x + b$$

dans cette dernière équation, si on remplace a par k et b par 0 (justement), on a la même relation de proportionnalité entre les grandeurs x et y.

Conclusion: c'est la raison pour laquelle pour qu'il y ait une relation de proportionnalité il faut que l'ordonnée à l'origine, ici le b soit égal à 0.

Vous avez vu cette notion en cours. Elle a été présentée sous forme de tableau de nombres.

Tous les les tableaux ci-dessous représentent deux suites de nombres, soit proportionnelles les unes aux autres, soit inversement proportionnelles.

Pour rappel: une relation de proportionnalité entre deux grandeurs, disons x et y, peut être exprimée par l'équation d'une droite

$$y = a \cdot x$$

où a est le coefficient de proportionnalité.

Aussi, une relation de proportionnalité inverse peut être exprimée par l'équation de la courbe appelée "hyperbole":

$$y = \frac{p}{x}$$

qui peut plus facilement s'écrire

$$y \cdot x = p$$

dans laquelle p est un paramètre constant. Cette relation vous l'avez vue en cours sur des tableaux, et elle a la signification suivante:

si la grandeur y augmente, alors la grandeur x diminue. Inversement si la grandeur y diminue, alors la grandeur x augmente

c'est la proportionnalité inverse.

Voici en gras, les réponses. Pour y répondre, on peut utiliser les expressions ci-dessus.

(1) Chaque tableau suivant, représente des suites de nombres, la suite des x et celle des y, proportionnelles. Calculer "de tête" les nombres qu'il faut mettre à la place des lettres.

NB: Vous pouvez utiliser la relation entre les grandeurs x et y vue plus haut, à savoir

$$y = k \cdot x$$

(ici $k = \frac{8}{3}$ pour le premier tableau)

a)

x	y
18	48
9	y_2
27	y_3
45	y_4
x_5	6

$y_2 =$ **24**
$y_3 =$ **72**
$y_4 =$ **120**
$x_5 =$ **2,25**

b)

x	y
20	6,7
2	y_2
18	y_3
22	y_4
4	y_5

$y_2 =$ **0,67**
$y_3 =$ **6,03**
$y_4 =$ **7,37**
$y_5 =$ **1,34**

c)

x	y
2,5	64
x_2	32
10	y_3
x_4	25,6
12,5	y_5

$x_2 =$ **1,25**
$y_3 =$ **256**
$x_4 =$ **1**
$y_5 =$ **320**

d)

x	y
4,5	9
x_2	17
x_3	4,5
75	y_4
18	y_5

$x_2 =$ **8,5**
$x_3 =$ **2,25**
$y_4 =$ **150**
$y_5 =$ **36**

(2) Chaque tableau ci-dessous, représente des suites de nombres inversement proportionnelles les unes aux autres. Calculer "de tête" les nombres qu'il faut mettre à la place des lettres.

NB: Vous pouvez utiliser la relation entre les grandeurs x et y vue plus haut, à savoir

$$x \cdot y = p$$

(ici $p = 100$ pour le premier tableau)

a)

x	y
10	10
50	y_2
x_3	25
5	y_4
x_5	7

$y_2 =$ **2**
$x_3 =$ **4**
$y_4 =$ **20**
$x_5 \approx$ **14,3**

b)

x	y
10,8	10
1	y_2
8	y_3
x_4	12
x_5	0,1

$y_2 =$ **108**
$y_3 =$ **13,5**
$x_4 =$ **9**
$x_5 =$ **1 080**

c)

x	y
1,2	50
x_2	12
3	y_3
0,5	y_4
x_5	8

$x_2 =$ **5**
$y_3 =$ **20**
$y_4 =$ **120**
$x_5 =$ **7,5**

d)

x	y
16	2,25
1,6	y_2
x_3	80
0,15	y_4
x_5	$5,\overline{142857}$

$y_2 =$ **22,5**
$x_3 =$ **0,45**
$y_4 =$ **240**
$x_5 =$ **0,7**

(3) Après avoir tracé un système d'axes graduées, considérons le point $A(1;\ 2)$. Sachant que le point $B(3;\ 1)$ est à une distance égale à $\sqrt{5}$ du point A,

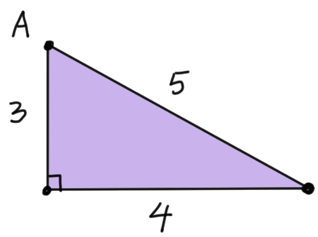
a) parmi les points ci-dessous, indiquer ceux qui se trouvent aussi à une distance de $\sqrt{5}$ du point A:

$C(3;\ 2)$	$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{0};\ \mathbf{0})}$	$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{2};\ \mathbf{4})}$
$\boxed{\mathbf{F}(-\mathbf{1};\ \mathbf{3})}$	$G(-1;\ 0)$	$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{2};\ \mathbf{0})}$

b) trouver tous les points à coordonnées entières qui se trouvent à une distance de A égale à 5.

Voici les huit points (Question supplémentaire: pourquoi 8 ? Avec un autre point que A disons le point B, aurait-il aussi huit voisins ?)

Pour trouver un autre point à une distance de 5 (je vous rappelle que l'on travaille exclusivement avec des nombres entiers dans cet exercice) il faut tracer un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 5. C'est le plus petit triangle rectangle rectangle qui admet des valeurs entières pour ses côtés, et de plus, qui se suivent ! Voyez plutôt :



$(1+4;\ 2-3) = (\mathbf{5};\ -\mathbf{1})$	$(1+4;\ 2+3) = (\mathbf{5};\ \mathbf{5})$
$(1-4;\ 2-3) = (-\mathbf{3};\ -\mathbf{1})$	$(1-4;\ 2+3) = (-\mathbf{3};\ \mathbf{5})$
$(1+3;\ 2-4) = (\mathbf{4};\ -\mathbf{2})$	$(1+3;\ 2+4) = (\mathbf{4};\ \mathbf{6})$
$(1-3;\ 2-4) = (-\mathbf{2};\ -\mathbf{2})$	$(1-3;\ 2+4) = (-\mathbf{2};\ \mathbf{6})$

...raison pour laquelle on ajoute toujours 3 et 4 aux coordonnées du point A.

(4) Après avoir tracé un système d'axes graduées, considérer la droite qui passe par les points $A(1;\ 2)$ et $Z(4;\ 4)$.

a) Parmi les points proposés ci-dessous, indiquer ceux qui se trouvent aussi sur cette droite.

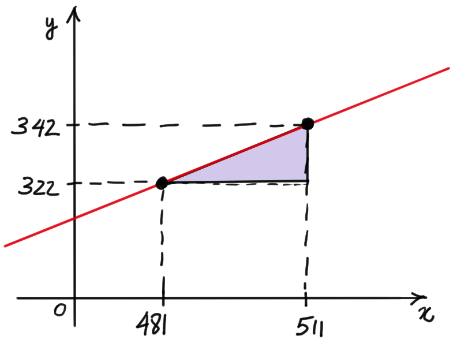
$B(20;\ 16)$	$\boxed{\mathbf{C}(\mathbf{28};\ \mathbf{20})}$	$D(30;\ 22)$
$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{82};\ \mathbf{56})}$	$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{100};\ \mathbf{80})}$	$\boxed{\mathbf{G}(-\mathbf{8};\ -\mathbf{4})}$

(5) Considérer, dans un autre système d'axes, la droite qui passe par les points $P(481;\ 322)$ et $Q(511;\ 342)$.

Considérer également le deux autres points $R(487;\ 325)$ et $S(485;\ 325)$.

Le point R se trouve-t-il: sur la droite, au-dessus ou au-dessous ? Même question pour le point S.

Pour commencer il faut faire un petit croquis, pas besoin de faire un "vrai" graphique en bonne et due forme:



On y place les points, puis on se souviens de la définition de la pente d'une droite:

$$a = \frac{\textbf{Déplacement vertical}}{\textbf{Déplacement horizontal}}$$

de deux points situés sur la droite. Or les points P et Q sont sur la même droite. On a leurs coordonnées, alors on calcule la pente de la droite sur laquelle ils sont:

$$a = \frac{342 - 322}{511 - 481} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$$

Maintenant on fait le même calcul avec les deux autres points, un à la fois:

pour R et Q:

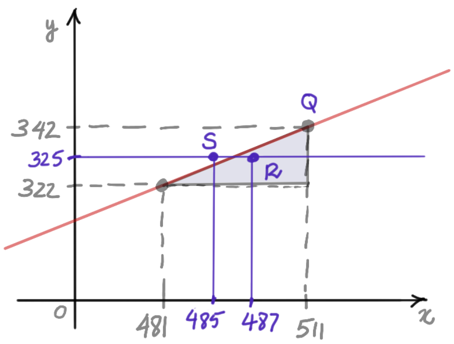
$$a = \frac{342 - 325}{511 - 487} = \frac{17}{24} \approx 0{,}708$$

pour S et Q:

$$a = \frac{342 - 325}{511 - 485} = \frac{17}{26} \approx 0{,}654$$

Donc, ni R ni S ne sont sur la droite, car la pente n'est pas égale à $\frac{2}{3}$.

Ensuite le point R est au-dessous de la droite, car la droite passant par R et Q donne une pente plus grande. Et de même le point S est au-dessus de la droite, car la droite passant par les points S et Q donne une pente plus petite.



(6) Soit la fonction

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - 5$$

Calculer

Il s'agit d'un simple substitution et d'un calcul...

a) $f(7) = \mathbf{9}$ $\quad f(-7) = \mathbf{-19}$ $\quad f(1) = \mathbf{-3}$

$f(-1) = \mathbf{-7}$ $\quad f(0) = \mathbf{-5}$

b) $f(2{,}5) = \mathbf{0}$ $\quad f(0{,}1) = \mathbf{-4{,}8}$ $\quad f(-0{,}1) = \mathbf{-5{,}2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-4}$ $\quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-6}$

Cette partie de l'exercice est mal écrite: je me suis trompé en copiant les définitions des fonctions g et h... c'est la même que pour la fonction f !!!

Effectuer les mêmes calculs pour les deux fonctions suivantes

$$g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - 5 \qquad x \mapsto 2x - 5$$

(7) Soit la fonction

$$f\ :\ \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1+x}{1-2x}$$

Calculer $f(1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\frac{3}{5}\right)$, $f\left(\frac{5}{11}\right)$, $f\left(\frac{11}{21}\right)$, $f\left(\frac{21}{43}\right)$, ...

a) $\boldsymbol{f(1) = \frac{1+1}{1-2} = -2}$

b) $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 4}$

c) $\boldsymbol{f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\frac{8}{5}}{-\frac{1}{5}} = -8}$

d) $\boldsymbol{f\left(\frac{5}{11}\right) = \frac{\frac{16}{11}}{\frac{1}{11}} = 16}$

e) $\boldsymbol{f\left(\frac{11}{21}\right) = \frac{\frac{32}{21}}{-\frac{1}{21}} = -32}$

f) $\boldsymbol{f\left(\frac{21}{43}\right) = \frac{\frac{64}{43}}{\frac{1}{43}} = 64}$