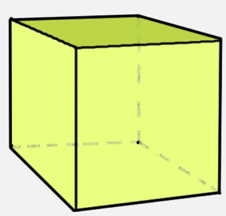
Horloge cubique

Robinson Cartez

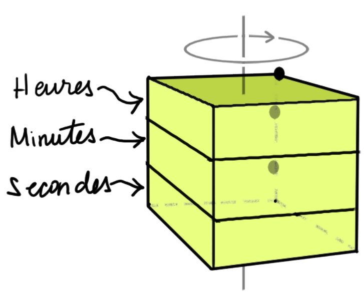
De quoi s'agit-il ?

Durant une pose à la cafétéria, un collègue me pose la question suivante :

À quelle heure, entre midi et minuit, une horloge cubique, redevient-elle un cube parfait ?



Ici, une horloge cubique est un cube découpé en trois plateaux, tournant horizontalement à la manière d'un Rubik's Cube, dont chacun suit le mouvement des aiguilles d'une horloge analogique : le premier les heures, le deuxième les minutes et le troisième les secondes.



Reformulation du problème

Prenons l'un des coins du premier plateau, celui des heures, comme indication de l'heure, ci-dessus signalé par un point. Et faisons de même pour les deux autres plateaux.

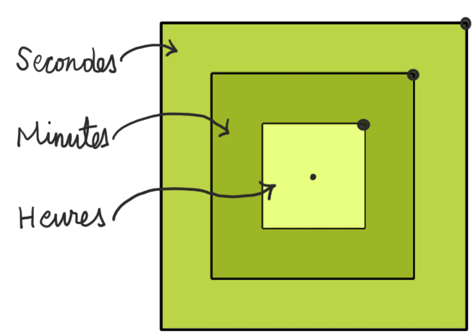
Alors si ce point représente 12h00, le cube est parfait. En effet, les arêtes verticales de chacun des plateaux (qui sont en fait des parallélépipèdes rectangles) sont alignées.

Seulement, une fois l'horloge en marche, ces trois plateaux (qui représentent chacun les aiguilles d'une horloge) vont tourner autour d'un axe central et leurs arêtes verticales ne seront plus de tout alignées.

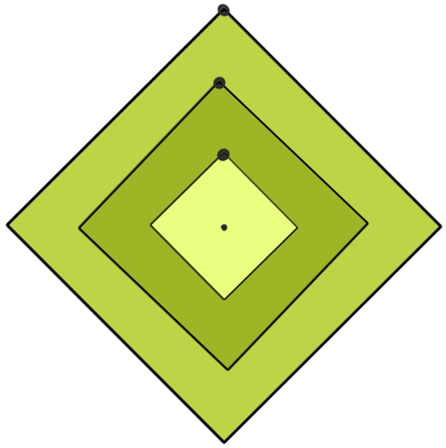
La question est donc de savoir, quand cela va-t-il se reproduire ? Plus précisement, entre midi et minuit, à quelle heure cela va-t-il se produire ?

Modélisation du problème

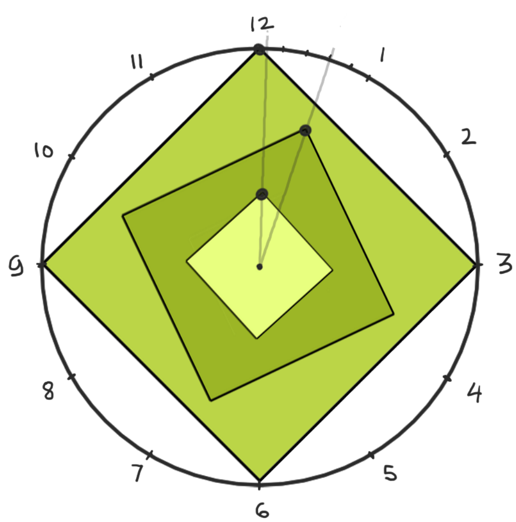
Nous pouvons représenter en deux dimensions, le cube et ses trois plateaux, par des carrés ayant un même axe de rotation, passant par l'intersection des diagonales de chacun d'entre eux.



Ensuite, il faut observer une montre analogique (c'est-à-dire une montre à aiguilles, de préférence non quartz) ou une horloge (toujours à trois aiguilles). Son mécanisme veut que chaque aiguille indique le même temps écoulé entre deux instants.



Par exemple, entre 12h00 et 12h03 il s'est écoulé trois minutes et zéro secondes. Si la montre n'avait que l'aiguille des secondes, cette dernière indiquerait le "12", mais aurait aussi fait trois tours du cadran entre 12h00 et 12h03. Mais cette dernière information est "perdue".



Pour éviter cette "perte" de mémoire de l'horloge, on a introduit une deuxième aiguille : celle des minutes. Son rôle est d'indiquer le nombre de tours que fait l'aiguille des secondes !

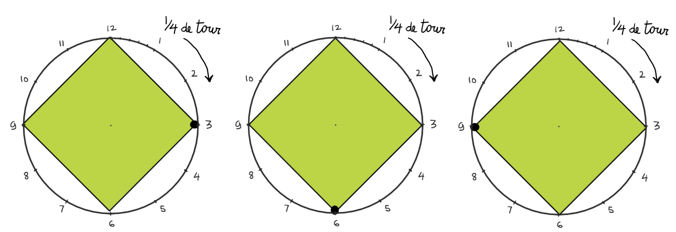
Finalement, pour indiquer plus d'un tour complet de l'aiguille des minutes, on a introduit l'aiguille des heures. Cette dernière, comme ses homologues, ne reste pas figée en "attendant" que l'aiguille des minutes termine de faire un tour complet de cadran pour marquer qu'il s'est écoulé une heure supplémentaire : elle se déplace, légèrement à chaque seconde, mais elle se déplace. Dans notre exemple, elle ne reste pas figée sur le "12", elle s'est déplacée de $\frac{3}{720}$ de tour ou 1,5° (pourquoi ?).

Ainsi, quelque soit l'heure indiquée par la montre, les trois aiguilles indiquent une position bien définie sur le cadran. Notre modèle doit aussi respecter ce fonctionnement. Il est primordial de comprendre : les trois aiguilles (et donc, les plateaux du cube et les carrés de notre modèle) se déplacent en même temps, mais à des vitesses différentes. Chaque aiguille a comme tâche de "garder le temps" écoulé. C'est pour cette raison que les montres sont aussi appelées des garde temps.

Utilisation du modèle

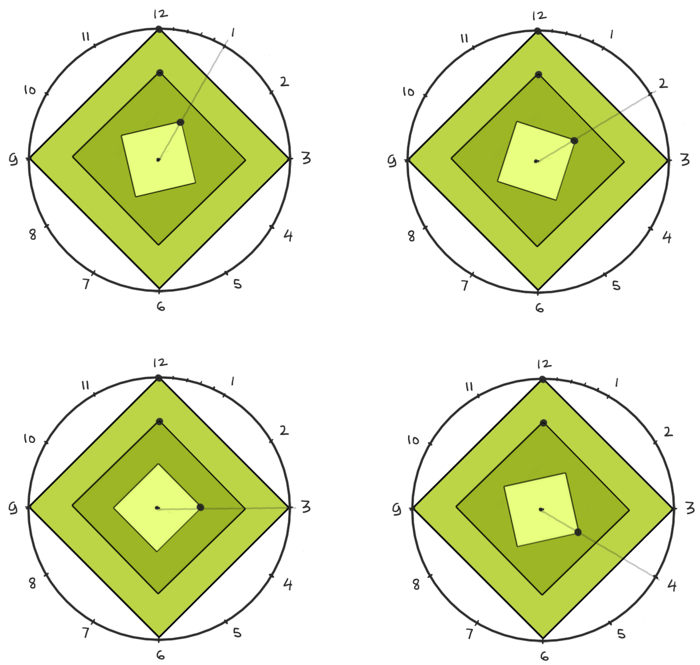
Supposons encore que l'on a une seule aiguille, un seul plateau, un seul carré. À quel moment revient-il à une position qui ressemble à la position de départ ? Autrement dit, à quel moment un des "coins" pointe sur le "12" un autre sur le "3", un autre sur le "6" et un autre sur le "9" ?

On observe que ceci arrive chaque $\frac{1}{4}$ de tour. Et selon le plateau, soit chaque 3 heures, soit chaque 15 minutes, soit chaque 15 secondes.



Or, on l'a vu, lorsqu'une aiguille tourne les autres tournent aussi ! Il arrive de même avec notre modèle : les carrés ne restent pas en place au moment ou les autres bougent. En conséquence, comment trouver l'heure où les trois plateaux seront alignés sur leurs arêtes verticales ? Existe-il un moyen ? Une heure, minute et seconde à laquelle les plateaux auront $\frac{1}{4}$ de tour d'écart, ou mieux encore, zéro tour d'écart ?

Après avoir joué avec ce modèle, on constate qu'il existe une situation dans laquelle deux des trois plateaux ne bougent pas et sont sur le même nombre du cadran : c'est à chaque heure ! En effet, à chaque fois qu'une heure s'est écoulée, le plateau des minutes et celui des secondes sont alignés sur leurs arêtes verticales : ils marquent tous deux 0 minutes 0 secondes, c'est-à-dire indiquent le "12".



Et on peut dès lors constater que chaque 3 heures, entre 12h00 et 24h00, le cube est parfait à quatre reprises : 15h00, 18h00, 21h00 et 24h00.

Réponse et conclusion

D'après cette analyse, c'est chaque trois heures, entre midi et minuit, que le cube redevient parfait, les plateaux étant alignés sur leurs arêtes verticales à ces moments là.

Cependant cela ne prouve pas que c'est les seuls instants ! Il faut sans doute travailler beaucoup plus pour arriver à une telle démonstration. Mais cela dépasse largement le cadre du cours de mathématiques que vous suivez.