ECG Ella-Maillart

# MATH

# EM

# ATIQUE

# 1$^e$

Robinson Cartez
2023-2024 v0.1
Genève

# Table des matières

L'algèbre sert, entre autres choses, à structurer, à ordonner et à prendre des décisions.

**Objectifs**

(A) utiliser des expressions littérales (calcul littéral) et notamment pouvoir
   (1) substituer
   (2) développer
   (3) réduire
   (4) et factoriser

   des expression proposées ;

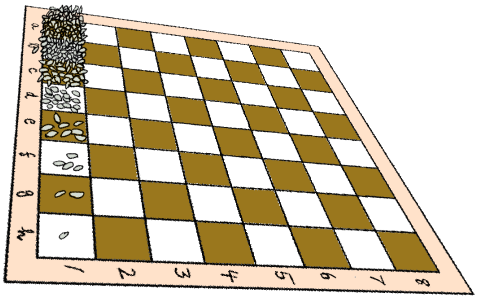
(B) étant donné un problème
   (1) poser une équation du premier degré
   (2) résoudre des équations du premier degré
   (3) en vérifier la solution (par substitution, par exemple)
   (4) transformer des formules ;

(C) manipuler deux équations en même temps
   (1) résoudre un tel système
   (2) reconnaître et appliquer les techniques de résolution à un problème donné
   (3) en vérifier les solutions.

## 1.1 Calcul littéral (1) : Vieille légende arabe

D'après une légende arabe, le jeu d'échecs a été inventé par un brahmane chargé de l'instruction d'un jeune roi.

Enthousiasmé par ce nouveau jeu, le roi offrit à l'inventeur la récompense qu'il voudrait. Pour donner une nouvelle leçon à son élève, le brahmane demanda un grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième, et ainsi de suite toujours en doublant le nombre de grains de blé, jusqu'à la 64ème case et que le tout soit additionné et lui fût remis.



D'apparence modeste, la demande fut accordée. Malheureusement, toutes les réserves de la terre ne purent y satisfaire.

En réalité, le roi aurait dû donner 18446744073709551615 grains de blé. Ceci correspond à environ 1500 ans de production mondiale actuelle.
Il est possible de noter le nombre de grains de blé de la manière suivante :

| Numéro case | Nombre de grains de blé | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $2^0$ |
| 2 | 2 | $2^1$ |
| 3 | 4 | $2^2$ |
| 4 | 8 | $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ |
| 5 | 16 | $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ |
| ... | ... | ... |
| 64 | 9223372036854775808 | $2^{63}$ |

**Défi**

1. Combien de fois, au maximum, peut-on plier en deux une feuille de papier ?
2. Combien de fois faut-il plier par la moitié une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur pour atteindre une hauteur de 1,8 m ?

### 1.1.1 Bases théoriques

**Puissances**

**Définition 1.1.1 : Puissance d'un nombre**

On appelle **n** ième puissance de $a$ un produit de $n$ facteurs égaux à $a$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

**Exemple 1.1.1 : Exemples**

$$4^3 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ facteurs égaux à } 4} = 64$$

$$b^4 = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b}_{4 \text{ facteurs égaux à } b}$$

**Signe d'une puissance**

On utilise la règle des signes bien connue

**Propriété 1.1.1**

1. La puissance d'un nombre positif est toujours positive.
2. La puissance d'un nombre négatif est
   - **positive** si l'exposant est **pair**
   - **négative** si l'exposant est **impair**

**Exemple 1.1.2**

$$(+7)^2 = (+7) \cdot (+7) = +49 = 49$$
$$(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +125 = 125$$
$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -81$$
$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$$

**Remarque**

$$(-4)^2 \neq -4^2$$

mais

$$(-4)^3 = -4^3$$

**Produit de puissances de même base**

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot = a^5 = a^{2+3}$$

On a donc la règle générale suivante pour deux exposants entiers $n$ et $m$

**Propriété 1.1.2 : Puissances de même base**

Pour multiplier des puissances de **même base**, on conserve la base et on additionne les exposants.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

**Exemple 1.1.3**

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$$
$$x^5 \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^1 = x^{5+2+4+1} = x^{12}$$

**Cas particuliers** Que valent, avec $n \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{a^0} \qquad \boldsymbol{a^1} \qquad \boldsymbol{a^{-n}} \qquad ?$$

Et bien, on les traites comme les autres, mais en veillant à y appliquer les règles vues ci-dessus. c'est-à-dire

---

$$\boldsymbol{a^0} \longrightarrow \qquad a^3 \cdot a^0 = a^{3+0} = a^3$$

$$\text{or : } a^3 = a^3 \cdot 1$$

$$\text{donc on définit : } a^0 = 1 \qquad \text{avec } a \neq 0$$

---

$$\boldsymbol{a^1} \longrightarrow \qquad a^2 \cdot a^1 = a^{2+1} = a^3$$

$$\text{or : } a^3 = a^2 \cdot a$$

$$\text{donc on définit : } a^1 = a$$

---

$$\boldsymbol{a^{-n}} \longrightarrow \qquad a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$$

$$\text{or : } 1 = a^n \cdot \frac{1}{a^n}$$

$$\text{donc, avec } a \neq 0\text{, on définit : } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

---

De plus **$a^{-n}$ est l'inverse de $a^n$**. Et on impose que $a \neq 0$, car 0 n'a pas d'inverse.

**Quotient de puissances de même base** Le quotient de puissances de même base est traité comme le produit de puissances de même base, car diviser c'est multiplier par l'inverse.

**Exemple 1.1.4**

$$a^5 \div a^3 = a^5 \cdot a^{-3} = a^{5+(-3)} = a^{5-3} = a^2$$

Et on a en effet que

$$a^2 \cdot a^3 = a^5$$

On retrouve la règle générale

**Propriété 1.1.3 : Quotient de puissances de même base**

Le quotient de deux puissances de **même base** est

$$a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

### Puissance d'une puissance

**Exemple 1.1.5**

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6 = a^{2 \cdot 3}$$

Le cas général donne

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots \cdot a^n}_{m \text{ facteurs}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m \text{ termes}}} = a^{n \cdot m}$$

Par cet exemple on voit que

**Propriété 1.1.4**

Pour élever une puissance à une puissance, on garde la base et on multiplie les exposants :

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{mn}$$

**Exemple 1.1.6**

$$(10^3)^4 = 10^{3 \cdot 4} = 10^{12} = 1000000000000$$

$$(a^{-2})^5 = a^{-2 \cdot 5} = a^{-10} = \frac{1}{a^{10}}, \quad a \neq 0$$

### Puissance d'un produit

**Exemple 1.1.7**

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3 \cdot b^3 = a^3 b^3$$

On a ainsi le cas général :

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^n &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ facteurs}} \\
&= \underbrace{(a \cdot a \ldots \cdot a)}_{n \text{ facteurs}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \ldots \cdot b)}_{n \text{ facteurs}} \\
&= a^n \cdot b^n = a^n b^n
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la règle

**Propriété 1.1.5**

Pour élever un produit à une puissance, on élève chaque facteur à cette puissance :

$$(ab)^n = a^n b^n$$

**Exemple 1.1.8**

$$(xyz)^4 = x^4 y^4 z^4$$

$$(3a^7 b^3 c)^5 = 243 a^{35} b^{15} c^5$$

### Notation scientifique

La distance moyenne séparant Pluton du Soleil est de 5,9 milliards de kilomètres, soit 5900 milliards de mètres, autrement dit 5900000000000 mètres.
La longueur d'onde des rayons X est de l'ordre de 0,00000001 centimètres.
La lecture des deux longueurs indiquées ci-dessus n'est pas aisée ; c'est pourquoi on les note à l'aide d'une puissance de 10.

**Exemple 1.1.9**

Par exemple, au lieu d'écrire 5900000000000 m on écrira $5{,}9 \cdot 10^{12}$ m et de même

$$0{,}00000001 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-8} \text{ cm}$$

On parle alors d'**écriture scientifique**. On peut alors poser la règle d'écriture suivante pour tous les nombres réels :

**Propriété 1.1.6**

En notation scientifique, les nombres s'écrivent sous la forme :

$$a \cdot 10^n \qquad 1 \leq |a| < 10 \qquad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Exemple 1.1.10**

$$525000000 = 5{,}25 \cdot 10^8$$

$$0{,}0000000000002 = 2 \cdot 10^{-13}$$

$$1{,}425 \cdot 10^{12} = 1425000000000$$

$$-1{,}2 \cdot 10^{-8} = -0{,}000000012$$

**Remarquez** que les calculatrices de poche peuvent afficher les résultats en notation scientifique.

### Extraction de racines

Si l'on sait que l'air d'un carré mesure 625 m$^2$, on peut connaître la longueur du côté. En effet, l'aire d'un carré est égale au carré du côté. Il faut donc trouver une longueur qui, élevée au carré, donne 625 m$^2$.
On écrit : $\sqrt{625 \text{ m}^2} = 25$ m
De même, il est possible de trouver l'arrête d'un cube dont le volume vaut 216 m$^3$. Le volume d'un cube étatn égal au cube de son arête, il s'agit de trouver une dimension qui, élevée au cube, donne 216 m$^3$.
On écrit : $\sqrt[3]{216 \text{ m}^3} = 6$ m
Dans les deux cas, on a **extrait la racine d'un nombre**.

### Racine n ième

**Propriété 1.1.7 : Racine n$^{\text{ième}}$**

La racine $n$ ième d'un nombre positif $a$, notée $\sqrt[n]{a}$, est le nombre **positif** qui, élevé à la puissance $n$, égale $a$.

**Exemple 1.1.11**

$$\sqrt{64} = 8, \text{ car } 8^2 = 64$$

$$\sqrt[3]{a^6} = a^2, \text{ car } (a^2)^3 = a^6, \text{ pour } a \in \mathbb{Q}$$

On obtien donc, par définition, que

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

**Important**

1. Bien que $8^2 = 64$ et que $(-8)^2 = 64$, par convention on écrit $\sqrt{64} = 8$ et $-\sqrt{64} = -8$
2. Lorsque l'indice de la racine est **impair**, il est possible d'extraire la racine d'un nombre négatif. En effet $\sqrt[3]{-8} = -2$, car $(-2)^3 = -8$, par contre
$$\sqrt{-4} \notin \mathbb{Q}$$
car $(+2)^2 = 4$ et $(-2)^2 = 4$, aucun nombre au carré, dans $\mathbb{R}$, ne donne un nombre négatif.
3. En général, l'indice 2 des racines "carrées" ne s'écrit pas, tous les autres doivent s'écire.

**Racine d'un produit**

**Exemple 1.1.12**

Par exemple $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$, mais ceci est égale à $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12$, on a donc égalité des deux expressions :

$$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$$

Le cas général donne

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

En effet,

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$$

**Propriété 1.1.8**

La racine d'un produit est égale au produit des racines :

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

**Important**

Cette règle de calcul ne fonctionne **que** pour le **produit** de racines, pour la somme, il n'y a pas égalité :

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

En effet, $\sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ mais $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$ et il n'y a pas égalité entre $\sqrt{64 + 36}$ et $\sqrt{64} + \sqrt{36}$.

### 1.1.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.1.13 : Exemple 1**

Ecris l'expression suivante sous forme de puissance : $a \cdot a \cdot a \cdot a$

**Solution**

Il est facile de se souvenir que $a = a^1$ et que le produit de deux puissances **de même base** est l'écriture de la base et de la somme des puissances des autres puissances, autrement dit la somme des exposants. Ainsi on aura $a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2$. La solution de notre exercice est donc

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{1+1+1+1} = a^4$$

**Exemple 1.1.14 : Exemple 2**

Effectuer le calcul suivant $(b^5 \div b^{-2})$.

**Solution**

Il faut y aller par étapes. Tout d'abord la division $(\div)$ est remplacée ici, et en général en algèbre, par l'**écriture fractionnaire**. Ainsi l'opérateur $\div$ sera remplacé par la **barre de fraction** $\frac{}{}$.

Puis, se souvenir aussi qu'une puissance négative, veut dire l'inverse de la puissance sans le signe : $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$.

La solution s'escrit donc ainsi :

$$(b^5 \div b^{-2}) = \frac{b^5}{b^{-2}} = \frac{b^5}{\frac{1}{b^2}} = b^5 \cdot b^2 = b^{5+2} = b^7$$

**NB** : Un nombre divisé par une fraction est ce même nombre multiplié par l'inverse de la fraction.

### 1.1.3 Exercices

Élémentaire

1001. Ecris sous forme de puissances :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $x \cdot x \cdot x \cdot x$ | (d) | $2 \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot x \cdot 2 \cdot x$ |
| (b) | $a \cdot a \cdot a$ | (e) | $(xy) \cdot (xz) \cdot (xyz) \cdot y$ |
| (c) | $m \cdot n \cdot n \cdot m \cdot m$ | (f) | $(-2) \cdot a \cdot (-2) \cdot (a \cdot a) \cdot (-2) \cdot a$ |

1002. Effectue les produits

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $x^2 \cdot x^3 \cdot x \cdot x^4$ | (d) | $x^2 \cdot a^3 \cdot x^4 \cdot a \cdot y^2$ |
| (b) | $z^2 \cdot z^3 \cdot z^5 \cdot z$ | | |
| (c) | $a^1 \cdot a^7 \cdot a^5 \cdot a^2$ | (e) | $2 \cdot y^5 \cdot a^2 \cdot 3 \cdot y \cdot b$ |

1003. Ecris différemment

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $x^{-2}$ | (d) | $a^0 \cdot y^{-2}$ |
| (b) | $n^0$ | (e) | $\frac{1}{x}$ |
| (c) | $y^1$ | (f) | $x^{-2} \cdot x$ |

1004. Effectue les opérations suivantes

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $x \cdot x^{-1} \cdot x^0 \cdot x$ | (f) | $x^2 \div (x^3 \cdot x)$ |
| (b) | $(-2)^2 \cdot (-2) \cdot (-2)^{-1}$ | (g) | $(a^5 \div a^6) \cdot a^2$ |
| (c) | $a^2 \cdot (a^3 \div a)$ | (h) | $(y^5 \cdot y^{-5}) \div y$ |
| (d) | $(x^{-2} \cdot x^3) \div x$ | (i) | $(x^2 \cdot x^{-3}) \cdot (x^{-3} \div x^2)$ |
| (e) | $(b^5 \div b^7) \cdot b^{-3}$ | (j) | $(z \cdot z^{-2}) \div (z^{-3} \div z)$ |

1005. Ecris sous forme de puissances à un seul exposant par base

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $(x^2)^3$ | (e) | $(y^0)^5$ |
| (b) | $(m^3)^4$ | (f) | $(-b^3)^2$ |
| (c) | $(a^5)^2$ | (g) | $(-x^{-2})^3$ |
| (d) | $(z^{-5})^2$ | (h) | $(-a^{-2})^{-3}$ |

**Intermédiaire**

1006. Effectue

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $(2x^2)^3 \cdot (x^2 \div x^4)$ | (f) | $(a^2)^n \cdot (a^n)^2$ |
| (b) | $(a^2y^3 \cdot a^{-2}y)^4$ | (g) | $x^3 \cdot x^{-n} \cdot x^2 \cdot x^n$ |
| (c) | $(4a^nb)^2$ | (h) | $(y^3)^2 \cdot (y \cdot y^{-2})^2$ |
| (d) | $x^a \cdot x \cdot x^b$ | (i) | $(xy^2)^3 \div (x^2y)^2$ |
| (e) | $a^{2n} \cdot a^n$ | (j) | $(a+1)^4 \div (a+1)^2$ |

1007. Calcule la valeur des expressions suivantes

(a) $(a^2 \cdot a^{-3} \cdot a^4)^2 \cdot a^{-4}$ si $a = 5$

(b) $(x^2 \div x^3) \cdot (x^{-2} \div x^{-3})$ si $x = 1{,}2$

(c) $(2a^2)^3$ si $a = -1$

(d) $(-x^2)^2$ si $x = 10$

1008. Ecris en notation scientifique

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | 300 | (g) | 780′000′000 |
| (b) | 0,001 | (h) | 5′010′000′000 |
| (c) | 120 | (i) | 0,000′000′000′2 |
| (d) | 3′840 | (j) | 0,000′000′000′010′13 |
| (e) | 0,000′32 | (k) | 762′500′000′000 |
| (f) | 0,000′001′25 | (l) | 0,000′000′000′300′1 |

1009. Ecris les nombres suivants sans utiliser la notation scientifique

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $3 \cdot 10^5$ | (f) | $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ |
| (b) | $1{,}2 \cdot 10^7$ | (g) | $3{,}42 \cdot 10^{-8}$ |
| (c) | $10^{-4}$ | (h) | $1{,}08 \cdot 10^6$ |
| (d) | $7 \cdot 10^{-8}$ | (i) | $2{,}7 \cdot 10^{-4}$ |
| (e) | $1{,}32 \cdot 10^9$ | (j) | $-5 \cdot 10^{-9}$ |

1010. Effectue les produits et note la réponse en écriture scientifique

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) | $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^4)$ | (f) | $(3 \cdot 10^{-8}) \cdot (0{,}5 \cdot 10^7)$ |
| (b) | $(5 \cdot 10^7) \cdot (7 \cdot 10^6)$ | (g) | $(1{,}2 \cdot 10^6) \cdot (3 \cdot 10^{-6})$ |
| (c) | $(8 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-2})$ | (h) | $(4 \cdot 10^12) \div (2 \cdot 10^{10})$ |
| (d) | $(2{,}1 \cdot 10^3) \cdot (6 \cdot 10^2)$ | (i) | $(3{,}2 \cdot 10) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-6})$ |
| (e) | $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{-4})$ | (j) | $(-2 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}03 \cdot 10^{-4})$ |

Avancé

1011. Encadre par deux entiers consécutifs. Par exemple s'il faut encadrer $\sqrt{19}$ alors on écrira $4 \leq \sqrt{19} < 5$

(a) $\sqrt{50}$
(b) $\sqrt{27}$
(c) $\sqrt{220}$
(d) $\sqrt{169}$
(e) $\sqrt[3]{36}$
(f) $\sqrt[3]{100}$
(g) $\sqrt[3]{-64}$
(h) $\sqrt[4]{4}$

1012. Calculer la valeur des expressions suivantes, si pas possible, expliquer pourquoi

(a) $\sqrt{4 \cdot 9}$
(b) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$
(c) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16}$
(d) $\sqrt{9 \cdot 16}$
(e) $\sqrt{4 \cdot 25}$
(f) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$
(g) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125}$
(h) $\sqrt[3]{8 \cdot 125}$
(i) $\sqrt{144 + 25}$
(j) $\sqrt{144} + \sqrt{25}$

1013. Calcule en utilisant les règles sur les racines. Par exemple :

$$\sqrt{108} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{36 \cdot 3} \cdot \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{16} = 6 \cdot 3 \cdot 4 = 72$$

(a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50}$
(b) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{72}$
(c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$
(d) $\sqrt{125} \cdot \sqrt{45}$
(e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$
(f) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{80}$
(g) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$
(h) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$

1014. Sachant que $a, b, x, y > 0$ calculer les expressions suivantes

(a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^5}$
(b) $\sqrt{2a^3} \cdot \sqrt{8a^5}$
(c) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}$
(d) $\sqrt[4]{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^3}$
(e) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{5a^3b} \cdot \sqrt{3ab^2} \cdot \sqrt{6a^5b}$
(f) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a^7}$
(g) $\sqrt{3x^3} \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{3}$
(h) $\sqrt[3]{2xy^2} \cdot \sqrt[3]{8xy^3} \cdot \sqrt[3]{4x^4y}$

## 1.2 Calcul littéral (2) : À quoi sevent les formes binomiales ?

Une forme **binomiale** est la formule des formules !
Elle est crainte par les étudiants, mais est considéré par les mathématiciens comme un instrument de plus.
Tout d'abord le mot "binomial" signifie que l'on fait référence à deux ("bi") inconnues. Il s'agit de la somme $a+b$, ou dit d'une manière plus correcte, il s'agit de la puissance de cette somme, au carré par exemple

$$(a+b)^2$$

Que nous raconte cette expression ? Que pour calculer le carré d'un grand nombre $a+b$, il suffit de multiplier des nombres plus petits ($a$ et $b$) et puis d'additionner de tels produits : $a^2+2ab+b^2$.
La formule, qui s'appelle une identité, s'écrit alors

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

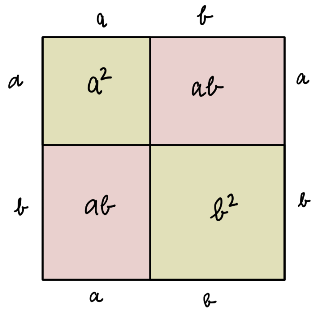
On dit identité, car le résultat que donne l'expression de gauche de l'égalité est identique à celui que donne l'expression de droite. Mais, est-elle correcte ?
Pour s'en convaincre voyons un exemple. Supposons que l'on veuille calculer $13^2$. Pour ce faire écrivons 13 comme la somme de 10 et 3. Donc $a = 10$ et $b = 3$. Alors

$$13^2 = (10+3)^2 = 10^2 + 2\cdot 10\cdot 3 + 3^2 = 100+60+9 = 169$$

Un grand nombre d'élèves ne "digèrent" pas le terme $2ab$ et auraient préféré que la formule soit $(a+b)^2 = a^2+b^2$.
Attention, la formule ainsi écrite est fausse. Le terme $2ab$ n'est pas une idée farfelue des mathématiciens, non. Ce terme fait partie intégrante de la formule et lui est nécessaire.
Un autre exemple est : combien cela fait $1'001^2$ ?
En appliquant la forme binomiale, avec $a = 1'000$ et $b = 1$ on a

$$\begin{aligned} 1'001^2 &= (1'000+1)^2 \\ &= 1'000^2 + 2\cdot 1'000\cdot 1 + 1^2 \\ &= 1'000'000 + 2'000 + 1 \\ &= 1'002'001 \end{aligned}$$

Pour montrer une fois pour toutes que le terme $2ab$ est nécessaire, les mathématiciens **démontrent** les propositions. Dire que cette formule est correcte est une proposition. Il existe plusieurs manières de la démontrer, mais la plus "parlante" est la preuve géométrique ci-dessous :
On dessine un carré avec une longueur de côté de $a+b$. L'aire de ce carré est donc de $(a+b)^2$. Ensuite, dans ce grand carré, nous traçons deux autres carrés, opposés par l'un des sommet, l'un de côté $a$ et l'autre de côté $b$. L'aire de ces deux nouveaux carrés est $a^2$ et $b^2$ respectivement. La somme des deux aires vaut $a^2+b^2$.




Or, il reste deux figures à l'extérieur des deux petits carrés. Il s'agit de deux rectangles identiques ayant pour longueur des côtés $a$ et $b$. L'aire de chacun est $ab$ et l'aire des deux $2ab$.
Nous avons réussi à exprimer l'aire totale du grand carré de deux manières différentes !

$$\text{Aire grand carré} = \text{Aire deux petits carrés} + \text{Aire deux rectangles}$$

Ce qui constitue la formule et la fin de la démonstration :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

□

### 1.2.1 Bases théoriques

**Monômes**

**Définition 1.2.1 : Monôme**

Un momôme en $x$ est une expression de la forme

$$ax^n \qquad a \in \mathbb{Q} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

**Exemple 1.2.1**

$$5x^4$$
$$\frac{1}{3}x^3$$
$$-\frac{1}{3}x^2$$
$$4x$$

sont tous des **monômes en $x$**.

Remarques

1. Tous les monômes ne sont pas des monômes en $x$. Par exemple : $3abc$ qui est un monôme en $abc$ ; $5a^2$ qui est un monôme en $a$ ; $4y$ qui est un monôme en $y$.
2. Par convention, le monôme $5 \cdot a \cdot b \cdot c$ d'écrit $5abc$.
3. Dans un monôme, on distingue deux parties : un coefficient et une partie littérale.

### Monômes semblables

**Définition 1.2.2 : Monômes semblables**

Des monômes sont semblables si leurs parties **littérales** sont **identiques**.

Ainsi $5ab^2c$, $\frac{-1}{2}ab^2c$, $-3ab^2c$ sont des monômes semblables, mais $5ab^2c$, $\frac{-1}{2}a^2bc$, $-3a^2b^2c$ ne le sont pas.

### Produit de monômes

**Définition 1.2.3 : Produit de monômes**

Il suffit de prendre des monômes et de multiplier entre elles les deux parties composant les monômes : les parties littérales entre elles et les parties numériques.

La loi de la commutativité nous permet de commuter les facteurs au moment de la multiplication :

$$\begin{aligned}-2a^3b \cdot \frac{3}{4}ab^2c &= \left(-2 \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot (a^3 \cdot a) \cdot (b \cdot b^2) \cdot c \\ &= -\frac{3}{2} \cdot a^4 \cdot b^3 \cdot c \\ &= -\frac{3}{2}a^4b^3c\end{aligned}$$

$$\frac{5}{3}x^3y \cdot \left(-\frac{2}{5}x^2\right) \cdot 3ay^2 = -2ax^5y^3$$

$$-a^2b^3 \cdot \frac{a^3c^2}{3} \cdot \left(-\frac{6ab^2c}{5}\right) = \frac{2a^6b^5c^3}{5}$$

### Polynômes

**Définition 1.2.4 : Polynôme**

Un polynôme est une **somme de monômes**.

**Exemple 1.2.2**

$$a + b$$

$$5x - 3y + 1$$

$$\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^3 + ab + 5$$

sont tous des polynômes.

**Produit d'un polynôme par un monôme** La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet de multiplier le monôme par chaque terme du polynôme.

**Exemple 1.2.3**

$$3a \cdot (6b + 7c) = 3a \cdot 6b + 3a \cdot 7c = 18ab + 21ac$$
$$(2x + 5a) \cdot 2ax = 2x \cdot 2ax + 5a \cdot 2ax = 4ax^2 + 10a^2x$$
$$5(a - b - c) = 5(a + (-b) + (-c)) = 5 \cdot a + 5 \cdot (-b)5 \cdot (-c) = 5a - 5b - 5c$$

**La mise en évidence** Est une "technique" qui permet la factorisation. Par exemple l'égalité

$$5x(2y - z) = 10xy - 5xz$$

peut être lue dans ce sens

$$10xy - 5xz = 5x(2y - z)$$

Le passage de l'expression $10xy - 5xz$ à l'expression $5x(2y - z)$ s'appelle **mise en évidence des facteurs communs** ou simplement **mise en évidence**.

En effet, dans les deux premiers termes $10xy$ et $5xz$ il y a un facteur commun, qui est $5x$ justement.

**Exemple 1.2.4**

$$16x^3y^2 - 24x^2y + 40x^2y^2 =$$
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y =$$
$$8x^2y(2xy - 3 + 5y)$$

**Remarquer** que le monôme $8x^2y$ est le **PGDC**, c'est-à-dire le plus grand diviseur commun, des trois termes du polynôme.

**Somme de monômes semblables** Pour effectuer la somme de monômes il faut qu'ils soient semblables. Ensuite

**Procédé 1.2.1 : Somme de monômes**

On additionne les coefficients et on garde la partie littérale.

Dans

$$5a + 8a = a \cdot (5 + 8) = a \cdot 13 = 13a$$

le passage de l'expression $5a + 8a$ à l'expression $13a$ s'appelle **réduction de termes semblables**.

**Exemple 1.2.5**

(a) $15x^2 + 3x^2 - 7x^2 =$
$x^2 \cdot (15 + 3 - 7) =$
$11x^2$

(b) $6a^2b - 8a^2b - a^2b =$
$a^2b(6 - 8 - 1) =$
$-3a^2b$

(c) $16ab + 8xy - ab + 2xy =$
$(16ab - ab) + (8xy + 2xy) =$
$ab(16 - 1) + xy(8 + 2) =$
$15ab + 10xy$

(d) $9x^2y + 12xy^2 + 8x^2y - 5xy^2 + xy - 17x^2y =$
$9x^2y + 8x^2y - 17x^2y + 12xy^2 - 5xy^2 + xy =$
$x^2y(9 + 8 - 17) + xy^2(12 - 5) + xy =$
$7xy^2 + xy$

### Somme et différence de polynômes

**Somme de polynômes** L'associativité de l'addition permet de supprimer les parenthèses entre les polynômes qu'on additionne :

$$\begin{aligned}(5x^3 - 8x^2 - 3x - 4) + (-x^3 + 2x^2 + 5) &= 5x^3 - 8x^2 - 3x - 4 - x^3 + 2x^2 + 5\\ &= 5x^3 - x^3 - 8x^2 + 2x^2 - 3x - 4 + 5\\ &= 4x^3 - 6x^2 - 3x + 1\end{aligned}$$

**Différence de polynômes** L'opposé d'un polynôme s'obtient en changeant les signes de chacun de ses termes ; il s'agit en fait d'une multiplication par $(-1)$ :
$5ax$ et $-5ax$ sont des monômes opposés, car leur somme est nulle :

$$(5ax) + (-5ax) = 0$$

Les polynômes

$$(-4x^2 + 3x - 5) \quad \text{et} \quad (4x^2 - 3x + 5)$$

sont aussi des polynômes opposés, leur différence vaut zéro :

$$(-4x^2 + 3x - 5) + (4x^2 - 3x + 5) = -4x^2 + 3x - 5 + 4x^2 - 3x + 5 = 0$$

**Soustraction de polynômes** La soustraction de polynômes, comme pour les nombres entiers, passe par l'addition de l'opposé. Comme partout dans la manipulation des polynômes, il faut faire attention au rôle du signe "−", il faut bien appliquer la règle des signes. **Cette règle ne s'applique que lorsqu'il y a une MULTIPLICATION en jeu**.

**Procédé 1.2.2 : Soustraction de polynômes**

Pour soustraire un polynôme, on **additionne son opposé**.

**Exemple 1.2.6**

(a)

$$\begin{aligned}
&(3a^2b - 2ab + 5b^2) - (4ab - 3a^2b - 6b^2) = \\
&(3a^2b - 2ab + 5b^2) + (-4ab + 3a^2b + 6b^2) = \\
&3a^2b - 2ab + 5b^2 - 4ab + 3a^2b + 6b^2 = \\
&6a^2b - 6ab + 11b^2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&(3x^2y + 8xy^2) - ((-xy + 5xy^2) - (-11x^2y + 7xy)) = \\
&(3x^2y + 8xy^2) - ((-xy + 5xy^2) + (+11x^2y - 7xy)) = \\
&(3x^2y + 8xy^2) - (-xy + 5xy^2 + 11x^2y - 7xy) = \\
&(3x^2y + 8xy^2) + (+xy - 5xy^2 - 11x^2y + 7xy) = \\
&3x^2y + 8xy^2 + xy - 5xy^2 - 11x^2y + 7xy = \\
&-8x^2y + 3xy^2 + 8xy
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
&8(a+b) - 3(a-b) = \\
&(8(a+b)) - (3(a-b)) = \\
&(8a + 8b) - (3a - 3b) = \\
&(8a + 8b) + (-3a + 3b) = \\
&8a + 8b - 3a + 3b = \\
&5a + 11b
\end{aligned}$$

**Produit de polynômes** Comment effectuer le produit $(a+b)\cdot(c+d)$ ?
Si on pose $(a+b) = u$, on obtient

$$u \cdot (c+d) = u \cdot c + u \cdot d$$

et donc

$$(a+b) \cdot (c+d) = (a+b) \cdot c + (a+b) \cdot d$$

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet de multiplier chaque terme du premier polynôme par chaque terme du second.

**Propriété 1.2.1**

$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

**Exemple 1.2.7**

a. $(2x - 3y) \cdot (x + y) =$
$2x^2 + 2xy - 3xy - 3y^2 =$
$2x^2 - xy - 3y^2$

b. $(x + 3) \cdot (x - 5) \cdot (x + 4) =$
$((x + 3)(x - 5)) \cdot (x + 4) =$
$(x^2 - 5x + 3x - 15)(x + 4) =$
$(x^2 - 2x - 15)(x + 4) =$
$x^3 + 2x^2 - 23x - 60$

**Produits remarquables** Certains produits de polynômes se rencontrent fréquemment ; on les appelle **produits remarquables** ou **identités remarquables**.

**Carré d'une somme de deux termes** L'expression $(x + y)^2$ peut être développée comme suit

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Et on a

**Propriété 1.2.2**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Exemple 1.2.8**

a. $23^2 =$
$(20+3)^2 =$
$20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 =$
$400 + 120 + 9 = 529$

b. $(3x+5y)^2 =$
$(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 =$
$9x^2 + 30xy + 25y^2$

c. $(\frac{1}{2} + 2x)^2 =$
$(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x + (2x)^2 =$
$\frac{1}{4} + 2x + 4x^2$

**Carré d'une somme de deux termes**

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

**Propriété 1.2.3**

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Exemple 1.2.9**

a. $38^2 = (40-2)^2 =$
$40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 =$
$1600 - 160 + 4 =$
$1444$

b. $(0{,}2x - 1{,}2x)^2 =$
$(0{,}2x)^2 - 2 \cdot 0{,}2x \cdot 1{,}2y + (1{,}2y)^2 =$
$0{,}04x^2 - 0{,}48xy + 1{,}44y^2$

c. $(3a^3 - 2a^2)^2 =$
$(3a^3)^2 - 2 \cdot 3a^3 \cdot 2a^2 + (2a^2)^2 =$
$9a^6 - 12a^5 + 4a^4$

**Produit d'une somme de deux termes par leur différence**

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$

**Propriété 1.2.4**

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

**Exemple 1.2.10**

a.
$$\begin{aligned} 81 \cdot 79 &= (80 + 1) \cdot (80 - 1) \\ &= 80^2 - 1^2 \\ &= 6400 - 1 \\ &= 6399 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} (3a + 2b) \cdot (3a - 2b) &= (3a)^2 - (2b)^2 \\ &= 9a^2 - 4b^2 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} (x + 1)(x - 1) \cdot (x^2 - 1) &= (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1) \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

**Factorisation** La factorisation est un notion **très importante** dans la résolution des **équations**. On fait souvent appelle à elle pour simplifier des expressions qui au départ paraissent compliquées.
Quitte à m'avancer un peu sur le programme, il faut prendre conscience que si on arrive à écrire une expression algébrique sous la forme de plusieurs produits, qui sont tous égaux à zéro, alors au lieu de résoudre **une équation compliquée** on en résout **plusieurs plus simples**.
Il y a donc une équivalence entre les deux expressions suivantes :

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = 0 \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

Le symbole "$\iff$" veut dire "équivalent". Cela veut dire que si on doit résoudre le produit des expressions $A \cdot B \cdot C \cdot D = 0$, alors on peut de manière équivalente résoudre séparément $A = 0$ puis $B = 0$ puis $C = 0$ et enfin $D = 0$. Ceci réduit énormément la difficulté.

**Définition 1.2.5 : Factoriser**

Factoriser une expression c'est la décomposer en un produit de facteurs.

Pour factoriser, on utilise essentiellement deux techniques :

1. **La mise en évidence**

**Exemple 1.2.11**

$$25a^2 + 15ab - 5a = 5a(5a + 3b - 1)$$

Ici on a mis en évidence le facteur $5a$ qui se trouve dans les trois termes de l'expression de gauche. De plus, si tu lis de droite à gauche cette expression, on parlera alors de "distributivité", autrement dit on aura distribué le $5a$ dans la parenthèse.

2. **Les produits remarquables**

**Exemple 1.2.12**

$$4x^4 + 12x^2y + 9y^2 = (2x^2 + 3y)^2$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} = (a - \frac{1}{2})^2$$

$$16x^2 - 0{,}25 = (4x - 0{,}5)(4x + 0{,}5)$$

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) \\ &= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

**Remarque** On utilise parfois les deux techniques de factorisation dans une même expression.

**Exemple 1.2.13**

$$\begin{aligned} 6x^2 + 24x + 24 &= 6(x^2 + 4x + 4) \\ &= 6(x + 2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a^8 - 5 &= 5(a^8 - 1) \\ &= 5(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a - 1)(a + 1) \end{aligned}$$

### 1.2.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.2.14 : Exemple 1**

Effectuer le produit suivant $(x+a)\cdot 5$.

**Solution**
On observe l'expression. Il s'agit d'une parenthèse, comportant une addition et d'un facteur (5) qui la multiplie. Seulement ce facteur est à droite de la parenthèse.
Cela ne pose aucun problème, car $(x+a)\cdot 5 = 5\cdot(x+a)$, grâce à la commutativité de la multiplication.
On doit donc distribuer le facteur 5 dans la parenthèse. La solution s'écrit :

$$(x+a)\cdot 5 = 5x + 5a$$

**Exemple 1.2.15 : Exemple 2**

Développer le produit suivant $(2ab - 3a + b)\cdot 5x$.

**Solution**
La seule différence par rapport à l'exemple précédent c'est que la parenthèse est composée de la somme de trois monômes, autrement dit un polynôme à trois termes.
La solution s'écrit donc ainsi

$$\begin{aligned}(2ab - 3a + b)\cdot 5x &= 2ab\cdot 5x - 3a\cdot 5x + b\cdot 5x\\ &= 10abx - 15ax + 5bx\end{aligned}$$

**Exemple 1.2.16 : Exemple 3**

Factorise le polynôme suivant

$$9a^2b^2 - 27ab + 63a$$

**Solution**
On se souvient que **factoriser** c'est décomposer une somme en un produit. On utilise pour ce faire une mise en évidence des facteurs "qui se retrouvent" dans chacun des termes du polynôme.
Ici, chaque partie numérique des termes est un multiple de 9 et on voit que du côté des lettres, c'est le $a$ qui se retrouve dans tous les termes. On a donc trouvé notre facteur commun : $9a$.
On met ce facteur **à l'extérieur d'une paire de parenthèses**. L'intérieur de la parenthèse contiendra le quotient de chaque terme par $9a$. Autrement dit, on va diviser chacun des termes par $9a$ et écrire le résultat dans la parenthèse :

$$9a^2b^2 - 27ab + 63a = 9a(ab^2 - 3b + 7)$$

et nous avons transformé la somme en un produit, c'est-à-dire, nous avons factorisé l'expression de départ.

### 1.2.3 Exercices

**Élémentaire**

1015. Parmi les monômes suivants, groupe ceux qui sont semblables

| | | |
|---|---|---|
| $3x^2y$ | $3xy^2$ | $-3x^2y^2$ |
| $\frac{1}{2}x^2y$ | $-\frac{2}{3}x^2y^2$ | $\frac{3}{5}x^3y^2$ |
| $2 \cdot x \cdot y^2$ | $-\frac{2}{7}x \cdot y^2 \cdot xy$ | $-5y^2 \cdot x$ |
| $4 \cdot x \cdot y \cdot x$ | $-\frac{1}{2}y^3x^2$ | $-0{,}2x^2 \cdot y \cdot xy$ |

1016. Calcule la valeur des monômes suivants si $a = -1$ et $b = 2$

(a) $3a^2b$
(b) $-2a^3b^2$
(c) $\frac{1}{2}a^3b$
(d) $-\frac{1}{3}a^2b^2$
(e) $\frac{3}{4}a^4b^3$
(f) $-5a^5b^4$
(g) $-\frac{1}{6}ab^3$
(h) $\frac{3}{5}a^6b^3$

1017. Effectue le produit des monômes suivants

(a) $3x^2 \cdot 2y \cdot 5y^3 \cdot 4x^3$
(b) $2a^2 \cdot (-5ab) \cdot 3ab^3$
(c) $ay^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}ay^2\right) \cdot 5a^5$
(d) $4b^2 \cdot \frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{3}{5}a^2$
(e) $2x^3y^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2\right) \cdot \frac{1}{3}x^3$
(f) $\frac{5}{8} \cdot 3a^3b^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}b^5\right) \cdot (-12a^3)$

1018. Ecris les monômes sous leur forme réduite

(a) $2(a^2x)^2$
(b) $-5a(x^2y)^4$
(c) $(-2a^2x)^2$
(d) $-(3x^3y^2)^4$
(e) $(-2a^3)^2 \cdot 3a^4$
(f) $-(3x^3y)^2 \cdot 2(xy^2)^3$
(g) $(-0{,}1x^2y)^3 \cdot (10x^3y^2)^2$
(h) $\left(\frac{2}{3}x^2y^3\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}xy^2\right)$

1019. Effectue les produits

(a) $x(x + y)$
(b) $a(a^2 + a)$
(c) $2y(a - y)$
(d) $(a^3 - a^2) \cdot 2a$
(e) $(x^3 + xy) \cdot x^2$
(f) $(-y^3) \cdot (ay - y^2)$
(g) $2a^2(a - 3b)$
(h) $5x^2(x^3 - 2 + z^2)$
(i) $(y^3 + 2ay + y^2) \cdot 3y^2$
(j) $(-4a^3) \cdot (2ab + 3a^2 - 1)$
(k) $(5x^2y + 2xy^2 - x^3y) \cdot x^2y$
(l) $(-2z^2) \cdot (-5 + 3z - z^3)$

**Intermédiaire**

1020. Mets en évidence les facteurs communs

(a) $2a + 4b$
(b) $5x - 15y$
(c) $12a + 15b - 9c$
(d) $8x - 4y + 2$
(e) $5a + 7ab$
(f) $ab + ac$
(g) $2x + 4xy - 2xz$
(h) $3a + 2a$
(i) $xy + 2x$
(j) $4ac - 4bc$

1021. Mets en évidence et réduis les termes semblables s'il y a lieu

(a) $3a + 4a$
(b) $3a + 6$
(c) $5a - 3a$
(d) $4a + 3$
(e) $4xy + 6xy$
(f) $4xy + 3xy - xy$
(g) $2a - 5a$
(h) $2a - 5$
(i) $3ab - 4ab - 2ab$
(j) $-3x + 4x$
(k) $-2xy - 5xy + 3xy$
(l) $3xy + 4xy - xy$

1022. Réduis les monômes semblables

(a) $6x - 4y - 4x + 7y$
(b) $3c - 8d - 18d + 5c$
(c) $3{,}8u - 5{,}9u + 3{,}5v - 3{,}5$
(d) $3xy - 4x^2y + 5xy - x^2y$
(e) $8x^2 - 3x^3 - (-5x^2) - x^3$
(f) $4x - (-2y) - (-2x) - y$
(g) $2abc - 3ab^2 - (-abc)$
(h) $18ab^2 - 3a^2b - 8a^2b + 5ab^2$
(i) $-(-5uv) - 10u^2v + uv - (-u^2v)$
(j) $a-(-2b)+(-3a)-(-2a)-4b$

1023. Effectue

(a) $(a + b)(c - d)$
(b) $(a + 3)(c - 4)$
(c) $(2a + b)(c - d)$
(d) $(3a + b)(2c - d)$
(e) $(4a + b)(3c - d)$
(f) $(7a - 3b)(4c - 3d)$
(g) $(4c - 2d)(6a + 3b)$
(h) $(5a - b)(5b - a)$

1024. Effectue

(a) $2a(3 - 2b) + a$
(b) $3a + (5 + 2a)a$
(c) $2x(4 - 2y) + x(3y - 5)$
(d) $(-a)(2a - 3) + 2a^2$
(e) $4x + (6 - 2x)(-5a)$
(f) $(-2c)(c - d) + (c + d)(-2c)$

Avancé

1025. Factorise

(a) $(4a+5b)(x-y)+6c(x-y)$
(b) $5x(a+2b)+(y-z)(a+2b)$
(c) $-5a(b+c)-(b+c)$
(d) $b(2x+y)-(a+c)(y+2x)$
(e) $(2x-3a)\cdot 5b+(6b-3y)(2x-3a)$
(f) $(x-2y)\cdot 5x+5x(x-2y)$

1026. Factorise en utilisant si possible les produits remarquables

(a) $36a^2-60ab+25b^2$
(b) $4x^2-2xy+\frac{1}{4}y^2$
(c) $9x^2-4xy+\frac{4}{9}y^2$
(d) $x^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{16}y^2$
(e) $4a^2-a+\frac{1}{16}$
(f) $16y^2-24yz+4z^2$

1027. Factoriser

(a) $a^2-b^2$
(b) $y^2-z^2$
(c) $4a^2-b^2$
(d) $16x^2-25y^2$
(e) $x^4-1$
(f) $25c^2-30d^2$
(g) $1-16a^4$
(h) $49-64x^2$

1028. Factoriser

(a) $3x^2-3y^2$
(b) $8a^2-16b^2$
(c) $3x^2-3xy+\frac{3}{4}y^2$
(d) $\frac{1}{2}x^2-8$
(e) $3x^2+30x+75$
(f) $\frac{1}{4}z^2-zu+u^2$
(g) $0{,}08a^2-0{,}24ab+0{,}18b^2$
(h) $5x^4-3125$

1029. Factoriser

(a) $7ax^8-7a$
(b) $16ax^2+5axy+\frac{25}{64}ay^2$
(c) $100+20x+x^2$
(d) $48-3x^2$
(e) $(x+y)(x^2-y^2)+(x^2-y^2)$
(f) $1-0{,}25z^2$
(g) $37x^5b^3-148x^3b^3$
(h) $16a^5b+16a^4b^2+4a^3b^3$
(i) $(x+y)(u-v)-(u-v)$
(j) $-a^2+2ab-b^2$

## 1.3 Calcul littéral (3) : Ce que l'algèbre peut nous apporter

Il est commun d'entendre des gens râler au sujet des mathématiques, et de l'algèbre en particulier.
C'est par exemple le cas du célèbre essayiste français Stendhal, qui écrivait :
*Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques[. . . ] Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus.* (Vie de Henry Brulard)
Il y a aussi un personnage de Geoffry Willians et Ronald Searle (**Ra le bol de l'écol**, 1953) qui a une vision assez primitive de la vie et qui dit, au sujet d'un exercice d'algèbre : "C'est juste un tas de lettres . . . ", avant de lancer des injures à l'enseignant.
C'est certainement que personne n'a pris la peine de lui expliquer à quoi peut nous servir l'algèbre.
Choisissez un nombre de trois chiffres.
N'importe quel nombre convient tant que la différence entre son premier et son dernier chiffre est au moins égale à deux.
Ensuite, retournez-le et soustrayez le plus petit nombre au plus grand. Ainsi, on aura par exemple

$$826 - 628 = 198$$

Enfin, retournez ce nouveau nombre à trois chiffres et additionnez-le avec le précédent :

$$198 + 891 = 1089$$

Á la fin de ce processus, on obtient 1089 : on s'attend bien sûr à ce que ce résultat dépende du nombre à trois chiffres choisi au dépar. Mais en fait il n'en est rien : le résultat final sera toujours

$$1089$$

Comment est-ce possible ?
L'algèbre (calcul littéral) nous montre que c'est le cas.
On a dit plus tôt dans le cours, que l'avantage de travailler avec des lettre est de considérer une infinité de nombres avec peut, une lettre. Voyons comment on peut l'expliquer.
La première étape consiste à choisir un nombre de trois chiffres, à le renverser, puis à retrancher au plus grand le plus petit.
Supposons alors que le plus grand nombre s'écrive avec trois chiffres $a$, $b$ et $c$. Alors, en fait, il vaut

$$100a + 10b + c$$

(ce qui constitue un polynôme) et après l'avoir retourné, puis avoir effectué la soustraction, on obtient

$$100a + 10b + c - (100c + 10b + a)$$

Dans cette expression $100c+10b+a$, est le nombre choisi retourné. Si nous effectuons la soustraction des deux polynômes, on a

$$\begin{aligned}100a + 10b + c - (100c + 10b + a) &= 100a - 100c + 10b - 10b + c - a\\ &= 100a - a - 100c + c\\ &= 99a - 99c\\ &= 99(a - c)\end{aligned}$$

Et comme $a$ et $c$ sont entiers (c'est les chiffres du nombre), ce calcul montre que la première partie du tour *donnera toujours un multiple de* 99.
De plus, avec un petit effort de calcul, les multiples de 99 qui ont 3 chiffres sont

$$198,\ 297,\ 396,\ 495,\ 594,\ 693,\ 792,\ 891$$

et on voit immédiatement que si l'on additionne leur premier et troisième chiffres, on tombe toujours sur 9.
Ainsi, quand on en vient à la dernière partie du tour, qui consiste à renverser ce nombre et à l'ajouter au précédent, on obtient 9 paquets de 100 pour les chiffres des centaines, 9 paquets de 1 pour les unités, et 2 paquets de 90 pour les dizaines ce qui donne

$$900 + 9 + 180 = 1089$$

Et on conclut par un petit CQFD.

### 1.3.1 Bases théoriques

#### Comment effectuer un calcul littéral

On commence par bien recopier l'énoncé. Tous les signes sont importants et pouvoir se relire est aussi important que d'écrire correctement un énoncé.
Puis on agit par étapes. À chacune d'entre elles, une règle doit être appliquée, celle qui nous permets de passer à l'étape suivante.

#### Marquer et séparer

Il est utile, dans les longues expressions, de "marquer" les monômes semblables, ceux qu'on a déjà traité ou ceux que l'on veut marquer comme utilisés.
Ici on utilise une propriété de la multiplication bien utile et utilisée par tout mathématicien qui se respecte : la commutativité. En effet

$$A \cdot B$$

est égal à

$$B \cdot A$$

et au sein d'une expression cela donnerai, par exemple

$$A \cdot (2x - 3) \cdot B = A \cdot B \cdot (2x - 3) = B \cdot A(2x - 3)$$

#### La puissance d'une parenthèse

Il n'est pas rare de voir les élèves écrire que le carré d'une somme est égale à la somme des carrés :

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 \qquad \longleftarrow \text{FAUX !}$$

mais ceci est **faux**.
Soit on utilise ce qu'on appelle "identités remarquables" soit on applique la définition de la puissance.
Dans l'exemple la somme $x + y$ est en fait multipliée par elle-même, ce qui, après l'avoir écrit, ouvre la possibilité de faire une double distributivité :

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= (x + y) \cdot (x + y)\\ &= x \cdot (x + y) + y \cdot (x + y)\\ &= x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

On applique cette propriété aussi à des puissances plus élevées, le calcul est alors un peu long, mais rien de compliqué :

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)\\ &= (a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)) \cdot (a + b)\\ &= (a^2 + ab + ba + b^2) \cdot (a + b)\\ &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b)\\ &= (a^3 + 2a^2b + ab^2) + (a^2b + 2ab^2 + b^3)\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

### 1.3.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.3.1 : Exemple 1**

Calculer, sans l'aide d'une calculatrice, le carré de 105. Autrement dit

$$105^2$$

**Solution**
On observe.
Nous constatons que l'algèbre nous est utile : pour calculer le carré d'un grand nombre, nous allons faire plusieurs calculs de nombres plus petits.
Écrivons $105 = 100 + 5$, et calculons le carré de 105 :

$$\begin{aligned} 105^2 &= (100+5)^2 \\ &= 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 5 + 5^2 \\ &= 10'000 + 1'000 + 25 \\ &= 11'025 \end{aligned}$$

Le résultat est donc $11'025$.

**Exemple 1.3.2 : Exemple 2**

Soit la formule suivante

$$A = (2a - x)^2 - (a + x)^2$$

On vous demande d'isoler la variable $x$ en vous servant du calcul littéral.

**Solution**
On observe.
Nous constatons que ce n'est pas facile à première vue. Dans ce cas, nous devons commencer par faire ce que nous savons faire : modifier l'expression de droite de l'égalité.
Ce qui est remarquable dans cette expression est la différence de deux carrés. "Bin voilà !". C'est la clef.
Nous allons modifier le membre de droite : nous savons que $m^2 - n^2 = (m + n) \cdot (m - n)$. Donc,

$$\begin{aligned} A &= (2a - x + a + x) \cdot (2a - x - a - x) \\ &= 3a(a - x) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow A = 3a \cdot (a - x)$$

Or notre "cible" ($x$) est dans une parenthèse, nous ne pouvons pas l'isoler facilement. Il faut commencer par "dégager" le facteur de la parenthèse, car c'est ce qui accessible. Ce $3a$ peut être manipulé.
Nous allons donc diviser des deux côtés de l'expression par $3a$ :

$$\frac{A}{3a} = a - x$$

Puis nous allons soustraire $\frac{A}{3a}$ des deux côtés :

$$0 = a - x - \frac{A}{3a}$$

Et enfin nous allons additionner $x$ des deux côtés :

$$x = a - \frac{A}{3a}$$

C'est le résultat.

### 1.3.3 Exercices

Élémentaire

1030. Trouver deux nombres dont

(a) le produit vaut 7 et la somme vaut 8
(b) le produit vaut −20 et la somme vaut −8
(c) le produit vaut −20 et la somme vaut 1
(d) le produit vaut 36 et la somme vaut 12
(e) le produit vaut −40 et la somme vaut 3
(f) le produit vaut 28 et la somme vaut −11

1031. Trouver deux nombres dont

(a) le produit vaut 10 et la somme vaut −7
(b) le produit vaut −9 et la somme vaut 8
(c) le produit vaut −8 et la somme vaut −2
(d) le produit vaut 15 et la somme vaut −8
(e) le produit vaut 48 et la somme vaut 14
(f) le produit vaut 24 et la somme vaut 11

1032. Factoriser à l'aide des produits remarquables

(a) $x^2 + 4x - 21$
(b) $\frac{1}{4}a^2 + 16b^2 + 4ab$
(c) $x^2 + 4$
(d) $9a^2 + 6ab + b^2$
(e) $9x^8 - 49y^2$
(f) $\frac{1}{49}a^6 - \frac{2}{7}a^3b + b^2$

1033. Factoriser à l'aide des produits remarquables

(a) $9a^4 - 16b^2$
(b) $x^2 + x - 20$
(c) $\frac{1}{4}a^2 + 2ab + 4b^2$
(d) $9a^2 - 4b^2$
(e) $0{,}01x^2 - 0{,}6xy + 9y^2$
(f) $x^2 + 6x - 16$

1034. Factoriser aussi complétement que possible

(a) $4a^2 + 8ab + 4b^2$
(b) $16a^2 - 8ab + b^2$
(c) $\frac{1}{4}a^2 + ac + c^2$
(d) $5x^2 + 10xy + 5y^2$
(e) $4a^2 - 16ab^3 + 16b^6$
(f) $49a^2 + 42ab + 9b^2$

**Intermédiaire**

1035. Réduire les expressions suivantes

(a) $\frac{4}{3}x^3y^3 \cdot (-3xy^3)^2$

(b) $2a-(3b-(-5+3a)-4)-2a$

(c) $(2x^3-3y)\cdot(-3x^3+y)$

(d) $x+\frac{y}{x}\cdot(-3x^2+4xy)$

(e) $(2x-3y)\cdot(3x-y)-(2x-y)\cdot(5x+y)$

(f) $4x-y\cdot(x-2)+3x\cdot(5+y)$

1036. Réduire les expressions suivantes

(a) $\frac{2}{3}z^2-(3z-(\frac{1}{3}z-\frac{2}{3})\cdot z+z^2)$

(b) $(2x^2z)^2-(2x^3-1)\cdot(3xz^2-x^4z^2)$

(c) $(2a-b)\cdot a-ba$

(d) $2a-b\cdot a-ba$

(e) $\frac{3x-3}{2}-\frac{x+2}{3}$

(f) $\frac{3}{14}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{7}{9}\cdot\sqrt{x}$

1037. Réduire

(a) $\frac{2\cdot(2a-b)}{3}-\frac{3\cdot(5a-2b)}{5}$

(b) $\left(-\frac{a^4b^2c^0}{4}\right)^2$

(c) $\frac{1}{2}c^2-(3c-(\frac{1}{2}c+3)\cdot c)$

(d) $(x-3)\cdot(x-3)\cdot(x+3)$

(e) $x^2-(x-1)\cdot(2x+1)$

(f) $\frac{3}{2}x^2y\cdot\left(\frac{4}{5}xy^4-\frac{10}{21}x^3y^2\right)$

1038. Écrire aussi simplement que possible

(a) $(b^2+b^2+b\cdot b\cdot b+b\cdot b)^2$

(b) $(2a^2-7a^2)\div(\frac{1}{2}a-a)$

(c) $\frac{a-2}{a^2-4x^2}\div\frac{1}{2x-a}$

(d) $(2x-3)\cdot(x+1)-(x-4)^2$

(e) $3x-2y-1-(2x-y+1)$

(f) $\frac{2x-2}{x^2-6x+5}\cdot\frac{x-5}{4x}$

1039. Écrire aussi simplement que possible

(a) $\frac{x-2}{2}-\frac{3x-4}{4}$

(b) $\left(\frac{1}{2}ab^2\right)\cdot(6x^2+\frac{1}{2}a)^2$

(c) $(2x-1)^2\cdot(2x+x)^3$

(d) $\frac{1}{3}\cdot(2x-5)+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot(-2x+1)-\frac{1}{9}\cdot(4x-6)$

(e) $\frac{x^2-10x+9}{x^2-18x+81}\div\frac{3x-3}{x^2-81}$

(f) $\frac{x^2+2x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2+2x+1}{x^3+2x^2}$

**Avancé**

1040. Quel polynôme faut-il additionner à

(a) $-10x$ pour obtenir $20x$ ?
(b) $12x$ pour obtenir $15x+2$ ?
(c) $3x^2+2x-5$ pour obtenir $8x^2-5x+2$ ?
(d) $2xy$ pour obtenir $x^2+y^2$ ?
(e) $x+1$ pour obtenir $x-1$ ?
(f) $9x^2+3z^2$ pour obtenir $y^3$ ?
(g) $-2x^3+x^2$ pour obtenir $-3x^3$ ?

1041. Calculer (mentalement) à l'aide d'une formule

(a) $32^2$
(b) $73^2$
(c) $101^2$
(d) $1001^2$
(e) $99^2$
(f) $19^2$
(g) $28^2$
(h) $86^2$
(i) $18 \cdot 22$
(j) $65 \cdot 75$
(k) $31 \cdot 49$
(l) $1013 \cdot 987$

1042. Vérifier que l'égalité

$$x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

est vraie. Ensuite

(a) en déduire que
$$11^{10}-1$$
est divisible par 100.

(b) en déduire un moyen rapide de calculer $\alpha = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9$

1043. Une tour du jeu d'échecs placée en case $a1$ doit se rendre à la case $h8$, en se déplaçant horizontalement vers la droite ou verticalement vers le haut. De combien de manières peut-elle effectuer ce déplacement ?

1044.
$$x^4+2x^3+3x^2+2x+1$$
est le carré d'un polynôme qu'il s'agit de déterminer.

## 1.4 Équations linéaires (1) : Le cheval et l'âne

### 1.4.1 Énoncé

Un cheval et un âne se rencontrent sur un chemin.
L'âne dit au cheval : "Si tu me donnes l'un de tes sacs, ma charge serait alors deux fois ta charge."
Le cheval lui répond : "Si tu me donnes l'un de tes sacs, nos charges seraient alors les mêmes."
Trouver le nombre de sacs que porte l'âne.

### 1.4.2 Solution

Voici pas à pas l'analyse de cet énoncé et sa résolution.

| Énoncé/langage écrit | Nb de sacs de l'âne | Nb de sacs du cheval |
|---|---|---|
| Supposons que le nombre de sacs que porte l'âne soit | $x$ | |
| L'âne dit au cheval : "Si tu me donnes l'un de tes sacs" | $x+1$ | |
| "ma charge serait alors deux fois ta charge." | $x+1$ | $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$ |
| (on peut dire que le cheval a actuellement) | | $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+1$ |
| Le cheval lui répond : "Si tu me donnes l'un de tes sacs, " "nos charges seraient alors les mêmes." | $x-1$ | $\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+1+1$ |

De cette dernière affirmation et de la ligne qui la précède on tire l'équation suivante

| Équation à résoudre | Commentaires/étapes de résolution |
|---|---|
| $x-1=\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+1+1$ | Ceci est notre première équation |
| $x-1=\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+2$ | |
| $x-1{\color{red}+1}=\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+2{\color{red}+1}$ | concept de la "balance" |
| $x=\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+3$ | |

| Équation à résoudre | Commentaires/étapes de résolution |
|---|---|
| $x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + 3$ | séparation de la parenthèse en deux fractions |
| $x = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ | addition de $\frac{1}{2}$ et 3 |
| $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{7}{2} - \frac{x}{2}$ | encore le principe de la "balance" |
| $\frac{x}{2} = \frac{7}{2}$ | |
| $\frac{x}{2} \cdot 2 = \frac{7}{2} \cdot 2$ | et encore une fois le même principe de la balance |
| $x = 7$ | |

### 1.4.3 Bases théoriques

La capacité à traduire des phrases en français décrivant les données d'un problème en notation algébrique est essentiel pour la résolution d'équations.
Cela permet de poser des équations et de les résoudre.
Vous devez identifier le type d'expressions algébrique en présence dans un exercice ou problème.

**Définition 1.4.1 : Expression algébrique**

Une **expression algébrique** est une écriture mathématique qui ressemble à un calcul à faire qui contient des lettres, des nombres, des opérateurs et des éléments de ponctuation (parenthèses, accolades).

**Exemple 1.4.1**

Par exemple

$$x^2$$
$$3x - 1$$
$$5{,}125$$
$$0$$
$$x^2 + 3x$$
$$(x-1)\cdot x + \frac{x}{4}$$

sont des expressions algébriques.

**Définition 1.4.2 : Équation**

Une **équation** est la donnée de trois objets

1. deux expressions algébriques
2. séparées par une égalité "$=$" et
3. contenant une (ou plusieurs) inconnue(s), souvent noté $x$.

$$\textbf{membre de gauche} = \textbf{membre de droite}$$

où les deux membres sont des expressions algébriques.

**Exemple 1.4.2**

Par exemple

$$x^2 = \frac{4}{25}$$
$$5x - 1 = 0$$
$$x^2 + 3x = 8$$

sont des équations.

**Définition 1.4.3 : Inéquation**

Une **inéquation** est une équation où le signe $=$ est remplacé par l'un des quatre symboles suivants

$$< \quad > \quad \leq \quad \geq$$

**Exemple 1.4.3**

Par exemple

$$x^2 > \frac{4}{25}$$
$$5x - 1 < 0$$
$$x^2 + 3x \geq 8$$

sont des inéquations.

**Important : Important**

Lorsqu'on **simplifie** une **suite d'additions du même terme** on utilise une **multiplication**.

**Exemple 1.4.4**

$$x + x = 2 \cdot x$$
$$w + w + w + w = 4 \cdot w$$
$$y + y + y + y + y + y = 6y$$

Lorsqu'on **simplifie** une **suite de multiplications du même terme** on utilise une notation **à la puissance**.

**Exemple 1.4.5**

$$x \cdot x = x^2$$
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

### 1.4.4 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.4.6 : Exemple 1**

Écrire en français la signification de

1. $x - 5$
2. $a + b$
3. $3x^2 + 7$

---

**Solution**

1. $x - 5$ : 5 de moins que $x$
2. $a + b$ : *la somme de* $a$ et de $b$ ou $b$ de plus que $a$
3. $3x^2 + 7$ : 7 de plus que trois fois le carré de $x$

**Exemple 1.4.7 : Exemple 2**

Écrire les expressions algébriques suivantes

1. La somme de $p$ et du carré de $q$.
2. Le carré de la somme de $p$ et $q$.
3. $b$ moins que le double de $a$.

**Solution**

1. $p + q^2$
2. $(p + q)^2$
3. $2a - b$

**Exemple 1.4.8 : Exemple 3**

Écrire en français la signification de

1. $D = ct$
2. $A = \dfrac{b + c}{2}$

**Solution**

1. $D$ est égal au produit de $c$ et $t$.
2. $A$ est égal à la moitié de la somme de $b$ et $c$ *ou* $A$ est la moyenne de $b$ et $c$.

**Exemple 1.4.9 : Exemple 4**

Écrire l'énoncé suivant comme une équation : $S$ est la somme de $a$ et du produit de $g$ et $t$

**Solution**
Allons par étapes.

— Le produit de $g$ et $t$ : $gt$.

— La somme de $a$ et $gt$ : $a + gt$.

Donc, l'équation est

$$S = a + gt$$

### 1.4.5 Exercices

**Élémentaire**

1045. Écrire en français la signification de

(a) $2a$
(b) $pq$
(c) $\sqrt{m}$
(d) $a^2$
(e) $a-3$
(f) $b+c$
(g) $2x+c$
(h) $(2a)^2$
(i) $2a^2$
(j) $a-c^2$
(k) $a+b^2$
(l) $(a+b)^2$

1046. Écrire ces phrases en expressions algébriques.

(a) La somme de $a$ et $c$.
(b) La somme de $p$, $q$ et $r$.
(c) Le produit de $a$ et $b$.
(d) La somme de $r$ et du carré de $s$.
(e) Le carré de la some de $r$ et $s$.
(f) La somme du carré de $r$ et $s$.
(g) La somme du double de $a$ et $b$.
(h) La différence entre $p$ et $q$ si $p > q$.
(i) $a$ de moins que le carré de $b$.
(j) La moitié de la somme de $a$ et $b$.
(k) La somme de $a$ et un quart de $b$.
(l) La racine carrée de la somme de $m$ et $n$.
(m) La somme de $x$ et de son inverse.
(n) Un quart de la somme de $a$ et $b$.
(o) La racine carrée de la somme des carrés de $x$ et $y$.

**Intermédiaire**

1047. Écrire sous forme de phrases en français, la signification de

(a) $L = a + b$

(b) $K = \dfrac{a+b}{2}$

(c) $M = 3d$

(d) $N = bc$

(e) $T = bc^2$

(f) $F = ma$

(g) $K = \sqrt{\dfrac{n}{t}}$

(h) $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

(i) $A = \dfrac{a+b+c}{3}$

1048. Écrire cette liste de phrases en expressions algébriques

(a) $S$ est la somme de $p$ et $r$.

(b) $D$ est la différence entre $a$ et $b$ quand $b > a$.

(c) $A$ est la moyenne de $k$ et $l$.

(d) $M$ est la somme de $a$ et de son inverse.

(e) $K$ est la somme de $t$ et du carré de $s$.

(f) $N$ est le produit de $g$ et $h$.

(g) $y$ est la somme de $x$ et du carré de $x$.

(h) $P$ est la racine carrée de la somme de $d$ et $e$.

Avancé

Pas d'exercices de niveau avancé cette semaine.

Avancé

## 1.5 Équations linéaires (2) : Évaluation d'une expression algébrique

L'**évaluation** des expressions algébriques est un outil très utilisé en sciences.
En effet, si l'on prend la formule de la mécanique donnant le temps en fonction de la vitesse moyenne et de la distance, on peut répondre facilement à la question :

*En combien de temps un vélo, roulant à* 30 km/h, *parcourt-il la distance de* 37,5 km *?*

Bien entendu, nous pouvons utiliser une règle de trois, mais dans la pratique, la personne connaît la formule toute prête à l'emploi :

$$t = \frac{d}{v}$$

où $d$ correspond à la distance en kilomètres, $v$ à la vitesse en kilomètres heures et $t$ au temps en heures. Il suffit donc de **remplacer** les valeurs données dans la formule pour trouver le temps $t$ :

$$t = \frac{37{,}5}{30} = \frac{12,5}{10} = 1{,}25\,\text{h}$$

C'est donc en 1 heure et 15 minutes que le cycliste pourra parcourir la distance en question.

Un autre exemple qui semble un peu plus compliqué, mais il n'en est rien.

*Sachant que* $\dfrac{a+b}{a-b} = 7$, *trouver la valeur de* $\dfrac{2(a+b)}{a-b} - \dfrac{a-b}{3(a+b)}$

Pour la solution, constatant qu'après le signe $-$ on a la fraction $\dfrac{a-b}{(a+b)}$, on se donne pour tâche d'en trouver sa valeur, puisque l'on a son **inverse** $\dfrac{a+b}{a-b} = 7$, alors $\dfrac{a-b}{(a+b)} = \dfrac{1}{7}$.

Forts de cette observation, nous remplaçons ce que nous connaissons dans l'expression à évaluer :

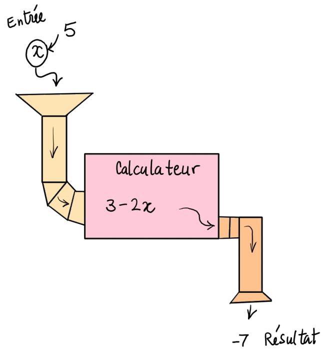
$$\begin{aligned}
\frac{2(a+b)}{a-b} - \frac{a-b}{3(a+b)} &= 2\left(\frac{a+b}{a-b}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right) = 2(7) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{2\cdot 7\cdot 21 - 1}{21} = \frac{294-1}{21} = \frac{293}{21} \\
&= 13 + \frac{20}{21}
\end{aligned}$$

Sachant que $ab = 1$ sauriez-vous trouver la valeur de l'expres
sion ci-dessous ?

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

### 1.5.1 Bases théoriques

Pour **évaluer** une expression algébrique, nous utilisons la **substitution**.
Pour ce faire, on remplace la lettre de l'expression algébrique par une valeur numérique. Ensuite on calcule. Ceci peut être fait car après substitution, nous n'avons alors que des nombres, des opérations et des séparateurs dans l'expression donnée.




On peut considérer l'expression algébrique et la substitution, comme une machine à évaluer les expressions : en entrée nous avons la substitution, une fois à l'intérieur, l'expression est évaluée avec la valeur donnée à l'inconnue, puis un résultat numérique est restitué.
Dans notre exemple $x = 5$ et l'expression $3 - 2x$. L'évaluation se fait alors comme suit

$$\begin{aligned} 3 - 2 \cdot 5 &= 3 - 10 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Si $x = -2$, alors

$$\begin{aligned} 3 - 2 \cdot (-2) &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

**Important : Attention**

Lorsque vous substituez l'inconnue par une valeur négative, vous devez placer la valeur en question entre parenthèses.
Ceci est nécessaire pour éviter de se tromper dans l'évaluation du signe résultat.
C'est une erreur commune à ne pas faire !

### 1.5.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.5.1 : Exemple 1**

Si $p = 4$, $q = -2$ et $r = 5$, calculer la valeur de

1. $3q - 2r$
2. $2pq - r$
3. $\dfrac{p - 2q + 2r}{p + r}$

---

**Solution** Comme vu plus haut, il suffit de **substituer** la valeurs donnée à la lettre correspondant dans l'expression à traiter.

1.
$$\begin{aligned} 3q - 2r &= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \\ &= -6 - 6 \\ &= -12 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2pq - r &= 2 \cdot 4 \cdot (-2) - 3 \\ &= -16 - 3 \\ &= -19 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \frac{p - 2q + 2r}{p + r} &= \frac{4 - 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3}{4 + 3} \\ &= \frac{4 + 4 + 6}{4 + 3} \\ &= \frac{14}{7} \\ &= 2 \end{aligned}$$

**Exemple 1.5.2 : Exemple 2**

Si $a = 3$, $b = -2$ et $c = -1$, évaluer

1. $b^2$
2. $ab - c^3$

**Solution**

1.
$$\begin{aligned} b^2 &= (-2)^2 \\ &= (-2) \cdot (-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} ab - c^3 &= 3 \cdot (-2) - (-1)^3 \\ &= -6 - (-1) \\ &= -6 + 1 \\ &= -5 \end{aligned}$$

**Exemple 1.5.3 : Exemple 3**

Lorsque $p = 4$, $q = -3$ et $r = 2$, que valent les expressions suivantes ?

1. $\sqrt{p - q + r}$
2. $\sqrt{p + q^2}$

**Solution**

1.
$$\begin{aligned} \sqrt{p - q + r} &= \sqrt{4 - (-3) + 2} \\ &= \sqrt{4 + 3 + 2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \sqrt{p + q^2} &= \sqrt{4 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{4 + 9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

### 1.5.3 Exercices

Élémentaire

1049. Si $p = 5$, $q = 3$ et $r = -4$ trouver la valeur de

(a) $5p$
(b) $4q$
(c) $3pq$
(d) $pqr$
(e) $3p - 2q$
(f) $5r - 4q$
(g) $4q - 2r$
(h) $2pr + 5q$

1050. Posons $w = 3$, $x = 1$ et $y = -2$, évaluer

(a) $\dfrac{y}{w}$
(b) $\dfrac{y+w}{x}$
(c) $\dfrac{3x-y}{w}$
(d) $\dfrac{5w-2x}{y-x}$
(e) $\dfrac{y-x+w}{2(y-w)}$
(f) $\dfrac{xy+w}{y-x}$
(g) $\dfrac{x-wy}{y+w-2x}$
(h) $\dfrac{y}{x} - w$

1051. Si $a = -3$, $b = -4$ et $c = -1$, évaluer

(a) $c^3$
(b) $b^3$
(c) $a^2 + b^2$
(d) $(a+b)^2$
(e) $b^3 + c^3$
(f) $(b+c)^3$
(g) $(2a)^2$
(h) $2a^2$

1052. Si $p = 4$, $q = -1$ et $r = 2$, évaluer

(a) $\sqrt{p} + q$
(b) $\sqrt{p+q}$
(c) $\sqrt{r-q}$
(d) $\sqrt{p-pq}$
(e) $\sqrt{pr-q}$
(f) $\sqrt{p^2+q^2}$
(g) $\sqrt{p+r+2q}$
(h) $\sqrt{2q-5r}$

**Intermédiaire**

1053. L'expression $y = ax^4 + bx^2 + c$ est vraie (l'égalité est vraie), lorsque $x = -5$ et $y = 3$. Trouver la valeur de $y$ lorsque $x = 5$.

**Avancé**

1054. Si l'expression $2y^2 + 3y + 7 = 2$ alors trouver la valeur de

$$4y^2 + 6y - 9$$

1055. Sachant que $x - 2y = 2$ trouver la valeur de

$$\frac{3x - y - 6}{4x - y - 8}$$

## 1.6 Équations linéaires (3) : Équations linéaires et Calculatrice

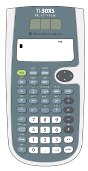
Les **équations linéaires** (voir ci-après) du type

$$5x - 3 = 12$$

peuvent être résolues en utilisant un tableau de valeurs (ou bien une calculatrice graphique...).
Pour résoudre l'équation ci-dessus, il faut trouver un nombre $x$, qui substitué dans l'expression $5x - 3$ donne 12. Le nombre qui vérifie cette égalité est la **solution** de l'équation.

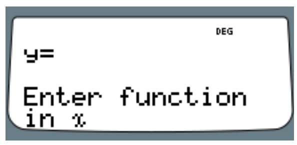
### 1.6.1 Utilisation de la calculatrice

Nous allons utiliser une des fonctions de la calculatrice ci-contre

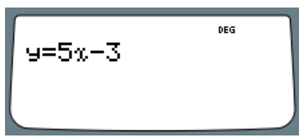


Appuyez sur la touche **clear**, puis la touche **table**

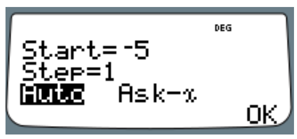

Vous aurez alors cet affichage



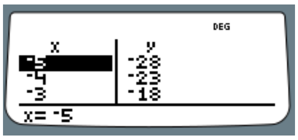

Saisir la fonction $5x - 3$



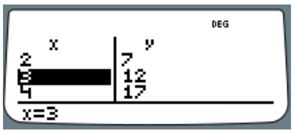

Pressez sur la touche **enter** et saisissez $-5$.
Attention utilisez le signe de la touche $(-)$ pour mettre un signe négatif devant un nombre, en début de calcul. Votre affichage doit ressembler à ceci



Pressez sur la touche **enter** quatre fois et vous aurez le tableau ci-contre où la première colonne est votre variable $x$ et la seconde colonne $y$ le résultat de la fonction $5x - 3$.



Vous devez ensuite rechercher quel $x$ correspond à la valeur $y = 12$. Pour ce faire vous appuyez sur la flèche vers le bas jusqu'à mettre la surbrillance sur $x = 3$, qui est votre solution



Lorsque les solutions cherchées sont des nombres entiers, alors le *pas* (*step* en anglais) de la calculatrice doit rester à 1. Mais si vous cherchez des nombres non entiers, alors celui-ci est à modifier. Avec un peu d'entraînement vous saurez quoi mettre à la place de *step*. En général on commence par 0,1, puis 0,01, etc.

C'est une méthode **par tâtonnement**, on dit aussi **heuristique**. Vous pouvez toujours l'employer, tant que vous avez accès à votre calculatrice. Cependant **le but de ce chapitre est d'utiliser des méthodes plus rapides et plus exactes**.

### 1.6.2 Bases théoriques

**Définition 1.6.1 : Équation du premier degré**

Une **équation linéaire** ou **équation du premier degré** (à une inconnue) est une équation qui peut être écrite sous la forme

$$ax + b = 0$$

où $x$ est l'inconnue et $a$, $b$ sont des **constantes**. Les deux constantes sont données, alors que la **variable** $x$ peut prendre différentes valeurs.

**Solutions algébriques (exactes) aux équations linéaires** Pour résoudre des équations linéaires, on peut (doit) suivre les étapes ci-dessous

**Procédé 1.6.1 : Résoudre une équation linéaire**

① Observez comment l'équation est construite et où se trouve l'inconnue.

② Opérer des **opérations inverses** des deux côtés de l'égalité, afin d'**isoler** l'inconnue d'**un côté de l'égalité**.

③ Si besoin, vérifier votre solution en substituant le nombre trouvé à l'inconnue.

**La distibutivité** Dans les situations où l'inconnue apparaît plus d'une fois dans l'équation, on **développe** l'expression algébrique, puis on **réduit** les monômes semblables pour enfin **isoler** l'inconnue et résoudre l'équation.

Pour développer une expression algébrique entre parenthèses (par exemple), on utilise la **distributivité**. Cette règle s'applique comme suit

**Propriété 1.6.1 : Distributivité simple et double**

| Simple | Double |
|---|---|
| $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ | $\begin{aligned}(a+b)\cdot(c+d) &= a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d)\\ &= a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d\end{aligned}$ |

Donc, si l'inconnue se trouve **des deux côtés de l'égalité**, nous devons

**Procédé 1.6.2**

① **développer** les expressions et puis **réduire**

② ensuite **isoler** l'inconnue d'un côté de l'égalité

③ **simplifier** et enfin **résoudre**.

### 1.6.3 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.6.1 : Exemple 1**

Résoudre les deux équations ci-après

1. $4x - 1 = 7$
2. $5 - 3x = 6$

---

**Solution**

1.

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 7 \\ 4x - 1 + 1 &= 7 + 1 \\ 4x &= 8 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{8}{4} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vérification : } 4 \cdot 2 - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \text{OK.}$$

2.

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= 6 \\ 5 - 3x - 5 &= 6 - 5 \\ -3x &= 1 \\ \frac{-3x}{-3} &= \frac{1}{-3} \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vérification : } 5 - 3 \cdot \frac{-1}{3} = 5 + 1 = 6 \quad \text{OK.}$$

**Exemple 1.6.2 : Exemple 2**

Résoudre les deux équations ci-après

1. $\frac{x}{5} - 3 = -1$
2. $\frac{1}{5}(x-3) = -1$

**Solution**

1.

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} - 3 &= -1 \\ \frac{x}{5} - 3 + 3 &= -1 + 3 \\ \frac{x}{5} &= 2 \\ \frac{x}{5} \cdot 5 &= 2 \cdot 5 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Vérification : $\frac{10}{5} - 3 = 2 - 3 = -1 \quad$ OK.

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(x-3) &= -1 \\ \frac{1}{5}(x-3) \cdot 5 &= -1 \cdot 5 \\ x - 3 &= -5 \\ x - 3 + 3 &= -5 + 3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Vérification : $\frac{1}{5} \cdot ((-2) - 3) = \frac{1}{5} \cdot (-5) = -1 \quad$ OK.

**Exemple 1.6.3 : Exemple 3**

Résoudre l'équation ci-dessous

$$3(2x-5)-2(x-1)=3$$

**Solution**

$$\begin{aligned}
3(2x-5)-2(x-1)&=3\\
3\cdot 2x-3\cdot 5-2\cdot x-2\cdot(-1)&=3\\
6x-15-2x+2&=3\\
4x-13&=3\\
4x-13{\color{red}+13}&=3+{\color{red}+13}\\
4x&=16\\
x&=4
\end{aligned}$$

Vérification : $3(2\cdot 4-5)-2(4-1)=3\cdot 3-2\cdot 3=3$ OK.

**Exemple 1.6.4 : Exemple 4**

Résoudre les équations ci-dessous

1. $3x - 4 = 2x + 6$
2. $4 - 3(2 + x) = x$

**Solution**

1.

$$\begin{aligned} 3x - 4 &= 2x + 6 \\ 3x - 4 - 2x &= 2x + 6 - 2x \\ x - 4 &= 6 \\ x - 4 + 4 &= 6 + 4 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Vérification : mg$= 3 \cdot 10 - 4 = 26$ ; md$= 2 \cdot 10 + 6 = 26$ OK.

2.

$$\begin{aligned} 4 - 3(2 + x) &= x \\ 4 - 6 - 3x &= x \\ -2 - 3x &= x \\ -2 - 3x + 3x &= x + 3x \\ -2 &= 4x \\ \frac{-2}{4} &= \frac{4x}{4} \\ -\frac{1}{2} &= x \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vérification : mg$= 4 - 3(2 + (-\frac{1}{2})) = 4 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} =$ md OK.

### 1.6.4 Exercices et problèmes

**Élémentaire**

1056. Résoudre les équations suivantes.

(a) $2(x+8)+5(x-1)=60$
(b) $2(x-3)+3(x+2)=-5$
(c) $3(x+3)-2(x+1)=0$
(d) $4(2x-3)+2(x+2)=32$
(e) $3(4x+1)-2(3x-4)=-7$
(f) $5(x+2)-2(3-2x)=-14$

1057. Résoudre les équations suivantes.

(a) $2x-3=3x+6$
(b) $3x-4=5-x$
(c) $4-5x=3x-8$
(d) $-x=2x+4$
(e) $12-7x=3x+7$
(f) $5x-9=1-3x$
(g) $4-x-2(2-x)=6+x$
(h) $5-3(1-x)=2-3x$
(i) $5-2x-(2x+1)=-6$
(j) $3(4x+2)-x=-7+x$

**Intermédiaire**

1058. Résoudre les équations ci-dessous et pour chacune commenter avec une brève phrase la réponse obtenue.

(a) $2(3x+1)-3=6x-1$
(b) $3(4x+1)=6(2x+1)$

1059. Résoudre à l'aide de la fonction "table" de votre calculatrice. Comparer avec une résolution algébrique (sans l'aide de la calculatrice).

(a) $7x+1=-20$
(b) $8-3x=-4$
(c) $\frac{x}{4}+2=1$
(d) $\frac{1}{3}(2x-1)=3$
(e) $2x-3=-6$
(f) $6-4x=8$
(g) $x-5=-3{,}5$
(h) $3x+2=41$
(i) $5-4x=70$
(j) $\frac{2x}{3}+5=2+\frac{2}{3}$

**Avancé**

1060. Dans la formule

$$\frac{3}{a}=\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$$

(a) isoler la lettre $b$

(b) puis, calculer la valeur de $b$, lorsque $a=2+\frac{1}{5}$ et $c=-3$.

## 1.7 Équations linéaires (4) : Fractions rationnelles

Le problème suivant, décrit l'utilisation des fractions avec des inconnues au dénominateur. Ces fractions sont appelées : fractions rationnelles.

### 1.7.1 Énoncé

Un père retourne un terrain en $2x$ heures. Le fils, de son côté, retourne le même terrain en $x-2$ heures. Quelle doit être la valeur de $x$ pour que, travaillant ensemble, le père et le fils retournent le même terrain en $\frac{x}{2}$ heures ?

### 1.7.2 Solution

Nous allons utiliser la notion de **vitesse**, dont les unités ne sont pas les "kilomètres par heure" standard, mais le "travail par heure".
La vitesse du père est de $\frac{1}{2x}$ [travail/heure], autrement dit *un travail en $2x$ heures*. La vitesse du fils est de $\frac{1}{x-2}$ [travail/heure], autrement dit *un travail en $x-2$ heures*.

Dans ce type de problèmes particulier, où il s'agit de vitesses d'exécution d'un même travail par plusieurs personnes, il est "naturel" d'additionner les vitesse pour obtenir une vitesse "plus grande". Autrement dit, en les ajoutant, on s'attend à travailler plus vite, car les deux personnes exécutent le même travail. On a donc une **somme de fractions rationnelles** :

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{\frac{x}{2}}$$

Il ne nous reste plus qu'à résoudre, en se souvenant que **si l'énoncé montre l'inconnue au dénominateur, dans notre cas c'est "$2x$", alors on peut l'utiliser comme un nombre que l'on sait ne pas être égal à zéro**. Autrement dit, on peut diviser et multiplier par $x$.

Alors

$$\begin{aligned}
&& \frac{1}{2x}+\frac{1}{x-2} &= \frac{1}{\frac{x}{2}} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{2x}+\frac{1}{x-2} &= \frac{2}{x} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{x-2} &= \frac{2}{x}-\frac{1}{2x} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{x-2} &= \frac{2\cdot 2}{x\cdot 2}-\frac{1}{2x}
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{x-2} &= \frac{4-1}{2x} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{x-2} &= \frac{3}{2x} \\
&\Longleftrightarrow & 2x &= 3x-6 \\
&\Longleftrightarrow & 6 &= 3x-2x \\
&\Longleftrightarrow & 6 &= x
\end{aligned}$$

Donc, $x$ est égal à 6 heures.

### 1.7.3 Bases théoriques

Lorsque vous avez des équations impliquant des inconnues aussi bien au numérateur qu'au dénominateur, on appelle cela des **équations rationnelles**.

Sur ces équations on manipule les dénominateurs comme des nombres. Cela veut dire que si on doit chercher un dénominateur commun, on va multiplier comme on le ferait avec des nombres. La différence est que l'on ne connaitra pas tout de suite le résultat du calcul, et on aura à la place une expression algébrique.

On cherche donc, **si nécessaire**, le dénominateur commun des fractions en jeu comme on le fait d'habitude.

Mais on peut aussi appliquer le principe suivant :

**Propriété 1.7.1 : Règle de proportionnalité**

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Longleftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$$

quels que soient $A, B, C$ et $D$ avec $B$ et $D$ non nuls.

**Commentaire sur l'exemple d'introduction**

La formule pour le calcul de vitesse d'exécution d'une certaine tâche est générale. Ainsi, si vous devez calculer combien mettent deux personnes à terminer le même travail connaissant leurs vitesses d'exécution de ce même travail seules, alors on utilise la formule suivante :

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

où $A$ est le temps que met la première personne, $B$ celui de la seconde et $C$ le temps qu'elle mettraient ensemble pour terminer la tâche.

### 1.7.4 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.7.1 : Exemple 1**

Résoudre $\dfrac{x}{2} = \dfrac{3+x}{5}$

**Solution**

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{x}{2} & = & \dfrac{3+x}{5} & \longleftarrow \text{règle de proportionnalité} \\ \iff & 5x & = & 2(3+x) & \\ \iff & 5x & = & 6+2x & \\ \iff & 5x-2x & = & 6 & \\ \iff & 3x & = & 6 & \\ \iff & x & = & 2 & \end{array}$$

$S = \{2\}$

**Exemple 1.7.2 : Exemple 2**

Résoudre $\dfrac{4}{x} = \dfrac{3}{4}$

**Solution**

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{4}{x} & = & \dfrac{3}{4} & \longleftarrow \text{règle de proportionnalité} \\ \iff & 4 \cdot 4 & = & 3 \cdot x & \\ \iff & 16 & = & 3x & \\ \iff & x & = & \dfrac{16}{3} & \end{array}$$

$S = \{\frac{16}{3}\}$

**Exemple 1.7.3 : Exemple 3**

Résoudre $\dfrac{2x+1}{3-x} = \dfrac{3}{4}$

**Solution**

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x+1}{3-x} &=& \frac{3}{4} \quad \longleftarrow \text{ règle de proportionnalité} \\
\Longleftrightarrow & 4(2x+1) &=& 3(3-x) \\
\Longleftrightarrow & 8x+4 &=& 9-3x \\
\Longleftrightarrow & 8x+4{\color{red}+3x} &=& 9-3x{\color{red}+3x} \\
\Longleftrightarrow & 11x+4 &=& 9 \\
\Longleftrightarrow & 11x+4{\color{red}-4} &=& 9{\color{red}-4} \\
\Longleftrightarrow & 11x &=& 5 \\
\Longleftrightarrow & x &=& \frac{5}{11}
\end{aligned}$$

$S = \{\frac{5}{11}\}$

**Exemple 1.7.4 : Exemple 4**

Résoudre $\dfrac{x}{3} - \dfrac{1-2x}{6} = -4$

**Solution**

$$\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{x}{3} - \dfrac{1-2x}{6} & = & -4 \quad \longleftarrow \text{dénominateur commun} \\
\Longleftrightarrow & \color{red}{\dfrac{2}{2}}\cdot\dfrac{x}{3} - \dfrac{\color{red}{(}1-2x\color{red}{)}}{6} & = & -4\cdot\color{red}{\dfrac{6}{6}} \\
\Longleftrightarrow & 2x-(1-2x) & = & -24 \\
\Longleftrightarrow & 2x-1+2x & = & -24 \\
\Longleftrightarrow & 4x-1 & = & -24 \\
\Longleftrightarrow & 4x-1\color{red}{+1} & = & -24\color{red}{+1} \\
\Longleftrightarrow & 4x & = & -23 \\
\Longleftrightarrow & x & = & -\dfrac{23}{4}
\end{array}$$

$S = \{-\dfrac{23}{4}\}$

### 1.7.5 Exercices

**Élémentaire**

1061. Résoudre.

(a) $\frac{x}{2} = \frac{4}{7}$

(b) $\frac{5}{8} = \frac{x}{5}$

(c) $\frac{x}{2} = \frac{x-2}{3}$

1062. Résoudre.

(a) $\frac{x+1}{3} = \frac{2x-1}{4}$

(b) $\frac{2x}{3} = \frac{5-x}{2}$

(c) $\frac{3x+2}{5} = \frac{2x-1}{2}$

1063. Résoudre.

(a) $\frac{2x-1}{3} = \frac{4-x}{6}$

(b) $\frac{4x+7}{7} = \frac{5-x}{2}$

(c) $\frac{3x+1}{6} = \frac{4x-1}{-2}$

1064. Résoudre.

(a) $\frac{5}{x} = \frac{2}{3}$

(b) $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$

(c) $\frac{4}{3} = \frac{5}{x}$

1065. Résoudre.

(a) $\frac{3}{2x} = \frac{7}{6}$

(b) $\frac{3}{2x} = \frac{7}{3}$

(c) $\frac{4}{7x} = \frac{3}{2x}$

**Intermédiaire**

1066. Résoudre.

(a) $\dfrac{2x+3}{x+1} = \dfrac{5}{3}$

(b) $\dfrac{x+1}{1-2x} = \dfrac{2}{5}$

(c) $\dfrac{2x-1}{4-3x} = -\dfrac{3}{4}$

1067. Résoudre.

(a) $\dfrac{x+3}{2x-1} = \dfrac{1}{3}$

(b) $\dfrac{4x+3}{2x-1} = 3$

(c) $\dfrac{3x-2}{x+4} = -3$

1068. Résoudre.

(a) $\dfrac{6x-1}{3-2x} = 5$

(b) $\dfrac{5x+1}{x+4} = 4$

(c) $2 + \dfrac{2x+5}{x-1} = -3$

1069. Résoudre.

(a) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{6} = 4$

(b) $\dfrac{x}{4} - 3 = \dfrac{2x}{3}$

(c) $\dfrac{x}{8} + \dfrac{x+2}{2} = -1$

1070. Résoudre.

(a) $\dfrac{x+2}{3} + \dfrac{x-3}{4} = 1$

(b) $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{5x-6}{6} = -2$

(c) $\dfrac{x}{4} = 4 - \dfrac{x+2}{3}$

**Avancé**

1071. Sachant que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

trouver la valeur de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

1072. Sachant que $x - 2y = 2$, trouver la valeur de l'expression ci-dessous

$$\frac{3x - y - 6}{4x - y - 8}$$

1073. Si on sait que $\frac{1}{x} - \frac{1}{z} = 4$, alors donner la valeur de l'expression ci-après

$$\frac{2x + 4xz - 2z}{x - z - 2xz}$$

## 1.8 Équations linéaires (5) : Mise en équation

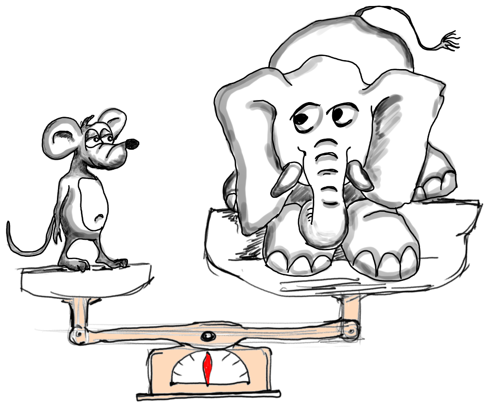
Cette semaine, nous étudierons les problèmes à texte qui peuvent être résolus avec une équation linéaire.

Tout l'étude du calcul littéral, jusqu'à la mise en équation, a comme seul objectif de résoudre des problèmes pratiques (et moins pratiques) que l'Homme se pose dans le quotidien.
On en tire souvent des formules prêtes à l'emploi, des tables avec des calculs déjà fait, où la seule chose qu'il nous reste à faire est d'y retrouver, sur l'une des colonnes des tables, la valeur qui nous intéresse, ici représentée par le $x$, et de lire le résultat dans la colonne d'à côté.

Le problème d'introduction est un classique du genre.

### 1.8.1 Énoncé

Une souris et un éléphant pèsent ensemble 1001 kilogrammes. L'éléphant pèse 1000 kilogrammes de plus que la souris. Combien de kilogrammes pèse la souris ?



### 1.8.2 Solution

Commençons par définir une inconnue. La définition de cette dernière est donnée par la question de l'énoncé, $x$ : le poids de la souris en kilogrammes.
Nous savons aussi que l'éléphant pèse 1000 kilogrammes de plus que la souris, donc son poids à lui est de $1000 + x$ kilogrammes.
Finalement, l'énoncé dit qu'ensemble ils pèsent 1001 kilogrammes. Donc nous avons une équation linéaire à résoudre :

$$\begin{aligned} & 1000 + x + x &= 1001 \\ \Longleftrightarrow & 2x &= 1 \\ \Longleftrightarrow & x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vérifions brièvement : $1000 + 0{,}5 + 0{,}5 = 1001$.
La réponse au problème est : la souris pèse 0,5 kilogrammes.

### 1.8.3 Bases théoriques

Cet exemple suit les étapes suivantes pour mettre sous forme **d'équation algébrique** l'énoncé d'un problème :

**Procédé 1.8.1 : Poser une équation**

1. Définir une inconnue, par exemple $x$, désignant la quantité à trouver ;
2. relire l'énoncé et identifier quels sont les opérations impliquées dans la situation donnée ;
3. traduire en équation le problème ainsi étudié ;
4. résoudre l'équation posée ;
5. vérifier que votre solution satisfait les conditions du problème d'origine ;
6. écrire votre réponse sous la forme d'une phrase.

**Remarque** : Il se peut que vous ayez à définir deux inconnues, par exemple $x$ et $y$. Cependant, dans tous les problèmes de cette section, vous pourrez toujours trouver l'information dans l'énoncé qui vous permet de définir la seconde en fonction de la première ou le contraire. Dans l'exemple d'introduction, on aurait pu avoir $x$ *: poids de la souris* et $y$ *: poids de l'éléphant*, or on sait que *l'éléphant pèse* 1000 *kilogrammes de plus que la souris*, d'où $x + 1000$ *: poids de l'éléphant*. Et nous n'avons plus qu'une seule inconnue.

### 1.8.4 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.8.1 : Exemple 1**

Lorsqu'un nombre est triplé et soustrait de 7, le résultat est $-11$. Trouver la valeur du nombre en question.

---

**Solution**
Notons $x$ le nombre cherché. Alors, $3x$ est le nombre triplé. Et on a que $7 - 3x$ est le résultat de la soustraction du nombre triplé de 7. Ainsi on a l'équation linéaire suivante :

$$\begin{array}{rrcl} & 7-3x & = & -11 \\ \Longleftrightarrow & 7+11 & = & 3x \\ \Longleftrightarrow & 18 & = & 3x \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{18}{3} & = & x \\ \Longleftrightarrow & 6 & = & x \end{array}$$

Vérification : $\quad 7 - 3 \cdot 6 = 7 - 18 = -11 \quad$ OK.

La réponse est : la valeur du nombres cherché est de 6.

**Exemple 1.8.2 : Exemple 2**

Quel nombre doit être ajouté aussi bien au numérateur qu'au dénominateur de la fraction $\frac{1}{3}$ pour obtenir la fraction $\frac{7}{8}$ ?

**Solution**

Notons $x$ le nombre à ajouter au numérateur et au dénominateur. Alors, si on ajout $x$ aux deux nombres de la fraction on aura $\frac{1+x}{3+x}$. Or cette fraction doit être égale à $\frac{7}{8}$, ce qui nous donne l'équation linéaire suivante :

$$\begin{array}{rrcl}
 & \frac{1+x}{3+x} & = & \frac{7}{8} \\
\Longleftrightarrow & \frac{8}{8}\cdot\frac{1+x}{3+x} & = & \frac{7}{8}\cdot\frac{x+3}{x+3} \\
\Longleftrightarrow & 8(1+x) & = & 7(x+3) \\
\Longleftrightarrow & 8+8x & = & 7x+21 \\
\Longleftrightarrow & 8+8x-7x & = & 7x+21-7x \\
\Longleftrightarrow & 8+x & = & 21 \\
\Longleftrightarrow & x & = & 13
\end{array}$$

Vérification : $\frac{1+13}{3+13} = \frac{14}{16} = \frac{2\cdot 7}{2\cdot 8} = \frac{7}{8}$ OK.

La réponse est : le nombre à ajouter est 13.

**Exemple 1.8.3 : Exemple 3**

L'âge de Sara est un tiers de l'âge de son père. Dans 13 ans, son âge sera la moitié de l'âge de son père. Quel âge a Sara aujourd'hui ?

**Solution**

Posons $x$ : âge de Sara aujourd'hui. Alors, l'âge du père est trois fois l'âge de Sara, ce qui est la même chose que de dire que *l'âge de Sara est un tiers de l'âge de son père*, donc $3x$. L'égalité s'obtient non pas dans le présent, mais dans le futur. Donc il y a une égalité dans 13 ans. Il faut alors ajouter 13 aux deux âges puis écrire l'égalité correspondante. On obtient l'équation linéaire suivante :

$$\begin{array}{rrcll}
 & 3x+13 & = & 2(x+13) & \text{donc deux fois son âge égal celui du père.} \\
\Longleftrightarrow & 3x+13 & = & 2x+26 & \\
\Longleftrightarrow & 3x-2x & = & 26-13 & \\
\Longleftrightarrow & x & = & 13 &
\end{array}$$

Vérification : $3\cdot 13+13 = 4\cdot 13 = 2(2\cdot 13) = 2(13+13)$ OK.

La réponse est : l'âge actuel de Sara est 13 ans.

### 1.8.5 Exercices

**Élémentaire**

1074. Lorsque le triple d'un certain nombre est soustrait de 15, le résultat est $-6$. Trouver la valeur de ce nombre.

1075. Cinq fois un certain nombre, moins 5 est égal à 7 de plus que trois fois le nombre en question. Quel est ce nombre ?

1076. Trois fois le résultat de la soustraction d'un certain nombre de 7 donne la même valeur que si on ajoutait 11 à ce nombre. Trouver la valeur de ce nombre.

1077. Je pense à un nombre. Si je divise par 3 la somme de 6 et de ce nombre, j'obtiens 4 de plus que le quart de ce nombre. Trouver la valeur de ce nombre.

1078. La somme de deux nombres est 15. Lorsque l'un de ces nombres est ajouté au triple de l'autre, le résultat est 27. Quels sont ces nombres ?

**Intermédiaire**

1079. Quel même nombre doit être ajouté au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{2}{5}$ pour obtenir la fraction $\frac{7}{8}$ ?
1080. Quel même nombre doit être ôté du numérateur et du dénominateur de la fraction $\frac{3}{4}$ pour obtenir la fraction $\frac{1}{3}$ ?
1081. Paolo a maintenant un quart de l'âge de son père. Dans 5 ans, son âge sera un tiers de l'âge de son père. Quel est l'âge de Paolo.
1082. Lorsque Maria est née, sa mère avait 24 ans. Aujourd'hui, l'âge de Maria est 20% l'âge de sa mère. Quel âge a Maria aujourd'hui ?
1083. Il y a cinq ans, Jean avait un sixième de l'âge de son frère. Dans trois ans, le double de son âge sera égal à l'âge de son frère. Quel est l'âge de Jean aujourd'hui ?

**Avancé**

Un seul problème dans cette partie cette semaine. Prenez le temps de bien réfléchir à la situation. C'est seulement après ce travail personnel, qui peut durer quelques jours, que vous pouvez demander de l'aide, puis la correction.

1084. Pour terminer un certain projet, Monsieur A et Monsieur B mettraient 12 jours en travaillant ensemble.

Supposons qu'ils travaillent durant 4 jours ensemble dans le projet. À ce moment il leur reste 8 jours à travailler ensemble pour terminer le projet. Cependant Monsieur B arrête de travailler et c'est Monsieur A qui continue seul le projet et le termine en 10 jours.

Sachant tout ceci, pouvez-vous me dire combien de jours chacun aurait-il mis séparément pour terminer le projet ?

## 1.9 Systèmes linéaires (1) : Le croisement des spaghettis

Les systèmes linéaires de deux équations et deux inconnues dont il est question dans cette section, représentent, géométriquement, des **droites**.
Cette image doit vous faire comprendre le but de la résolution d'un tel système. Cependant la solution d'un tel système peut être interprétée de plusieurs manières, les nombres n'étant *que* des nombres, on peut leur donner toutes sortes de significations. Ce que l'on cherche à faire, dans un premier temps, et sans entrer dans les détails géométriques, est de répondre à la question suivante **les deux droites se croisent-elles ?**

Alors, imaginez, au lieu de deux droites, deux très, très longs spaghettis. Vous les lancez en l'air, l'attraction terrestre aidant, ils vont retomber. Vous comprenez aussi qu'ils peuvent tomber de trois manières différentes :

(1) ils se croisent ;

(2) ils ne se croisent pas ;

(3) ils tombent l'un sur l'autre.

Voilà notre point de départ pour cette exploration des systèmes linéaires de deux équations et deux inconnues.
Cependant, les deux techniques de résolution des **systèmes linéaires 2x2** que nous allons étudier, permettent aussi de résoudre une très grande quantité de problèmes pas forcément liés aux droites, ni d'ailleurs à la géométrie.

### 1.9.1 Bases théoriques

Il faut avant tout décrire l'équation d'une droite, elle se présente de plusieurs manières, mais nous utiliserons que l'une des ces formes. Voici trois exemples de droites :

$$2x - y + 2 = 5 \qquad 3y - x = 4 \qquad x + y - 9 = 0$$

Elles peuvent toutes s'écrire de façon à mettre en évidence la **pente** et l'**ordonnée à l'origine**, cela donne :

$$y = 2x - 3 \qquad y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \qquad y = -x + 9$$

Lorsqu'on vous demandera d'écrire l'équation de la droite, vous écrirez "$y$ égal la pente multiplié par $x$ plus l'ordonnée à l'origine", en expression algébrique cela donne

**Définition 1.9.1 : Forme canonique de la droite**

La **forme canonique** d'écrire l'équation d'une droite est

$$y = a \cdot x + b$$

où $\boldsymbol{a}$ est la **pente** et $\boldsymbol{b}$ est l'**ordonnée à l'origine** (que l'on peut abréger par O.O.).

On écrira souvent sans le symbole désignant la multiplication "$\cdot$", cela donne

$$y = ax + b$$

#### Résolution par substitution

L'idée de la résolution par substitution, est d'**isoler** l'une des deux inconnues dans l'une des deux équations, puis de remplacer l'expression trouvée dans l'autre équation. Noter que l'accolade "{" fait partie intégrante de la résolution d'un tel système. Par ailleurs le symbole équivalent "$\Longleftrightarrow$" doit aussi être utilisé.
Ce dernier marque le fait que l'équation plus simple que nous obtenons à chaque étape est **équivalente** à la précédente en ce sens que toutes les deux ont le même ensemble solution.
La notation introduite dans les exemples ci-après est à suivre, car elle fait partie de la juste syntaxe pour la résolution des systèmes 2x2 que nous étudions.

### 1.9.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.9.1 : Exemple 1**

Résoudre le système suivant $\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix} \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$

**Solution**
Nous commençons par constater que la variable y est déjà isolée dans la première équation. On va donc la remplacer dans la seconde. Au passage on profite pour identifier des différentes équations du système que l'on trouve.

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ①y \to ② : 2x - 1 &= x + 3 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \\ x \to ② : \quad y &= (4) + 3 \\ \Leftrightarrow y &= 7 \end{aligned}$$

$$S = \{(4; 7)\}$$

**Exemple 1.9.2 : Exemple 2**

Résoudre l'équation suivante $\begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} y - 5x = -1 \\ y = x + 2 \end{cases}$

---

**Solution**

Dans ce cas, on voit que la variable $y$ est isolée dans la seconde équation, alors on substitue dans la première :

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} y - 5x = -1 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ②y \to ① : x + 2 - 5x &= -1 \\ \Leftrightarrow -4x &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{4} \\ x \to ② : \quad y &= \left(\frac{3}{4}\right) + 2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$S = \left\{\left(\frac{3}{4}; \frac{11}{4}\right)\right\}$$

### 1.9.3 Exercices

Élémentaire

1085. Résoudre par substitution le système suivant $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} y = x + 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

1086. Résoudre par substitution le système suivant $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} -2y + x = 5 \\ x = 7 + 3y \end{cases}$

1087. Résoudre par substitution le système suivant $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} x = 8 - 2y \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

1088. Résoudre par substitution le système suivant $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} y = 4 + x \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$

1089. Résoudre par substitution le système suivant $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} x = -10 - 2y \\ 3y - 2x = -22 \end{cases}$

1090. Résoudre par substitution le système suivant $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} x = -1 + 2y \\ x = 9 - 2y \end{cases}$

**Intermédiaire**

1091. Résoudre par substitution le système suivant ① ② $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = 7 - 2x \end{cases}$

1092. Résoudre par substitution le système suivant ① ② $\begin{cases} x = -1 - 2y \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$

1093. Résoudre par substitution le système suivant ① ② $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

1094. Résoudre par substitution le système suivant ① ② $\begin{cases} x = 3y - 9 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$

1095. Résoudre par substitution le système suivant ① ② $\begin{cases} y = 5x \\ 7x - 2y = 3 \end{cases}$

1096. Résoudre par substitution le système suivant ① ② $\begin{cases} x = -2 - 3y \\ 3x - 2y = -17 \end{cases}$

**Avancé**

1097. Résoudre le système suivant
$$\begin{cases} ① & \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} = -\dfrac{4}{15} \\ ② & 5x - \dfrac{y}{2} = \dfrac{13}{2} \end{cases}$$

1098. Résoudre le système suivant
$$\begin{cases} ① & \dfrac{x-3}{5} + \dfrac{y+2}{3} = -\dfrac{1}{5} \\ ② & 3x - \dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

## 1.10 Systèmes linéaires (2) : La méthode par addition

Dans certains cas, il est fastidieux de résoudre un système 2x2 par la méthode de substitution. En effet, il arrive que la forme du système soit

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$$

auquel cas en **additionnant** les deux équations on élimine les $x$. Ensuite, il suffit de résoudre l'équation "facile" du premier degré à une seule inconnue :

$$2y = 4 \iff y = 2$$

La méthode présentée dans cette section, demande encore de faire une substitution pour terminer de résoudre le système.

### 1.10.1 Bases théoriques

L'idée de base est toujours la même : transformer le système linéaire de deux équations à deux inconnues.

La première étape est d'éliminer une inconnue. Cette fois en **additionnant** les deux équations en "colonne".

Si nécessaire, il faut modifier les équations en **multipliant** par un nombre adéquat.

La base théorique de cette méthode est la suivante : si l'on sait que

$$A = B \qquad \text{et que} \qquad C = D \qquad \text{alors}$$

$$\begin{array}{lrcl} & A & = & B \\ + & C & = & D \\ \hline & A + C & = & B + D \end{array}$$

Autrement dit, comme on sait que $C$ est égal à $D$, ajouter $D$ à $B$, c'est comme ajouter $C$, puisque $C = D$, et la somme $A + C$ est égale à la somme $B + D$, puisque, "de base", $A = B$.

### 1.10.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.10.1 : Exemple 1**

Résoudre par addition le système suivant $\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix} \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

**Solution**
On observe que les coefficients de $y$ sont les même mais opposés. Nous allons donc faire une addition de membre de gauche et du membre de droite des deux équations simultanément, ce qui aura pour effet d'**éliminer** l'inconnue $y$ du système. Nous aurons alors une seule équation linéaire à une inconnue, que l'on sait résoudre.

$$\begin{array}{rrcl} & 3x+2y & = & 5 \\ + & x-2y & = & 3 \\ \hline & 4x & = & 8 \\ & \Longleftrightarrow x & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x \to ②: \quad & 2-2y=3 \\ \Leftrightarrow\ & 2-3=2y \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-1}{2}=y \\ \Leftrightarrow\ & y=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S=\left\{\left(2;-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

**Exemple 1.10.2 : Exemple 2**

Résoudre par addition le système suivant $\begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

---

**Solution**

Il arrive que les facteurs devant les inconnues $x$ et $y$ ne soient pas les même sur les deux équations. Ici dans ① le facteur de $x$ est 3 et dans ② il vaut 2. Pour $y$ dans ① c'est 2 et dans ② il vaut $-3$.

Dans ces cas on est obligé, si l'on veut utiliser la méthode par addition, de multiplier l'une des deux équations afin de "créer" des facteurs opposés pour la même inconnue. Ici le candidat idéal (plus simple) est $y$. Pour l'éliminer en additionnant, on peut multiplier par 3 l'équation ① et par 2 l'équation ② :

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}\begin{cases} 3x+2y=8 & |\cdot 3 \\ 2x-3y=1 & |\cdot 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c} ③ \\ ④ \end{array}\begin{cases} 9x+6y=24 \\ 4x-6y=2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcl} ③ & 9x+6y & = & 24 \\ ④+ & 4x-6y & = & 2 \\ \hline & 13x & = & 26 \\ & \Longleftrightarrow x & = & 2 \end{array}$$

### 1.10.3 Exercices

Élémentaire

1099. Résoudre par addition le système suivant ① ② $\begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$

1100. Résoudre par addition le système suivant ① ② $\begin{cases} 2x + 5y = -4 \\ -2x - 6y = 12 \end{cases}$

1101. Résoudre par addition le système suivant ① ② $\begin{cases} 4x - 6y = 9 \\ x + 6y = -2 \end{cases}$

1102. Résoudre par addition le système suivant ① ② $\begin{cases} 12x + 15y = 33 \\ -18x - 15y = -63 \end{cases}$

1103. Résoudre par addition le système suivant ① ② $\begin{cases} 5x + 6y = 12 \\ -5x + 2y = -8 \end{cases}$

1104. Résoudre par addition le système suivant ① ② $\begin{cases} -7x + y = -5 \\ 7x - 3y = -11 \end{cases}$

**Intermédiaire**

1105. Résoudre par addition le système suivant $\begin{cases} 4x - 3y = 6 & ① \\ -2x + 5y = 4 & ② \end{cases}$

1106. Résoudre par addition le système suivant $\begin{cases} 2x - y = 9 & ① \\ x + 4y = 36 & ② \end{cases}$

1107. Résoudre par addition le système suivant $\begin{cases} 3x + 4y = 6 & ① \\ x - 3y = -11 & ② \end{cases}$

1108. Résoudre par addition le système suivant $\begin{cases} 2x + 3y = 7 & ① \\ 3x - 2y = 4 & ② \end{cases}$

1109. Résoudre par addition le système suivant $\begin{cases} 4x - 3y = 6 & ① \\ 6x + 7y = 32 & ② \end{cases}$

1110. Résoudre par addition le système suivant $\begin{cases} 7x - 3y = 29 & ① \\ 3x + 4y + 14 = 0 & ② \end{cases}$

**Avancé**

1111. Résoudre les deux systèmes suivants par la méthode d'addition. Commenter vos résultats.

(a) $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} 3x + y = 8 \\ 6x + 2y = 16 \end{cases}$

(b) $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 4x + 10y = -1 \end{cases}$

## 1.11 Systèmes linéaires (3) : Compter les roues

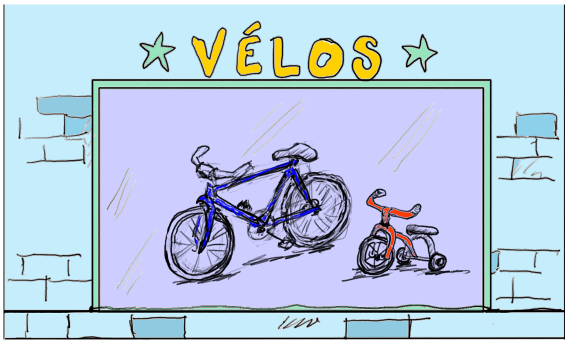
Comme déjà évoqué, les techniques de résolution des systèmes linaires 2x2 peuvent servir pour résoudre des problèmes qui n'ont rien à voir avec les droites.

Beaucoup de problèmes "pratiques" sont résolubles plus facilement en posant un système de deux équations et deux inconnues.

En voici un exemple.

### 1.11.1 Énoncé

Derrière la vitrine d'un magasin de vélos, sont exposés des bicyclettes et des tricycles. Sachant qu'en tout il y a 7 véhicules et 16 roues, pourriez-vous dire combien de bicyclettes et de tricycles y a-t-il derrière la vitrine du magasin ?




### 1.11.2 Solution

Bien que l'on peut résoudre par tâtonnement, nous allons ici utiliser un système linéaire de deux équations et deux inconnues.

Posons $x$ le nombre de bicyclettes (vélos) et $y$ le nombre de tricycles.

On sait que $x + y = 7$, car il y a en tout 7 véhicules et que derrière la vitrine il n'y a que des bicyclettes et des tricycles.

Ensuite, une bicyclette a 2 roues, donc $x$ bicyclettes auront $2x$ roues en tout. De même, un tricycle (son nom indique le nombre de roues "-tri", trois) a 3 roues, donc $y$ tricycles auront $3y$ roues.

D'où le système qui traduit **toutes les informations** du problème :

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}\begin{cases} x + y = 7 & \big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} ③ \\ ② \end{array}\begin{cases} -2x - 2y &= -14 \\ 2x + 3y &= 16 \end{cases}$$

$$\oplus \qquad y = 2$$

$$y \to ① : x + (2) = 7$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

Donc, il y a 5 bicyclettes et 2 tricycles derrière la vitrine du magasin.

### 1.11.3 Bases théoriques

Il est conseillé de suivre les étapes suivantes lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes à texte. Pour ce qui est de la résolution du système linéaire lui-même, les deux techniques vues les semaines précédentes peuvent être appliquées. Bien évidemment, vous utiliserez celle qui vous semble la plus appropriée.

**Procédé 1.11.1 : Poser et résoudre un système**

Étape 1 : Lire attentivement l'énoncé et définir les inconnues, par exemple $x$ et $y$.
Étape 2 : Écrire deux équations tirées des informations contenues dans l'énoncé.
Étape 3 : Résoudre le système par la méthode de votre choix.
Étape 4 : Vérifier votre résultat : est-il cohérent ?
Étape 5 : Donner votre réponse par une phrase en français.

### 1.11.4 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 1.11.1 : Exemple 1**

Deux nombres ont une différence de 7 et une moyenne de 4. Trouver ces deux nombres.

**Solution** Posons $x$ le 1er nombre cherché et $y$ le second. Alors

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}\left\{\begin{array}{l} x-y=7 \\ \dfrac{x+y}{2}=4 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{c} (1) \\ (3) \end{array}\left\{\begin{array}{l} x-y=7 \\ x+y=8 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cccc} (1) & & x-y & = & 7 \\ (3) & + & x+y & = & 8 \\ \hline & & 2x & = & 15 \\ & \Longleftrightarrow & x & = & \dfrac{15}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x \to (1) : \frac{15}{2} - y &= 7 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{15-14}{2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Réponse :** Les deux nombres sont $\dfrac{15}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

**Exemple 1.11.2 : Exemple 2**

En achetant des fruits au marché, Jean remarque que 8 pêches et 4 pruneaux reviennent à 4,60 francs, alors que 6 pêches et 7 pruneaux coûtent 4,85 francs. Trouver le prix à l'unité des pêches et des pruneaux.

**Solution**
Posons $x$ le prix en franc d'une pêche et $y$, en franc aussi, celui d'un pruneau.
Alors, en traduisant l'énoncé on a le système linéaire suivant, que l'on peut résoudre par addition :

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}\begin{cases} 8x + 4y = 4{,}60 & | \cdot 7 \\ 6x + 7y = 4{,}85 & | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{l} ③ \\ ④ \end{array}\begin{cases} 56x + 28y = 32{,}20 \\ -24x - 28y = -19{,}40 \end{cases}$$

$\oplus$ ______________________________

$$32x = 12{,}80$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \frac{12{,}80}{32}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = 0{,}40$$

$$x \to ① : 8 \cdot (0{,}40) + 4y = 4{,}60$$

$$\Leftrightarrow 4y = 4{,}60 - 3{,}20$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1{,}40}{4}$$

$$\Leftrightarrow y = 0{,}35$$

**Réponse :** Les pêches coûtent 0,40 francs et les pruneaux 0,35 francs.

### 1.11.5 Exercices

**Élémentaire**

1112. La somme de deux nombres vaut 47 et leur différence vaut 14. Trouver de quels nombres il s'agit.

1113. Trouver deux nombres dont la différence est 3 et la moyenne est 5.

1114. Le plus grand de deux nombres est quatre fois plus grand que le plus petit. Sachant que leur somme est 85, trouver de quels nombres il s'agit.

1115. Dans une papeterie européenne, cinq crayons et six stylos coûtent un total de 4,64 euros, et sept crayon et trois stylos coûtent 3,58 euros. Trouver le prix à l'unité des crayons et des stylos.

1116. Marion a une boîte qui ne contient que des pièces de 20 et 5 centimes de franc. Dans la boîte, il y a un total de 31 pièces pour un montant total de 3,50 francs. Combien de pièces de chaque sorte Marion a-t-elle ?

**Intermédiaire**

1117. J'ai dans mon porte-monnaie, des pièces de 50 centimes de franc et des pièces de 1 franc. Au total je compte 43 pièces pour un montant total de 35 francs. Combien de pièces de chaque sorte y a-t-il dans mon porte-monnaie ?
1118. Nikita et Anouk ont ensemble un total de 29,40 francs. La somme d'argent de Nikita est les trois quarts de l'argent total d'Anouk. Combien d'argent a chacune d'elles ?
1119. Le beurre est vendu par paquets de 250 grammes ou de 400 grammes. Un hôtel commande 19,6 kilogrammes de beurre et reçoit 58 paquets. Combien de paquets de chaque sorte l'hôtel reçoit-il ?
1120. Un rectangle a un périmètre de 32 centimètres. Si 3 centimètres sont enlevés du côté le plus long et ajoutés au côté plus petit, le rectangle devient un carré. Trouver les dimensions d'origine du rectangle.
1121. Si les côtés d'un triangle équilatéral ont pour longueurs $b+2$, $a+4$ et $4a-b$ centimètres, dire quel est donc la valeur des lettres $a$ et $b$.

**Avancé**

1122. Un bateau à moteur navigue à 12 kilomètres à l'heure contre le courant d'un fleuve et à 18 kilomètres à l'heure dans le sens du courant du fleuve. Trouver la vitesse du courant du fleuve et celle du bateau à moteur en eau calme.

Objectifs

(A) utiliser les opérations de base avec différents ensembles de nombres

(B) utiliser les notions de proportionnalité et notamment

(1) reconnaître des suites ou des grandeurs proportionnelles, inversement proportionnelles ou non proportionnelles ;

(2) rechercher le 4ème terme dans un problème de proportionnalité ou de proportionnalité inverse ;

(3) savoir utiliser et interpréter l'écriture en pour cent, %.

## 2.1 Proportionnalité (1) : Les mélanges

Les mélanges en tout genre sont courants dans le domaine de la vente au détail, mais aussi dans celui de la chimie ou encore de la pharmacologie, pour ne citer que ceux-là. Un exemple classique de mélange est celui du café.

> En mélangeant 12 kg de café à 6 fr. /kg et 18 kg d'un autre café à 10 fr. /kg on obtient un café à 8,4 fr. /kg.
> Indiquer deux autres quantités de ces cafés qui donneraient aussi un mélange à 8,4 fr. /kg.

Pour résoudre ce problème, on doit avoir une idée de comment arrive-t-on à calculer le prix du mélange de cafés. On procède comme suit.
Deux multiplications pour avoir le prix total des deux quantités mélangées :

$$\begin{array}{rcl} 12\ [\text{kg}] \cdot 6\ [\text{fr.}/\text{kg}] & = & 72\ [\text{fr.}] \\ 18\ [\text{kg}] \cdot 10\ [\text{fr.}/\text{kg}] & = & \underline{180\ [\text{fr.}]} \\ \text{Total} & : & 252\ [\text{fr}] \end{array}$$

Ensuite on divise 252 par 30 pour avoir le prix par kg :

$$\frac{252\ [\text{fr.}]}{30\ [\text{kg}]} = 8{,}4\ [\text{fr.}/\text{kg}]$$

Si on remplace par $x$ la quantité du premier type de café et par $y$ la seconde, on a

$$\begin{array}{rcl} x\ [\text{kg}] \cdot 6\ [\text{fr.}/\text{kg}] & = & 6x\ [\text{fr.}] \\ y\ [\text{kg}] \cdot 10\ [\text{fr.}/\text{kg}] & = & \underline{10y\ [\text{fr.}]\qquad} \\ \text{Total} & : & (6x + 10y)\ [\text{fr}] \end{array}$$

Il vient la division :

$$\frac{(6x + 10y)\ [\text{fr.}]}{(x + y)\ [\text{kg}]} = 8{,}4\ [\text{fr.}/\text{kg}]$$

Notre tâche maintenant est d'isoler soit $x$ soit $y$ et de donner des valeurs à la quantité dépendante et de répondre à la question :

$$\begin{array}{lrcll} & \dfrac{6x + 10y}{x + y} & = & 8{,}4 & \\ \Longleftrightarrow & 6x + 10y & = & 8{,}4 \cdot (x + y) & \\ \Longleftrightarrow & 6x + 10y & = & 8{,}4x + 8{,}4y & \longleftarrow \text{isolons } y \\ \Longleftrightarrow & (10 - 8{,}4)y & = & (8{,}4 - 6)x & \\ \Longleftrightarrow & 1{,}6y & = & 2{,}4x & \\ \Longleftrightarrow & y & = & \dfrac{2{,}4x}{1{,}6} = \dfrac{3}{2}x & \\ \Longleftrightarrow & y & = & \dfrac{3}{2}x & \end{array}$$

Il ne nous reste qu'à choisir une quantité pour $x$ et on aura automatiquement la quantité pour $y$. Par exemple si on choisit $x = 12$ alors $y = \dfrac{3 \cdot 12}{2} = 18$. Ou encore, si $x = 38$ alors $y = 57$ ; si $x = 12$ alors $y = 18$.

**Réponse :** On peut avoir 38 kg et 57 kg pour un premier mélange ou encore 12 kg et 18 kg pour un deuxième mélange, qui donnent tous deux un mélange de café à 8,4 fr./kg.

### 2.1.1 Bases théoriques

Nous allons définir ce qu'est un **rapport** et une **proportion**.

**Définition 2.1.1 : Rapport**

Si $a$ et $b$ sont deux nombres, alors le **rapport** du nombre $a$ au nombre $b$ est le quotient
$$\frac{a}{b}$$

On a que
$$\frac{12}{7}$$
est le rapport de 12 à 7, comme
$$\frac{0{,}5}{3}$$
est le rapport de 0,5 à 3.

**Définition 2.1.2 : Taux**

Le rapport de deux grandeurs de même nature est le quotient de leurs mesures.
Ce rapport s'exprime **sans** unité ; c'est un **nombre**.
Lorsque le quotient se rapporte à deux grandeurs d'espèces différentes, on parle de **taux**, car un rapport est une grandeur sans unités.

On observe que si un nombre est la mesure d'une certaine grandeur, il s'exprime dans une certaine unité. Comme nous faisons le rapport de deux nombres de même nature, les **unités n'ont plus de sens**. En physique, par exemple, on simplifie volontiers les "unités" dans une écriture fractionnaire, un rapport ; le rapport d'une distance exprimée en kilomètres par une vitesse exprimée en kilomètres par heure donnerait

$$\frac{[\mathrm{Km}]}{\frac{[\mathrm{Km}]}{[\mathrm{h}]}} = [\mathrm{Km}] \cdot \frac{[\mathrm{h}]}{[\mathrm{Km}]} = [\mathrm{h}]$$

Lorsque ce n'est pas le cas, les unités restent et donnent les unités de la formule issue de ce rapport de grandeurs. L'exemple typique est la vitesse

$$\frac{\textit{distance}\ [\mathrm{Km}]}{\textit{temps}\ [\mathrm{h}]}$$

qui donne les unités de la vitesse.

**Définition 2.1.3 : Proportion**

Une **proportion** est une **égalité entre deux rapports**. Elle prend la forme suivante
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont des nombres, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Remarquer que l'égalité de deux *taux* de mêmes unités au numérateur et de mêmes autres unités au dénominateur, peut être facilement écrit sous forme d'une égalité de deux *rapports* (comment peut-on le faire ?).

La proportion est la base qui permet de résoudre un grand nombre de problèmes de proportionnalité. Nous le verrons par la suite. Pour ce faire on a la propriété fondamentale suivante :

**Procédé 2.1.1**

Si nous avons l'égalité de deux rapport

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

alors nous avons aussi l'**égalité des produits croisés**

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Cette propriété, permet de résoudre certaines équations (ainsi que les problèmes de proportionnalité directe, voir la suite) :
*Déterminer (trouver) quelle valeur faut-il donner à $x$ pour que l'égalité soit vraie*

$$\frac{18}{6} = \frac{3}{x}$$

En appliquant la propriété on a

$$18 \cdot x = 6 \cdot 3 \iff x = \frac{6 \cdot 3}{18} = \frac{18}{18} = 1$$

### 2.1.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 2.1.1 : Exemple 1**

Quel est le rapport de $\frac{3}{7}$ à $\frac{1}{2}$ ?

**Solution**
Il suffit d'appliquer la définition de rapport, en posant que la première fraction est le nombre $a$ et la seconde fraction le nombre $b$. En d'autres termes, il suffit d'écrire, puis calculer, la division de $a$ par $b$ :

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{7} \cdot 2 = \frac{6}{7}$$

**Rép. :** le rapport est $\frac{6}{7}$.

**Exemple 2.1.2 : Exemple 2**

Déterminer en pour cent le rapport de 18 min à 0,5 h.

**Solution**
On calcule le rapport, après avoir convertit les heures en minutes :

$$\frac{18\,\text{min}}{30\,\text{min}} = 0{,}6$$

puis on multiplie par 100 pour obtenir un pourcentage :

$$0{,}6 \cdot \frac{100}{100} = 0{,}6 \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} = 60 \cdot \frac{1}{100} = 60\%$$

et donc le symbole $\% = \frac{1}{100}$.
**Rép. :** Le rapport est de 60%.

### 2.1.3 Exercices

**Élémentaire**

2001. Exprimer les rapports suivants par *(i)* un nombre entier ou une fraction, *(ii)* un pour cent, *(iii)* un pour mille :

(a) le rapport de 56 à 7 ;

(b) le rapport de 65 à 26 ;

(c) le rapport de 0,6 à 1,25 ;

(d) le rapport de 3,5 dm à 7 dm ;

(e) le rapport de 3 $m^2$ à 15000 $cm^2$ ;

(f) le rapport de 0,5 $dm^3$ à 15 dl ;

2002. Un commerçant a acheté un produit au prix de 80 fr. les 100 kg. Il l'a revendu 1,20 fr. le kg. Exprimer son bénéfice en % du prix d'achat.

2003. Dans une liquidation, on vend 360 fr. un appareil qui coûtait 600 fr. Calculer le pourcentage de remise sur cet appareil.

2004. En raison de la chaleur, un rail de 80 m s'est dilaté de 36 cm. Calculer en ‰ le rapport de la longueur de la dilatation à la longueur du rail.

2005. Dans chaque cas, calculer la valeur de $x$ pour que la proportion soit vérifiée :

(a) $\dfrac{20}{x} = \dfrac{8}{5}$

(b) $\dfrac{2}{x} = \dfrac{x}{32}$

(c) $\dfrac{4-x}{x} = \dfrac{8}{3}$

(d) $\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{4x-1}{2x+3}$

**Intermédiaire**

2006. Un rectangle mesure 12 cm sur 9 cm. Calculer le rapport de la longueur de sa diagonale à la longueur de chacun de ses côtés.

2007. Soit un carré de côté $c$.

(a) Exprimer par un nombre exact le rapport de la longueur de la diagonale du carré à la longueur de son côté.

(b) Combien mesure la diagonale d'un carré de 10 cm de côté ?

2008. Soit un triangle équilatéral de côté $c$.

(a) Exprimer par un nombre exact le rapport de la longueur de sa hauteur à la longueur de son côté.

(b) Combien mesure la hauteur d'un triangle équilatéral de 20 cm de côté ?

2009. Calculer deux nombres dont

(a) le rapport est 0,5 et la somme 12 ;

(b) le rapport est 0,2 et la différence 20 ;

(c) le rapport est 3 et la somme 2 ;

(d) le rapport est 3,5 et la différence 8 ;

(e) le rapport est 50% et la somme 10,5.

2010. Le rapport des âges de deux personnes est de $\frac{4}{9}$. La plus jeune a 24 ans. Quel est l'âge de l'aînée ?

**Avancé**

2011. Au sujet des nombres $a$, $b$ et $c$ on connaît les rapport

$$\frac{a}{b} = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{c} = 0{,}25$$

Trouver les rapports

(a) $\frac{b}{a}$

(b) $\frac{c}{a}$

(c) $\frac{b}{c}$

(d) $\frac{c}{b}$

2012. On sait que 850 kg d'eau salée contiennent 8% de sel. On ajoute de l'eau pure. La proportion de sel est alors de 2%. Combien de litres d'eau a-t-on ajoutés ?

## 2.2 Proportionnalité (2) : Proportionnalités composées I

Huit poules pondent huit oeufs en huit jours.
Combien d'oeufs pondent quatre poules en quatre jours ?

Fixons le nombre de jours, et cherchons le nombre d'oeufs correspondant à l'une des informations du but : les quatre poules :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $8p$ | $8o$ | $8j$ | ← Réf. |
| $4p$ | $?\ o$ | $4j$ | ← But |

Puisque la grandeur "poules" et la grandeur "oeufs" sont **proportionnelles**, on peut utiliser la règle de trois

$$x = \frac{4p \cdot 8o}{8p} = 4o$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $8p$ | $8o$ | $8j$ | ← Réf. |
| $4p$ | $xo$ | $8j$ | |

et on a le nombre d'oeuf correspondant à quatre poules.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $8p$ | $8o$ | $8j$ | |
| $4p$ | $4o$ | $8j$ | ← Réf. |

Maintenant fixons le nombre de "poules" (puisque c'est une des valeurs du but) et cherchons le nombre d'oeufs pour le nombre de "jours" de la question :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4p$ | $4o$ | $8j$ | ← Réf. |
| $4p$ | $xo$ | $4j$ | |

Puisque la grandeur "oeufs" et la grandeur "jours" sont **proportionnelles**, on peut utiliser la règle de trois

$$x = \frac{4o \cdot 4j}{8j} = 2o$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4p$ | $4o$ | $8j$ | |
| $4p$ | $2o$ | $4j$ | ← But |

et on a le nombre d'oeuf final correspondant à la question posée :

**Rép. :** 4 poules pondent 2 oeufs en 4 jours.

### 2.2.1 Bases théoriques

Les **grandeurs** sont véhiculées par des nombres. Donc, pour identifier ces grandeurs dans les problèmes et exercices proposés, il faut chercher quelles sont les données qui peuvent être quantifiées, c'est-à-dire, exprimées au moyen de nombres.
Souvent, il suffit de chercher les unités (centimètres, litres, kilogrammes, vitesses, aires, etc.) pour identifier les grandeurs. Mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, une tâche à accomplir peut être une grandeur faisant partie d'une situation donnée. Or, il s'agit là d'une grandeur exprimant la *cardinalité*, autrement dit le nombre d'objets de cette grandeur et n'a donc pas d'unités.

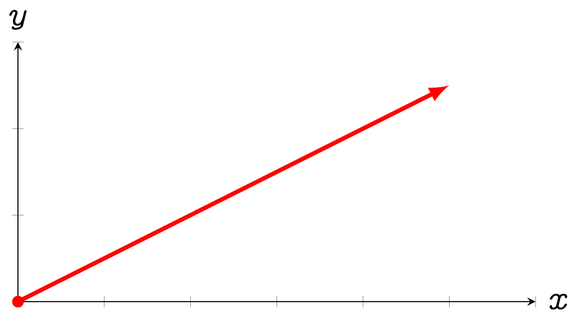
#### Grandeurs directement proportionnelles

**Définition 2.2.1 : Proportionnalité directe**

Soient $y$ et $x$ deux nombres réels représentant deux grandeurs.
Alors on dit que $y$ est **directement proportionnelle** à $x$ s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que

$$y = k \cdot x$$

La représentation *graphique* de cette relation de proportionnalité est une *droite* passant par l'origine :




Dans ce cas, la constante $k$ est appelée, **facteur de proportionnalité**. Il se retrouve dans le tableau de proportionnalité qui est lié à ce graphique, et bien sûr, aux grandeurs qui sont en relation de proportionnalité directe :

$0{,}5 \cdot x$

| $x$ | $y = \boldsymbol{k} \cdot x$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0,5 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1,5 |
| 4 | 2 |
| 5 | 2,5 |

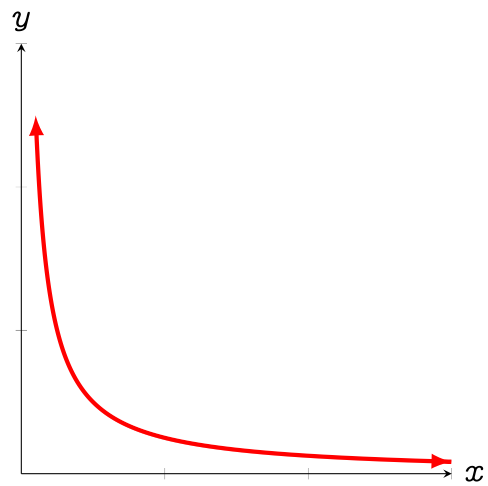
### Grandeurs inversement proportionnelles

**Définition 2.2.2 : Proportionnalité inverse**

Soient $y$ et $x$ deux nombres réels représentant deux grandeurs.
Alors on dit que $y$ est **inversement proportionnelle** à $x$ s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que

$$y = \frac{k}{x}$$

La représentation *graphique* de cette relation de proportionnalité est une *hyperbole* :




Dans ce cas, la constante $k$ est appelée, **facteur de proportionnalité**.
Comme dans le cas précédent, cette valeur est une constante. Dans le tableau ci-après elle représente le produit de $x$ par $y$, $\boldsymbol{k} = x \cdot y$ :

$\cdot 1/x$

| $x$ | $y = \boldsymbol{k}/x$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 0,5 |
| 3 | 0,$\bar{3}$ |
| 4 | 0,25 |
| 5 | 0,2 |

### 2.2.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 2.2.1 : Exemple 1**

Une voiture consomme 5 litres d'essence pour parcourir 80 km. Combien consommera-t-elle pour parcourir 100 km ? Quelle distance peut-elle parcourir avec 24 $\ell$ d'essence ?

**Solution**
On se livre à une petite analyse de la *relation de proportionnalité* qu'il y a entre les deux grandeurs en jeu.
D'un côté on a la quantité d'essence et de l'autre le nombre de kilomètres parcourus. Si on augmente la quantité d'essence, la voiture parcourra plus de kilomètres. Inversement, si on a moins d'essence la voiture pourra rouler moins de kilomètres. C'est donc des **grandeurs directement proportionnelles** (on dira aussi **proportionnelles** en omettant le mot "directement").
Alors, posons $L$ : la quantité de litres d'essence recherchée. Et comme nous avons une proportionnalité directe, **le quotient des deux grandeurs en jeu est constant**. Autrement dit le **taux**

$$\frac{L\ [\ell]}{100\ [\text{km}]}$$

doit être égal à

$$\frac{5\ [\ell]}{80\ [\text{km}]}$$

on a donc une égalité qui peut être écrite sous forme de **proportion**, c'est-à-dire une égalité de deux rapports.
Cependant, nous n'en avons pas besoin ici, il nous suffit de savoir qu'on peut l'écrire. Comme $L$ est l'inconnue, une fois cette égalité de deux taux écrite, on peut résoudre pour $L$ :

$$\begin{aligned} \frac{L}{100} &= \frac{5}{80} \\ \iff \quad L &= 100 \cdot \frac{5}{80} \\ \iff \quad L &= \frac{50}{8} = \frac{25}{4} = \frac{24+1}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4} = 6{,}25\,\ell \end{aligned}$$

**Exemple 2.2.2 : Exemple 2**

Cinq ouvriers creusent une tranchée en 15 heures. Combien de temps deux de ces ouvriers auraient-ils mis pour effectuer le même travail ?

**Solution**
On fait une petite analyse des *relations de proportionnalité* des grandeurs en jeu.
On peut déjà dire que souvent, lorsque le temps est une grandeur figurant dans un problème, il s'agit de proportionnalité inverse. Mais c'est seulement une analyse des grandeurs elles-mêmes qui pourra nous le confirmer.
D'un côté nous avons une certaine quantité d'ouvriers et de l'autre un certain temps pour effectuer un travail. Si nous augmentons le nombre d'ouvriers, le

même travail peut être fait plus rapidement, donc en moins de temps. À l'inverse, si nous diminuons le nombre d'ouvriers, alors il faudra plus de temps pour terminer le même travail. C'est donc un **proportionnalité inverse** qui lie les deux grandeurs de ce problème.
Notons $T$ : le nombre d'heures recherché. Et puisqu'il s'agit de proportionnalité inverse, nous savons que le produit des grandeurs est une constante, autrement dit que le produit

$$5 \text{ [ouvriers]} \cdot 15 \text{ [h]}$$

doit être égal à

$$2 \text{ [ouvriers]} \cdot T \text{ [h]}$$

on peut alors écrire l'égalité et résoudre pour $T$ :

$$\begin{aligned} 5 \cdot 15 &= 2 \cdot T \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{5 \cdot 15}{2} &= T \\ \Longleftrightarrow \quad T = \frac{75}{2} &= \frac{74+1}{2} = \frac{74}{2} + \frac{1}{2} = 37{,}5 \text{ h} \end{aligned}$$

### 2.2.3 Exercices

**Élémentaire**

2013. Les grandeurs suivantes sont-elles directement proportionnelles, inversement proportionnelles ou ni l'un ni l'autre ?

(a) le prix payé pour des oranges et le poids de ces oranges ;

(b) le nombre d'ouvriers et le temps nécessaire pour effectuer un certain travail ;

(c) le nombre d'heures de travail et le salaire ;

(d) la longueur d'une course en taxi et le prix payé ;

(e) le temps mis par une voiture pour effectuer un trajet donnéet sa vitesse moyenne ;

(f) à vitesse constante, la distance parcourue et le temps.

2014. J'ai mis une heure pour parcourir à pied les 5,4 km qui me séparent de chez mon ami. Je suis revenu à vélo à la vitesse de 18 km/h. Combien de temps ai-je gagné ?

2015. Deux amis, Henri et Jérôme, ont loué une voiture. Ils ont payé 510 fr. Ils ont parcouru ensemble 1200 km. Henri a ensuite parcouru seul 280 km. Comment répartir équitablement les frais ?

2016. Quatre personnes louent ensemble un chalet. Ils calculent que la part de chacun sera de 150 fr. Une cinquième personne se joint au groupe. Combien chaque personne devra-t-elle payer pour le loyer ?

2017. Le volume de l'eau augmente de 7,5% en se congelant. Quel volume de glace obtient-on avec 200 $\ell$ d'eau ?

**Intermédiaire**

2018. Un nénuphar, dont la surface double tous les jours, met 10 jours pour couvrir un étang. Combien de temps auraient mis deux nénuphars de cette espèce pour couvrir ce même étang ?

2019. Un organisateur d'excursions fait des provisions pour 6 jours, prévues pour 12 personnes. Finalement, 18 personnes participent à l'excursion. Combien de temps les provisions dureront-elles ?

2020. Une pendule indique l'heure exacte à midi. Le soir, 7 heures et demie, elle retarde de 3 minutes et 20 secondes. Quelle heure indiquera-t-elle le lendemain matin à 6 heures ?

2021. En roulant à 80 km/h, une voiture met 5 heures pour effectuer un trajet. Combien de temps mettra-t-elle pour parcourir le même trajet à 50 km/h ?

2022. Lors d'une vente, le rapport du bénéfice au prix de vente est de 20%. Quel est le rapport du prix de vente au prix d'achat ?

**Avancé**

2023. Avec 12 kg de blé on obtient 11 kg de farine. Il faut 10 kg de farine pour faire 13 kg de pain. Combien de kilogrammes de pain peut-on faire avec 4800 kg de blé ?

2024. Quel est le rapport du côté d'un carré de longueur $a$ au rayon $r$ d'un disque, afin que le carré et le disque aient la même aire ?

2025. 850 kg d'eau salée contiennent 8% de sel. On ajoute de l'eau pure. La proportion de sel est alors de 2%. Combien de litres d'eau a-t-on ajoutés ?

2026. En pliant en deux, dans le sens de la longueur, une feuille de format A4, on obtient une feuille de format A5. Le rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même pour les deux feuilles. Montrer, sans effectuer de mesures, que ce rapport est de $\sqrt{2}$.

2027. Une route de 240 m a été construite par 18 ouvriers en 8 jours. Combien de jours mettront 15 de ces ouvriers pour construire une route de 400 m ?

## 2.3 Proportionnalité (3) : Proportionnalités composées II

### 2.3.1 Enoncé

Un jardinier consomme 630 $\ell$ d'eau par semaine pour arroser tous les jours ses 45 arbres.
Combien de litres d'eau supplémentaires devra-t-il prévoir pour arroser les 15 arbres de son voisin pendant les vacances (4 semaines) de celui-ci ?

### 2.3.2 Solution

Soit $E$ la quantité d'eau, $S$ le nombre de semaines et $A$ le nombre d'arbres. Ces trois lettres véhiculent les trois grandeurs du problème.
Maintenant on cherche les relations de proportionnalité entre elles (il y en a 3 - pourquoi ?) :

1. Si on augmente le nombre de semaines ($S$) pour un nombre d'arbres fixe, on augmente la quantité d'eau ($E$).
2. Si on augmente la quantité d'arbres ($A$) pour un nombre de semaines fixe, on augmente la quantité d'eau ($E$).
3. Si on augmente le nombre de semaines ($S$) pour une quantité d'eau fixe, on diminue le nombre d'arbres ($A$).

On a donc, **deux grandeurs inversement proportionnelles** ($A$ et $S$) et une autre ($E$) **directement proportionnelle** à chacune des premières. D'où la formule

$$\frac{A \cdot S}{E} = k$$

où la lettre $k$ représente une valeur constante. C'est la constante de la situation donnée.
On utilise deux fois cette formule : la première pour trouver la valeur de $k$ :

$$k = \frac{45 \cdot 1}{630} = \frac{5 \cdot 9}{70 \cdot 9} = \frac{5}{14 \cdot 5} = \frac{1}{14}$$

et la seconde pour trouver la valeur cherchée. Cette fois $E$ est la quantité d'eau supplémentaire à prévoir :

$$E = \frac{15 \cdot 4}{\frac{1}{14}} = 15 \cdot 4 \cdot 14 = 60 \cdot 14 = 600 + 240 = 840$$

**Rép :** Il devra prévoir 840 litres d'eau supplémentaire pour arroser les 15 arbres de son voisin durant 4 semaines.

### 2.3.3 Bases théoriques

Les bases théoriques sont celles de la semaine dernière et concernent principalement la recherche des relations de proportionnalité entre les grandeurs.

Pour rappel, lorsqu'on fait l'expérience mentale d'augmenter la valeur d'une des deux grandeurs à comparer, et que l'on constate que l'autre augmente aussi, alors on peut affirmer que ces deux grandeurs sont **directement proportionnelles**.

Au contraire, si l'une des deux augmente et l'autre diminue, alors elles sont en relation **inversement proportionnelle**.

Ceci peut être résumé avec ce tableau :

| Grandeur | Relation de proportionnalité | Formule |
|---|---|---|
| $A$ et $B$ | directement | $\dfrac{A}{B} = k \quad$ où $k \in \mathbb{R}^*$ |
| $A$ et $B$ | inversement | $A \cdot B = k \quad$ où $k \in \mathbb{R}^*$ |

### 2.3.4 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 2.3.1 : Exemple 1**

Si 12 boeufs mangent 30 kg de foin en 15 jours, combien faudra-t-il de boeufs pour manger 50 kg de foin en 10 jours.

**Solution**
Soit $b$ le nombre de boeufs, $f$ la quantité de foin et $j$ le nombre de jours.
On observe que $b$ est directement proportionnelle à $f$, plus de boeufs plus de foin.
Et que $b$ est inversement proportionnelle à $j$, plus de boeufs moins de jours.
Finalement $f$ est directement proportionnelle à $j$, plus de foin plus de jours.
Comme montré plus haut, on en tire la formule

$$\frac{b \cdot j}{f} = k$$

où $k$ est une constante donnée par le valeurs de départ du problème :

$$k = \frac{12 \cdot 15}{30} = 6$$

Ainsi

$$b = \frac{k \cdot f}{j}$$

et

$$b = \frac{6 \cdot 50}{10} = 30$$

**Rép. :** Il faut 30 boeufs pour manger les 50 kg de foin en 10 jours.

### 2.3.5 Exercices

**Élémentaire**

2028. Dans une entreprise, cinq couturières mettent deux heures pour fabriquer 20 jeans. Combien de jeans seront fabriqués par 7 couturières en 4 h ?

2029. Mon voisin utilise 3 $\ell$ d'eau par jour et par arbre pour arroser son jardin. En 4 jours, il consomme 72 $\ell$. Combien d'arbres possède-t-il ?

2030. Une équipe de 10 personnes a ramassé 3,2 tonnes de raisin en 4 h. Si tout le monde ramasse de la même manière, quelle quantité de raisin est récoltée par une personne en 1 h ?

**Intermédiaire**

2031. On utilise des pompes pour assécher les caves inondées. Chaque pompe retire 40 l d'eau par heure. La cave de Mr Léopold a été inondée par 960 ℓ d'eau. Pour l'assécher, on utilise 9 pompes. Combien d'heures faut-il pour mettre la cave à sec ?

2032. L'étude de la fréquentation d'une école primaire qui comporte 125 enfants montre qu'ils sont généralement présents 29 semaines par an. Quelle sera la quantité de crayons à commander sachant que 10 élèves usent en moyenne 16 crayons par mois (4 semaines) ?

2033. Deux singes sont transférés au zoo d'Animalville. Ils y retrouvent les 4 singes déjà présents. Le responsable veut faire une provision de nourriture de 30 jours pour ces 6 singes. Quelle quantité de nourriture doit-il commander si on sait que, la dernière fois, les 10 kg reçus avaient permis de nourrir les 4 singes pendant 15 jours ?

**Avancé**

2034. En cinq minutes, une machine d'imprimerie effectue le tirage de cinquante journaux.

Clément : "Donc, en dix minutes, deux machines tireront cent journaux."
Didier : "Pas du tout, en dix minutes, une seule machine tirera cent journaux."
Estelle : "Finalement, en dix minutes, deux machines tireront deux cent journaux."

(a) Quels sont les élèves qui ont raison ?

(b) Au fait ! En un quart d'heure, combien de journaux trois machines tireront-elles ?

## 2.4 Proportionnalité (4) : Utilisation de la proportionnalité

Les exemples suivants constituent des rappels de la scolarité obligatoire.

On expose tout d'abord la notions théorique, puis des exemples et enfin des exercices.

### 2.4.1 Bases théoriques

**Le taux d'intérêt**

**Définition 2.4.1 : Capital, intérêt, taux d'intérêt**

Une somme d'argent, constituant ce qu'on appelle le **capital**, déposée pendant une année sur un compte d'épargne rapporte une certaine somme, c'est l'**intérêt**.

L'intérêt annuel est proportionnel au capital :

$$\frac{\text{intérêt}}{\text{capital}}$$

Le facteur de proportionnalité qui permet de calculer l'intérêt annuel, lorsqu'on connaît le capital, s'appelle le **taux d'intérêt**, et on a la formule suivante

$$\text{taux d'intérêt} = \frac{\text{intérêt}}{\text{capital}}$$

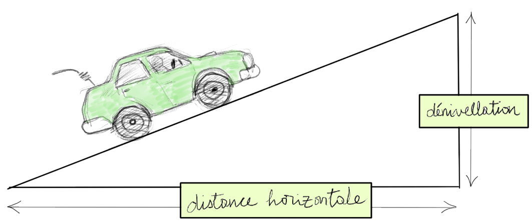
Ce dernier s'exprime en %.

**La pente d'une route**

**Définition 2.4.2 : Dénivellation**

Lorsqu'une route monte ou descend, la distance verticale s'appelle la **dénivellation**.

On calcule la pente d'une route en divisant la dénivellation par la distance horizontale. On mesure les deux longueurs dans la même unité.




**Définition 2.4.3 : Pente**

$$\text{pente (d'une route)} = \frac{\text{dénivellation}}{\text{distance horizontale}}$$

Cette pente est le facteur de proportionnalité par lequel il faut multiplier la distance horizontale pour calculer la dénivellation.

La pente d'une route s'exprime généralement en pourcent (%).

### L'échelle d'une carte ou d'un plan

Les distances sur une carte ou sur un plan, sont proportionnelles aux distances réelles.

**Définition 2.4.4 : Échelle**

L'échelle d'une carte est le quotient de la distance sur le plan par la distance réelle :

$$\text{échelle} = \frac{\text{distance sur la carte}}{\text{distance réelle}}$$

Les deux distances doivent être mesurées dans la même unité.

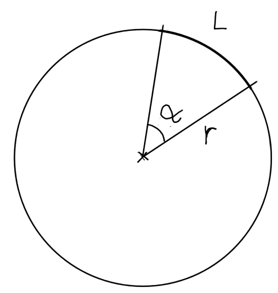
L'échelle d'une carte s'exprime par une fraction dont le nuémrateur est 1. Par exemple

1 : 20000 1 : 1000000

Lorsqu'on connaît l'échelle, on peut calculer une distace sur le terrain à partir de la distance sur la carte ou vice-versa.

### La longueur d'un arc de cercle, l'aire d'un secteur

Désignons par $L$ la longueur de l'arc, $r$ le rayon du cercle et $\alpha$ ("alpha"), l'angle au centre exprimé en degrés.




Alors

**Définition 2.4.5 : Longueur de l'arce de cercle**

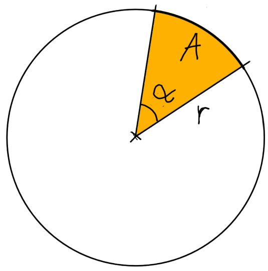
La longueur de l'arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre, et on a la relation suivante

$$\frac{L}{\alpha} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{360}$$

et la formule de la **longueur**

$$L = \frac{\alpha \cdot 2\pi r}{360}$$

De même, si on désigne par $A$ l'aire d'un secteur de disque, on a




**Définition 2.4.6 : L'aire d'un secteur de disque**

L'aire d'un secteur de disque est proportionnelle à son angle au centre :

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{\pi \cdot r^2}{360}$$

et la formule de **l'aire d'un secteur**

$$A = \frac{\alpha \cdot \pi r^2}{360}$$

### 2.4.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 2.4.1 : Exemple 1**

Calculer l'intérêt annuel que rapport un capital de 6 000 fr placé à 3,75 %.

**Solution** Comme l'intérêt est proportionnel au capital placé, on a

$$\frac{\text{intérêt}}{\text{capital}} = \text{taux}$$

et donc

$$\text{intérêt} = \text{capital} \cdot \text{taux} = 6000 \cdot \frac{3{,}75}{100} = 225$$

**Rép. :** 225 fr.

**Exemple 2.4.2 : Exemple 2**

Une carte au 1 : 25000 a été reproduite, agrandie 4 fois, dans un joural. Quelle est l'échelle de la carte que les lecteurs du journal ont sous les yeux ?

**Solution** Notons que l'agrandissement de la carte d'origine doit aussi donner les bonnes distances. Pour rappel

$$1 : 25000 = \frac{1}{25000} = \frac{\text{distance sur la carte}}{\text{distance réelle}}$$

généralement les unités sont ici des centimètres.
Si on note $a$ les distances sur la carte d'origine, et $\tilde{a}$ les distances de l'agrandissement, alors on a

$$\tilde{a} = 4 \cdot a$$

autrement dit que ce n'est plus un centimètre qui représentent 25000 centimètres mais 4, l'échelle est donc de

$$\frac{4}{25000} = \frac{1}{6250} = 1 : 6250$$

**Rép. :** 1 : 6250.

**Exemple 2.4.3 : Exemple 3**

Calculer la longueur de l'arc d'un secteur de 36 ° et de rayon 10 cm.

**Solution** On sait que la longueur de l'arc $L$ est proportionnelle à l'angle $\alpha$ de l'arc. Donc

$$L = \alpha \cdot \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{360}$$

en substituant les valeurs de l'énoncé on trouve

$$L = 36 \cdot \frac{2 \cdot 10 \cdot \pi}{360} = 2\pi \approx 6{,}3$$

**Rép. :** 6,3 cm.

**Exemple 2.4.4 : Exemple 4**

Donner une valeur à $x$ pour que la proportion suivante soit vérifiée. Est-ce la seule valeur possible ?

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{32}$$

**Solution** La première chose à faire est de modifier l'expression.

On constate que $x \neq 0$, autrement il y aurait une division par zéro, ce qui est interdit.

Alors, on applique "l'égalité des produits croisés"

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{32} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 \cdot 32 = x^2$$

On cherche donc un nombre, qui multiplié par lui-même donne $64 = 2 \cdot 32$. Comme la racine carrée de 64 est 8 nous avons trouvé !

Donc, $x = 8$.

Seulement, **à chaque fois que l'on prend la racine carrée d'un nombre, il faut considérer si la valeur négative de la racine carré, est une solution**. Dans le cas présent, oui. Il y a donc deux solutions possible : 8 et $-8$.

**Rép. :** $x \in \{8; -8\}$.

### 2.4.3 Exercices

**Élémentaire**

2035. Un commerçant vend un article en réalisant un bénéfice de 15% par rapport au prix d'achat. Sachant que ce bénéfice est de 10,50 fr., calculer le prix d'achat de cet article.

2036. Un géomètre remet à un propriétaire le plan d'une parcelle de 80 m sur 50 m. Le plan a les dimensions suivantes : 32 cm sur 22 cm. Quelle est l'échelle de ce plan ?

2037. Calculer la longueur $L$ des arcs et l'aire $A$ des secteurs dont les rayons $r$ et angles au centre $\alpha$ sont :

(a) $r = 5$ cm $\alpha = 180\,°$
(b) $r = 5$ cm $\alpha = 90\,°$
(c) $r = 5$ cm $\alpha = 45\,°$
(d) $r = 8$ cm $\alpha = 72\,°$

2038. Une voiture consomme 5 $\ell$ d'essence pour parcourir 80 km.
(a) Combien consommera-t-elle pour parcourir 100 km ?
(b) Quelle distance peut-elle parcourir avec 24 $\ell$ d'essence ?

2039. La différence de dux nombres est égale à 72 et leur rapport est de 7. Quels sont ces nombres ?

**Intermédiaire**

2040. Quel est l'intérêt que rapport un capital de 8 400 fr. placé à 4 % pendant 15 mois ?

2041. Sur une carte au 1 : 400′000, la distance entre deux villages est de 56 cm. Quelle serait la distance en centimètres entre ces villages sur une carte au 1 : 1′000′000 ?

2042. À quel taux faudrait-il placer 5 000 fr. pour obtenir un intérêt de 125 fr. en 5 mois ?

2043. Paquito aimerait aller de Genève au festival de Nyon puis revenir à Genève. La distance de Genève à Nyon est de 25 km. Il a 2,20 fr. en poche. Le réservoir de son scooter est vide. Son véhicule consomme 5 litres pour 100 kilomètres. Le prix d'un litre d'essence est de 90 centimes de franc. A-t-il assez d'argent pour faire ce trajet ? Sinon, quelle distance devra-t-il parcourir à pied ?

2044. Calculer l'angle au centre qui intercepte un secteur de 24 $\text{cm}^2$ d'aire sur un disque de 8 cm de rayon.

**Avancé**

2045. On augmente de 10 % les dimensions d'un rectangle. Quelle est, en %, l'augmentation de l'aire de ce rectangle ?

2046. On augmente de 10 % le rayon d'un disque. Quelle est, en %, l'augmentation de l'aire de ce disque ?

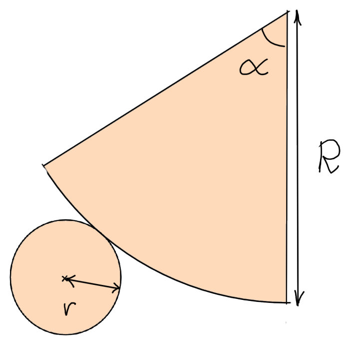
2047. Partager le nombre 837 en parties, $x$, $y$, $z$ respectivement inversement proportionnelles aux nombres 3, 4 et 6.

2048. À quel taux faudrait-il placer un capital pour qu'il double en 20 ans ?

2049.

,colback=yellow!10!white,colbacklower=yellow!10!white

Voici le développement d'un cône. Calculer le rayon $r$, sachant que $\alpha = 60°$ et que $R = 18\,\text{cm}$.



Objectifs

(A) compredre ce qu'est une fonction, et notamment

(1) en connaître la définition comme relation entre grandeurs

(2) comme correspondance entre deux ensembles de nombres

(3) lire, écrire et interpréter des fonctions de différents types

(4) tracer un graphique à partir d'un tableau de valeurs

(5) identifier un pré-image, une image, une ordonnée à l'origine et les zéros d'une fonction

(6) avoir un notion de ce qu'est un domaine de définition ;

(B) étudier la fonction affine (droite), et notamment

(1) retrouver les éléments précédents d'après une représentation graphique

(2) dire si un point appartien à une droite

(3) dire si deux droites sont sécantes, perpendiculaires ou parallèles, graphiquement et algébriquement

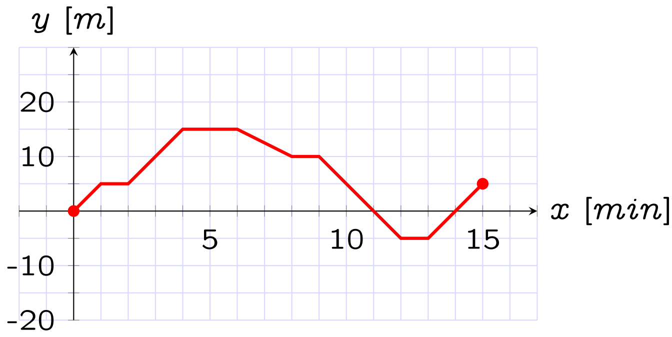
(4) appliquer ces notions à la résolution de problèmes concrets.

## 3.1 Généralités (1) : Relations

Lorsque deux variables sont connectées (dans une expression algébrique, par exemple), nous utilisons la notion de **relation** ou de **fonction** pour les décrire.

### Problème ouvert

Fernando et Gérard se mesurent dans une compétition cycliste. Le graphique ci-contre, donne l'avance de Fernando par rapport à Gérard après $x$ minutes.




### Questions

1. Pour quelles valeurs de $x$ y a-t-il des valeurs correspondantes pour $y$ ?
2. Pour quelles valeurs de $y$ y a-t-il des valeurs correspondantes pour $x$ ?
3. Que vaut $y$ lorsque $x = 3$ ? Sais-tu écrire ceci en utilisant une notation fonctionnelle ?
4. Quelles sont les valeurs de $x$ pour lesquelles $y = 10$ ?

### 3.1.1 Bases théoriques

Il est essentiel d'avoir tout de suite une définition de ce qu'est une **fonction**.

**Définition 3.1.1 : Fonction**

Une **fonction** est une **relation particulière** entre **deux grandeurs**.

Et rappelons aussi la définition de ce qu'est une équation.

**Définition 3.1.2 : Équation**

Une **équation** est la donnée de trois objets mathématiques

1. Deux expressions algébriques
2. séparées par une égalité ($=$)
3. et contenant une inconnue (ou plusieurs), souvent notée $x$.

Une fonction peut aussi être décrite par un ensemble de points. Ces points seront alors représentés par des coordonnées. Ces coordonnées peuvent être écrites dans un tableau à deux entrées.

En général, on note $x$ l'une des grandeurs et $y$ l'autre. C'est toujours, dans ce cas, $x$ qui est la grandeur indépendante, et $y$ la grandeur dépendante.

Cependant, du point de vue des fonctions, $y = f(x)$. Toujours. Et dès qu'on peut donner (car on ne peut pas toujours) la définition de la fonction par une formule, on écrit $f(x)$ à la place de $y$. Mais les deux sont interchangeables.

Voici le tableau décrivant la relation de la fonction de l'exemple d'introduction :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 12 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | $-1$ | $-1$ | 1 |

Dans la pratique, on appelle l'ensemble des valeurs de la première ligne le *domaine* et la seconde ligne l'*image* de la fonction.

**Définition 3.1.3 : Domaine d'une fonction**

On appelle **domaine d'une fonction**, l'ensemble des valeurs possibles que peut prendre sa variable indépendante, généralement notée $x$.

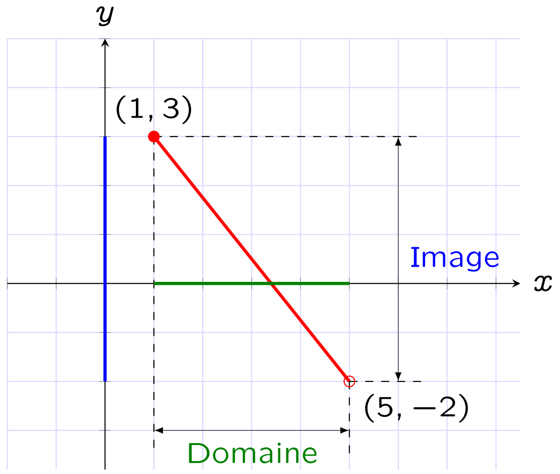
**Définition 3.1.4 : Image d'une fonction**

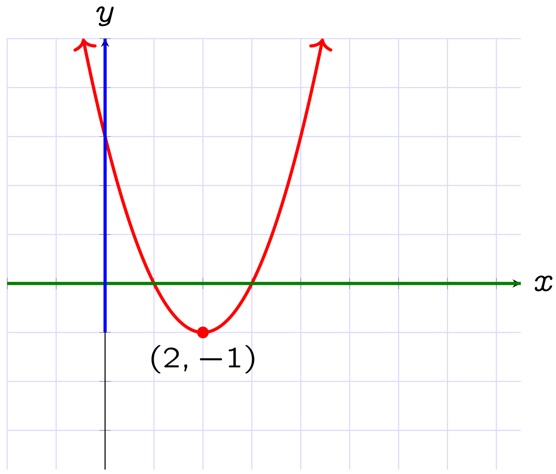
On appelle ensemble **image d'une fonction**, l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable dépendante, généralement notée $y$.

Par extension $y$ est appelée l'image de $x$ par la fonction $f$.
De même, $x$ est appelée la pré-image de $y$ par la fonction $f$.

On peut décrire de plusieurs manières ces deux ensembles. La manière la plus plus utilisée ce sont les intervalles. Mais on peut aussi utiliser les raccourcis que sont les noms des ensembles de base avec leur modificateurs $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}_+, \ldots)$.

Par exemple




Pour cette fonction on a

Domaine : $\mathscr{D} = [1; 5[$

Image : $\mathscr{I} = ]-2; 3]$

Pour cette fonction on a

Domaine : $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

Image : $\mathscr{I} = ]-1; +\infty[$

Une fonction est donc une relation entre deux ensembles, le **domaine** et l'**image**.

L'ensemble **image** est **dépendant** dans sa relation avec l'ensemble domaine.
L'ensemble **domaine** est **indépendant** dans sa relation avec l'ensemble image.

Il y a une correspondance entre un ensemble de départ (**le domaine**) et un ensemble d'arrivée (**l'image**).

**Définition 3.1.5 : Fonctions réelles d'une variable réelle**

Une fonction ou encore *application* est une **relation** entre deux ensembles pour laquelle **chaque élément du premier est en relation avec un <u>unique</u> élément du second**.

Autrement dit, à un élément de l'enseble de départ correspond un et un seul élément de l'ensemble d'arrivée.

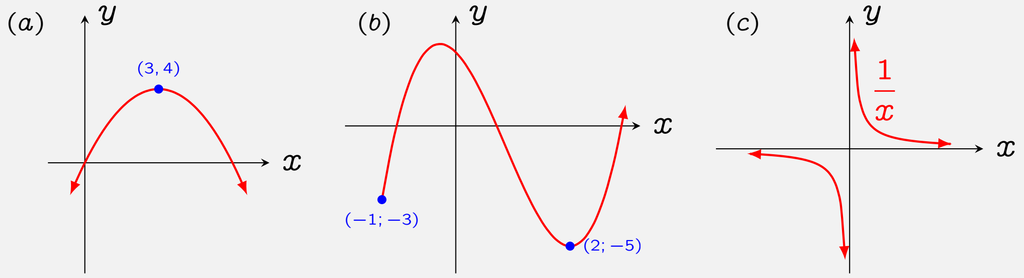
La contrainte décrite en gras dans cette définition implique que certains "graphes", ou images d'équations, ne sont pas des fonctions. Ces graphes, bien que l'on sache les tracer, ne constituent pas les graphiques d'une fonction, mais souvent de plusieures.

Nous allons étudier les fonctions numériques dans l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$.

### 3.1.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 3.1.1 : Exemple 1**

Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.




**Solution**

Il s'agit de faire trois lectures de graphique.

(a) Nous avons une parabole. Nous pouvons lire qu'il y a un point, dont les coordonnées sont $(3;4)$ qui est au plus haut de la courbe, le sommet. On observe qu'il n'y a pas de point plus haut. Donc, verticalement il ne va pas plus haut. La lettre qui véhicule la coordonnée verticale est $y$. Nous avons vu que c'est la lettre qui correspond aux **images**, on a donc trouvé une *borne maximale* pour l'ensemble des images.

Nous constatons que les $x$ sont *tous concernés* par la courbe. En effet, les deux "bras" de la courbe vont vers le bas (dans le sens des flèches) et poursuivent leur course vers la gauche pour l'un et vers la droite, mais toujours vers le bas. Dans ces conditions, *tous* les $x$ sont concernés. On a donc trouvé l'ensemble **domaine**, autrement dit le **domaine de définition** de ce graphe : $\mathbb{R}$.

Comme le graphe s'étend vers le bas, les $y$ concernés, les images, vont de 4 à $-\infty$. On a donc trouvé le second ensemble, **ensemble image**. Le domaine de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, et l'**image** est $\mathscr{I} = [4; -\infty[$.

(b) Pour ce graphique on observe que les $x$ ont un minimum, à savoir $-1$, car c'est la coordonnée du point le plus à gauche du graphique (il n'y a pas de flèche et on indique bien un point). Et comme la courbe évolue vers la droite et vers le haut, toutes les valeurs de $x$ tendent vers $+\infty$. On a donc trouvé le domaine de définition.

On observe aussi que les $y$ on un minimu, en la "personne" du point $(2;-5)$. Parce que la partie droite de la courbe évolue vers le haut, toutes le valeurs de $y$ vont de $-5$ vers $+\infty$. Nous avons trouvé l'ensemble image.

Le domaine de définition est $\mathscr{D} = [-1;+\infty[$, et l'**image** est $\mathscr{I} = [-5;+\infty[$.

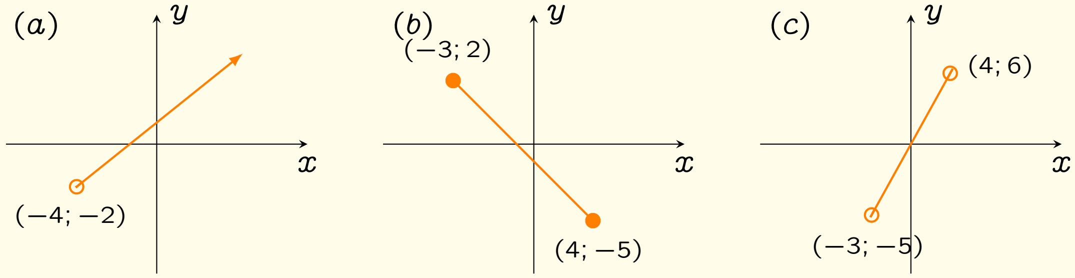
(c) Pour ce graphique on ne nous donne pas de points. Par contre on a la définition de la fonction $\frac{1}{x}$. Donc la seule valeur qui est à *éviter* est le 0. Sinon, tous les nombres peuvent être utilisés pour donner une image par la fonction. On a donc trouvé les deux ensembles. En effet, comme le numérateur est toujours différent de zéro, les $y$ ne peuvent prendre la valeur 0. Et comme la division par zéro est interdite, les $x$ ne peuvent pas non plus prendre la valeur zéro.

Le domaine de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$, et l'**image** est $\mathscr{I} = \mathbb{R}^*$.

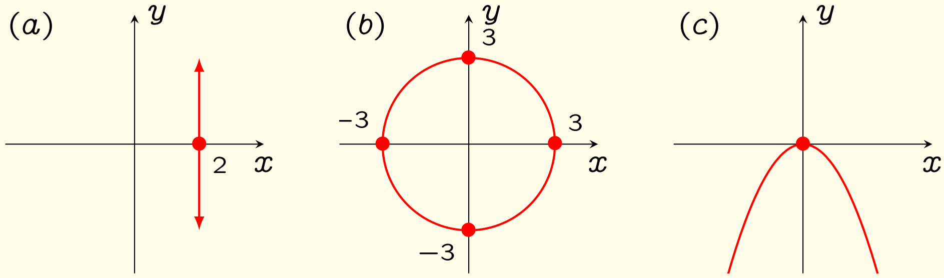
### 3.1.3 Exercices

**Élémentaire**

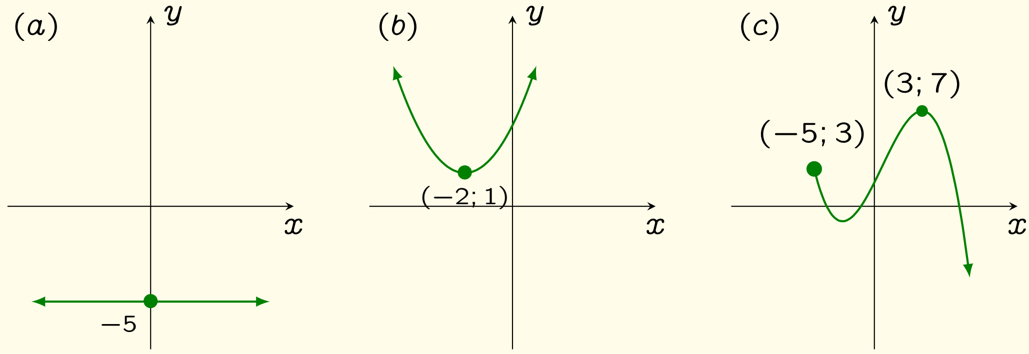
3001. Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.



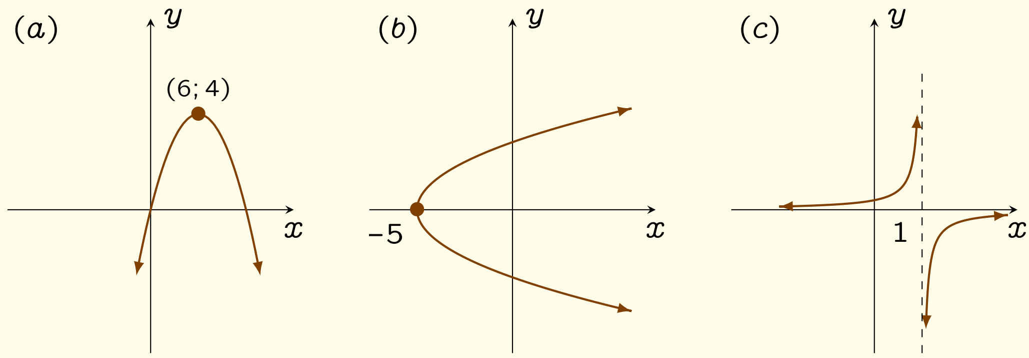

3002. Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.




3003. Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.




3004. Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.



**Intermédiaire**

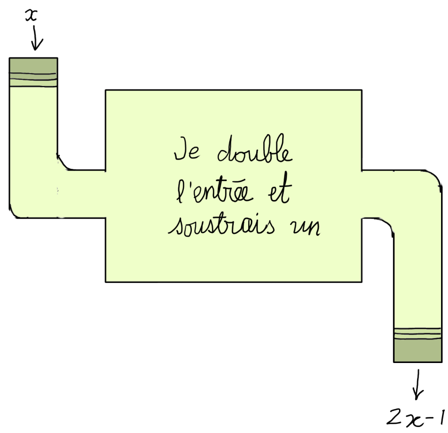
3005. Reprendre les exercices 3002, 3003 et 3004 et indiquer quels sont les graphiques qui **ne correspondent pas** à une fonction en justifiant votre réponse par un argument.

**Avancé**

Pas d'exercices pour ce niveau cette semaine.

## 3.2 Généralités (2) : La machine à nombres

Souvent nous utilisons la notion de “machine” pour illustrer le comportement des fonctions. Par exemple, la machine ci-contre, a été *programmée* pour effectuer une tâche particulière sur des nombres.




Quelque soit le nombre introduit dans l'engin, elle **le double et diminue le produit de un**. La dernière partie de la phrase précédente, constitue déjà une description de la fonction.

Si nous désignon par la lettre $f$ cette fonction, nous écrirons

$f$ est une fonction qui transforme $x$ en $2x - 1$

Si 3 est introduit alors $2 \cdot \mathbf{3} - 1 = 5$ est produit.

Cette fonction peut être écrite sous la forme suivante

$$f : x \rightarrow 2x - 1$$

$\underbrace{\text{La fonction } f}$ $\underbrace{\text{telle que}}$ $\underbrace{x}$ $\underbrace{\text{est transformée en}}$ $\underbrace{2x - 1}$

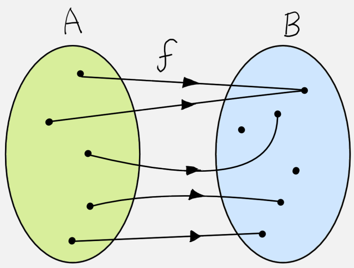
Mais le plus souvent, nous écrirons la même fonction sous cette forme

$$f(x) = 2x - 1$$

### 3.2.1 Bases théoriques

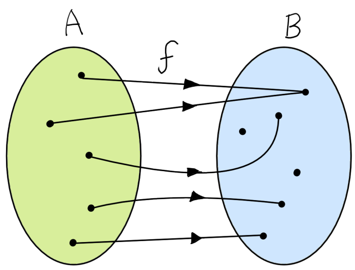
**Définition 3.2.1 : Fonction, ensembles départ et arrivée, image d'un élément**

- Soit deux ensembles $A$ et $B$, distincts ou non. Une correspondance de $A$ vers $F$ qui associe à tout élément de $A$ exactement un élément de $B$ est une **fonction** de $A$ vers $B$. Si $f$ désigne cette fonction, on note $f : A \rightarrow B$.
- $A$ est l'**ensemble de départ** de la fonction, ou encore source ;
  $B$ est l'**ensemble d'arrivée** ou but.
- Si $a$ est un élément de $A$, on désigne par $f(a)$ –ceci se lit : "f de a"– l'élément de $B$ qui lui correspond : $f(a)$ est l'**l'image de $a$ par $f$**. On note $a \rightarrow f(a)$.




La donnée d'une fonction équivaut à la donnée de son ensemble de départ $A$, de son ensemble d'arrivée $B$, et d'un moyen de déterminer l'image de chaque élément de $A$.

Dans la figure de droite, ci-contre, le diagramme représente la fonction "carré", qui à un nombre relatif, associe son carré. La fonction $f$ peut être notée de manière générale par $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, puisque le diagramme montre que les éléments de l'ensemble de départ sont des entiers relatifs, tout comme l'ensemble d'arrivée. Cette notation a le désavantage de ne pas préciser quel est le moyen de déterminer les images de l'ensemble de départ. On peut aussi décrire cette fonction par la liste ci-contre.

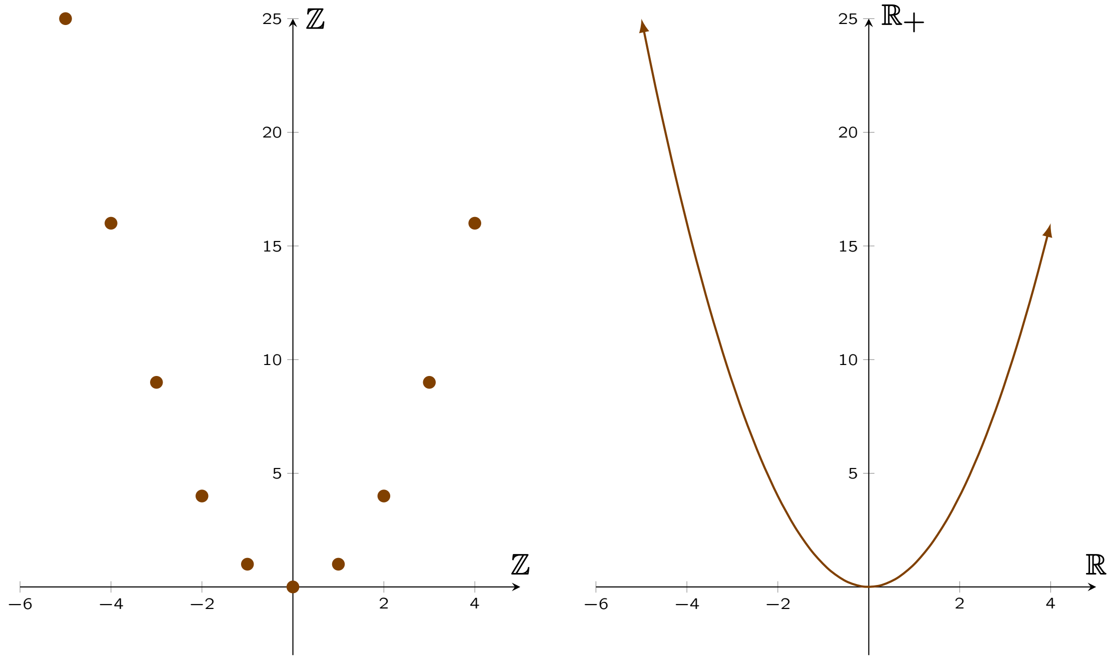



$$\begin{aligned} f(2) &= 4 \\ f(-2) &= 4 \\ f(0) &= 0 \\ f(-5) &= 25 \\ f(-1) &= 1 \end{aligned}$$

Il est aussi possible de décrire cette fonction par un ensemble de couples :

$$(2; 4),\ (-2; 4),\ (0; 0),\ (-5; 25), (-1; 1)$$

Et finalement, dans un système d'axes (image de gauche) :




Si on "relie" les points du graphique de gauche, on obtient une infinité de points, entre deux points... C'est la même fonction sur l'ensemble des nombres réels. Vous pouvez constater que l'ensemble image de la fonction est $\mathbb{R}_+$, pourquoi ?

**Définition 3.2.2 : Variable**

Une **variable** sur un ensemble $A$ est une lettre qu'on se donne le droit de remplacer (effectivement ou par la pensée) par chacun des éléments de $A$.

**Définition 3.2.3 : Variable sur $\mathbb{R}$**

Une variable sur l'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, s'appelle **variable réelle**.

Si l'on prend des expressions algébriques contenant la variable réelle $x$

$$-x \qquad x^3 - 9 \qquad 3x + 5 = 0$$

nous pouvons remplacer cette lettre par n'importe quel nombre réel, $-4{,}5$ par exemple :

$$-(-4{,}5) \qquad (-4{,}5)^3 - 9 \qquad 3(-4{,}5) + 5 = 0$$

**Définition 3.2.4 : Fonction réelle de variables réelles**

On appelle **fonction réelle** d'une variable réelle toute fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si on dit que $f$ représente la fonction qui associe à tout nombre réel son carré augmenté de 3, on écrira

$$\begin{aligned} f\ :\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 3 \end{aligned}$$

Cette notation signifie que pour trouver l'image d'un nombre de l'ensemble de départ, il suffit de remplacer, partout où elle apparaît, la variable $x$ par ce nombre. Ainsi l'image de $-8$ est $(-8)^2+3$. On dira que "$f$ prend en $-8$ la valeur $(-8)^2+3$". Ce qui revient à écrire

$$f(-8)=(-8)^2+3$$

et de façon général

$$f(x)=x^2+3$$

### Représentation graphique d'une fonction

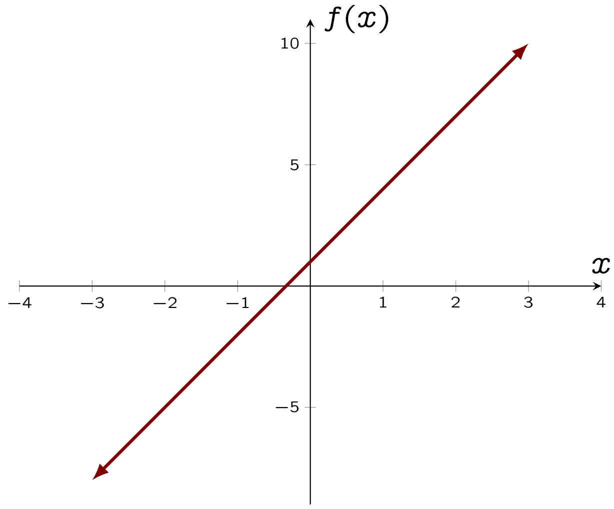
Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être représentée dans un plan si l'on y choisit deux droites sécantes (généralement perpendiculaires) graduées convenablement.

Pratiquement, on calcule les images d'un certain nombre d'éléments bien choisis. Chaque nombre et son image sont les coordonnées cartésiennes d'un point du graphique.

**Exemple 3.2.1**

Voici une représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 1$.

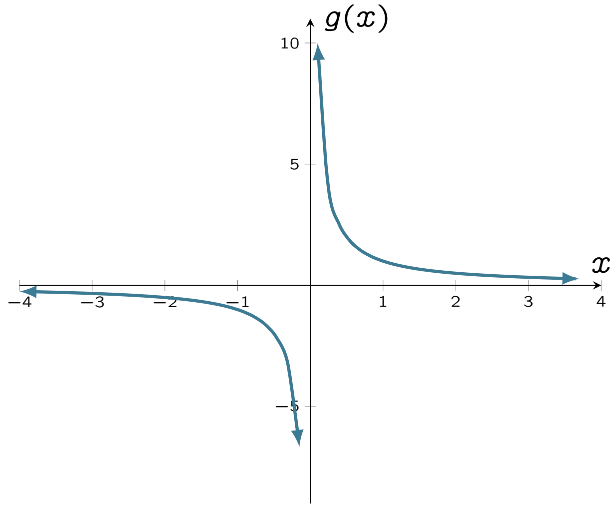
| $x$ | $f(x) = 3x + 1$ |
|---|---|
| $-3$ | $-8$ |
| $-2$ | $-5$ |
| $-1$ | $-2$ |
| $0$ | $1$ |
| $1$ | $4$ |
| $2$ | $7$ |
| $3$ | $10$ |




**Exemple 3.2.2**

Représentation graphique de $g : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^*; x \mapsto \dfrac{1}{x}$

| $x$ | $f(x) = 3x + 1$ |
|---|---|
| $-3$ | $-0{,}\overline{3}$ |
| $-2$ | $-0{,}5$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $0{,}5$ |
| $3$ | $0{,}\overline{3}$ |



Si on voulait évaluer la fonction $g$ en 0 on serait amené à écrire 1/0 qui ne désigne aucun nombre réel. C'est d'ailleurs l'une des opérations interdites avec les nombres réels : la division par zéro. Nous disons alors que $g$ n'est pas définie en 0, d'où la modification de l'ensemble de départ.

### Domaine de définition

Il existe dans $\mathbb{R}$ deux opérations élémentaires qui "n'aboutissent" pas forcément : ce sont la division et l'extraction de la racine carrée. Nous pouvons constater que 13/0 et $\sqrt{-4}$ ne désignent aucun nombre réel.

Il s'en suit que dans l'étude des fonctions réelles, certaines précautions sont nécessaires.

Considérons les deux fonctions ci-après

$$f(x) = \frac{1}{x-7} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x-7}$$

On constate facilement (comment ?) que la fonction $f$ n'est pas définie lorsqu'on remplace $x$ par 7 et que la fonction $g$ n'est pas définie pour des valeurs de $x$ strictement inférieures à 7. In en résulte que l'ensemble de départ de chacune des fonctions considérées ne peut pas être $\mathbb{R}$ tout entier.

**Définition 3.2.5 : Domaine de définition**

L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ pour lesquels une expression est définie s'appelle le **domaine de définition** de cette expression. On le note $\mathscr{D}$.

Le domaine de définition de l'expression $\dfrac{1}{x-7}$ est $\mathscr{D} = \mathbb{R} - \{7\}$ et le domaine de définition de l'expression $\sqrt{x-7}$ est l'ensemble des nombres supérieurs ou égaux à 7, il se note $\mathscr{D} = [7\ ;\ +\infty[$.

**Définition 3.2.6 : Ensemble de départ**

L'**ensemble de départ** d'une fonction réelle est une partie du domaine de définition de l'expression qui lui est associée.

Pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-7}$, l'ensemble de départ est une partie de $\mathbb{R} - \{7\}$. On peut choisir $\{0; 1; 2; 3; 5; \}$, $\quad \mathbb{R}_-$, $\quad \mathbb{Z}_-, \ldots$

### Fonctions polynômes

**Définition 3.2.7 : Fonctions polynômes**

Une **fonction polynôme** est une fonction donnée par une écriture de la forme

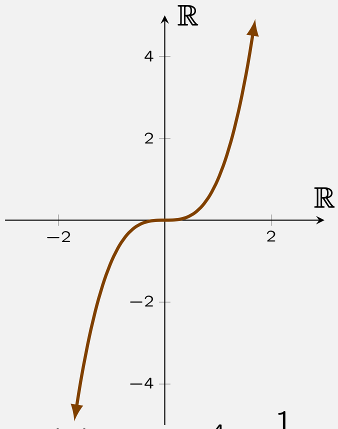
$$p \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \;\mapsto\; p(x)$$

où $p(x)$ désigne un polynôme en $x$ à coefficients réels.

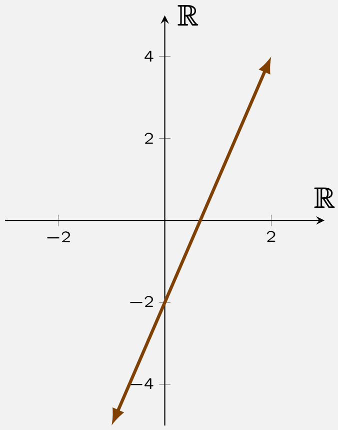
**Exemple 3.2.3**

Voici quelques fonctions polynôme

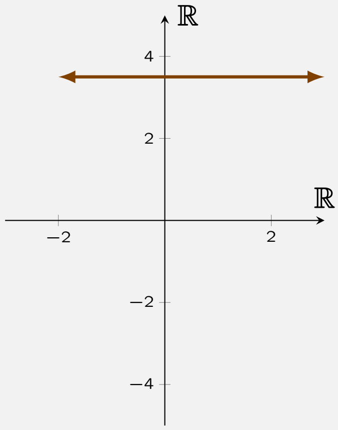
$f(x) = x^3$



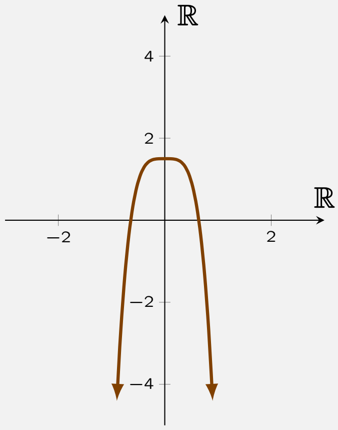

$g(x) = 3x - 2$



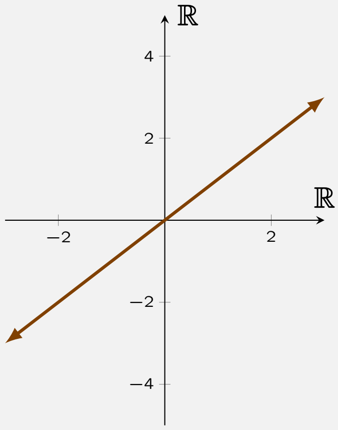

$h(x) = 7/2$



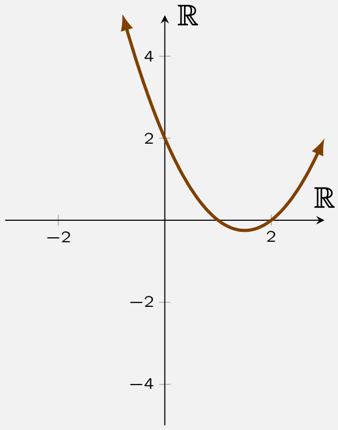

$i(x) = -9x^4 + \dfrac{1}{4}$




$k(x) = x$




$l(x) = x^2 - 3x + 2$




**Important**

Les fonctions polynômes sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ce qui veut dire que leur domaine de définition s'écrit toujours

$$\mathscr{D} = \mathbb{R}$$

**Définition 3.2.8 : Fonctions du premier, deuxième, etc. degré**

- Une fonction polynôme est dite **fonction du premier degré** lorsque le polynôme associé est du premier degré.
- Une fonction polynôme est dite **fonction du deuxième degré** lorsque le polynôme associé est du deuxième degré.
- etc.

**Important**

- Le graphique d'une fonction du premier degré est toujours une droite. Pour le construire il suffit donc de calculer les images de deux éléments.
- Le graphique d'une fonction du deuxième degré est toujours une courbe possédant un axe de symétrie parallèle au second axe de coordonnés. Cette courbe porte le nom de parabole.

**Définition 3.2.9 : Zéro d'une fonction**

Considérons une fonction $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto p(x)$. S'il existe un nombre $a$ tel que $p(a) = 0$, on dit que **p s'annule en a** ou que **a est un zéro de p**.

**Exemple 3.2.4**

Par exemple $-2$ et $3$ sont des zéros de la fonction $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto x^2 - x - 6$.

### Fonctions rationnelles

**Définition 3.2.10 : Fonction rationnelle**

Une **fonction rationnelle** est une fonction donnée par une écriture de la forme $q : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto q(x)$, où $q(x)$ désigne une fractin rationnelle en $x$ et $\mathscr{D}$ son domaine de définition.

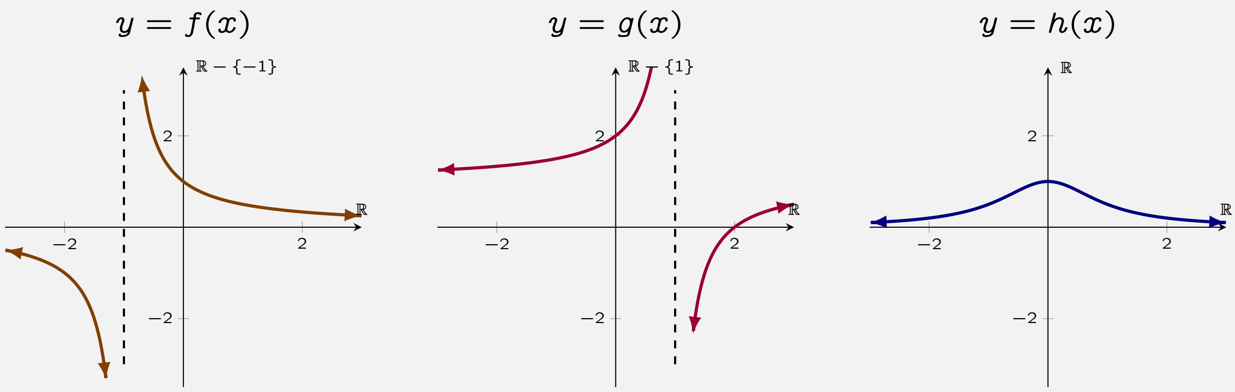
**Exemple 3.2.5**

Voici trois fonctions rationnelles

1.
$$\begin{aligned} f\ : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} g\ : \mathbb{R}-\{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x-2}{x-1} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} h\ : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$



### 3.2.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 3.2.6 : Exemple 1**

Compléter le tableau ci-après.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{x(x-1)}{2}$ | | | | | | | | | | |

**Solution** Il suffit de remplacer la valeur de $x$ dans la formule et de calculer, tour à tour les résultats :

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{x(x-1)}{2}$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |

**Exemple 3.2.7 : Exemple 2**

Donner, à l'aide d'une variable, l'expression de la fonction donnant les couples suivants

$$\begin{array}{rcl} 0 & \longrightarrow & 4 \\ 12 & \longrightarrow & 40 \\ 6 & \longrightarrow & 22 \\ 8 & \longrightarrow & 28 \\ 1 & \longrightarrow & 7 \end{array}$$

**Solution** On va tout d'abord choisir la variable $x$ pour la première colonne. En effet, cette valeur est transformée (la formule cherchée) pour donner la valeur de la seconde colonne. Cette dernière nous l'appelons $y$ :

$$\begin{array}{rcl} x & & y \\ \hline 0 & \longrightarrow & 4 \\ 12 & \longrightarrow & 40 \\ 6 & \longrightarrow & 22 \\ 8 & \longrightarrow & 28 \\ 1 & \longrightarrow & 7 \end{array}$$

Maintenant, sachant que nous cherchons une fonction de $x$, on peut écrire $y = f(x)$. Il est important dans l'étude des fonctions, d'écrire la fonction $f(x) = \ldots$, où les $\ldots$ représenterons la formule qui utilise la variable $x$.

Par le tableau nous savons que $f(0) = 4$. Donc, que $x = 0$ dans la formule cherchée donne 4.

Il faut essayer des choses, car la bonne réponse ne vient jamais tout de suite, à moins de connaître la réponse.

La formule est du type $x+4$, car $0+4=4$. Or $12+4$ ne donne pas 40 (deuxième ligne).

On peut deviner. Mais essayons de soustraire 4 à tous les nombres de la seconde colonne, cela va nous donner une idée de ce que vaut la première partie de la formule cherchée. En tout cas, on sait que le 4 fait partie de la formule.

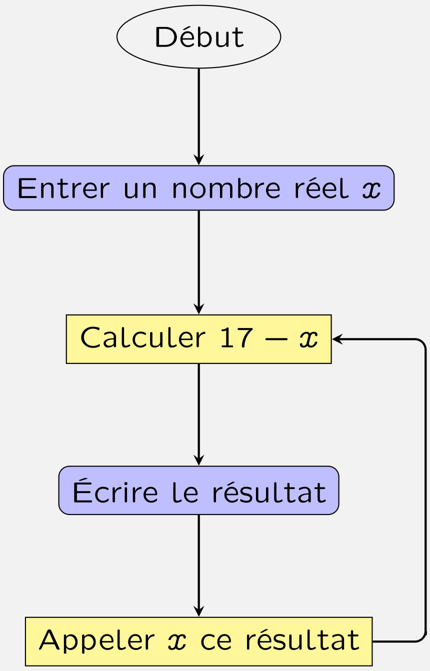
Pour la $1^{\text{ère}}$ et dernière ligne respectivement $4-4=0$ et $7-4=3$.
On comprend alors que la première partie est $3 \cdot x$ et on peut donner la formule :

$$f(x) = 3x + 4$$

**Rep. :** $f(x) = 3x + 4$.

**Exemple 3.2.8 : Exemple 3**

Étudier le fonctionnement de la machine perpétuelle suivante :




**Solution** Le diagramme, appelé **organigramme**, se lit dans le sens des flèches. Pour cet exercice vous pouvez utiliser la calculatrice.

On commence par choisir un nombre $x = 2{,}5$, puis

1. $17 - 2{,}5 = 14{,}5$
2. Écrire le résultat dans le cahier
3. $x = 14{,}5$

Puis on recommence :

1. $17 - 14{,}5 = 2{,}5$
2. Écrire le résultat dans le cahier
3. $x = 2{,}5$

On constate qu'au bout de quelques passages, le programme donne toujours le même résultat à savoir la séquence $14{,}5 \rightarrow 2{,}5 \rightarrow 14{,}5 \dots$

Si on essaie d'autres nombres, on verra qu'il y a toujours une séquence de longueur 2.

**Exemple 3.2.9 : Exemple 4**

Un élève a étudié la fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N};\ x \mapsto x^2 + 8x + 7$. Il présume que pour n'importe quel nombre entier positif $n$, $f(n)$ sera toujours un nombre composé. A-t-il raison ?

**Solution** Il s'agit de calculer des valeurs de la fonction $f$ pour des nombres entiers positifs choisis par vous.

On veut savoir si l'élève a raison, il affirme que l'image de la fonction donne toujours un nombre composé, c'est-à-dire le produit de deux autres nombres différents de 1.

Si on calcule les images des premiers entiers par $f$ on a

| $n$ | $\mapsto$ | $x^2 + 8x + 7$ |
|---|---|---|
| 1 | $\mapsto$ | 16 |
| 2 | $\mapsto$ | 27 |
| 3 | $\mapsto$ | 40 |
| 4 | $\mapsto$ | 55 |
| 5 | $\mapsto$ | 72 |
| 6 | $\mapsto$ | 91 |
| ... | ... | ... |

On peut aller très loin dans l'étude de cette fonction. Le mieux est de voir si on peut la factoriser. En effet, l'expression $x^2 + 8x + 7 = (x + 7)(x + 1)$. Donc quelque soit le nombre entier positif choisi, $x$, il y aura toujours deux nombres dont le produit donne $f(x)$ à savoir $x + 7$ et $x + 1$.

**Rép. :** Oui, l'élève a raison.

### 3.2.3 Exercices

**Élémentaire**

3006. Compléter le tableau ci-après.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}$ | | | | | | | | | | |

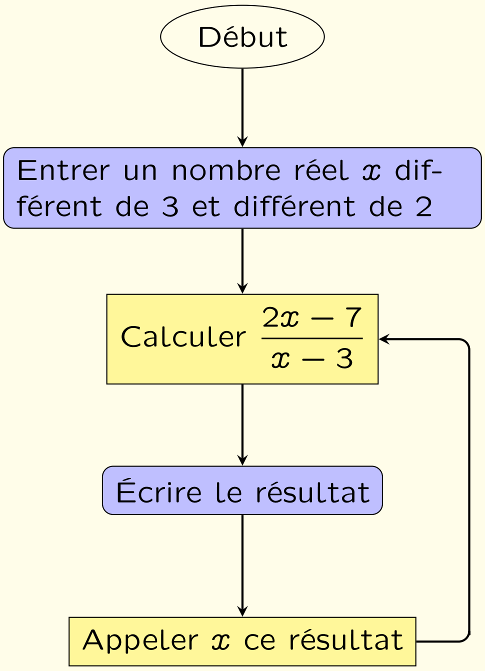
3007. Soit l'ensemble

$$A = \{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17\}$$

Représenter graphiquement la fonction

$$f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{R};\ x \mapsto x[(x-2)(x-3)(x-5)(x-7)(x-11)(x-13)(x-17)+1]$$

3008. Étudier le fonctionnement de la machine perpétuelle suivante :




3009. On considère la fonction

$$f\ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; x \mapsto x^2 + 2x + 3$$

(a) Vérifier que $f(17) - f(11)$ est un multiple de 6.

(b) Vérifier que $f(1000) - f(1)$ est un multiple de 99.

**Intermédiaire**

3010. Soit la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 7$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Un élève présume que pour n'importe quel entier positif $x$, $f(x)$ sera toujours un nombre impair se terminant par 1, 3 ou 7.
A-t-il raison ? Et si $x$ était un nombre négatif ?

3011. Représenter les couples ci-dessous par des points dans un système d'axes. Puis exprimer à l'aide d'une variable la fonction par la quelle ils ont été obtenus.

$$\begin{array}{rcl} 3 & \longrightarrow & 20 \\ 15 & \longrightarrow & 4 \\ 12 & \longrightarrow & 5 \\ 20 & \longrightarrow & 3 \\ 1 & \longrightarrow & 60 \end{array}$$

3012. Soit l'ensemble

$$A = \left\{\frac{2}{10}; \frac{2}{9}; \frac{2}{8}; \frac{2}{7}; \frac{2}{6}; \frac{2}{5}; \frac{2}{4}; \frac{2}{3}; \frac{2}{2}\right\}$$

Représenter graphiquement la fonction

$$f \ : \ A \longrightarrow \mathbb{R}; \ x \mapsto 8 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$$

3013. Une voiture roule à vitesse constante. On a relevé le tableau suivant :

| Distance en m | Durée du trajet en s |
|---|---|
| 176 | 11 |
| 144 | 9 |
| 640 | 40 |
| 465 | 29 |
| 496 | 31 |

Une erreur s'est glissée dans ce tableau. À quelle ligne se trouve-t-elle ?

**Avancé**

3014. Ayant fiat faire à ses élèves un travail écrit comportant 14 questions, la maîtresse décide de mettre des notes proportionnelles aux nombres de réponses correctes. Établir le barème pour ce travail (notes à 0,5 point près).

3015. Un élève présume que pour $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $x \mapsto x^2 - x + 3$, tous les nombres de la suite $f(2)$, $f(7)$, $f(12)$, $f(17)$, $f(22), \ldots$ sont des multiples de 5. A-t-il raison ?

3016. On échange le chiffre des unités et le chiffre des dizaines d'un nombre entier de deux chiffres. Le nombre ainsi obtenu est inférieur de 18 au nombre de départ.

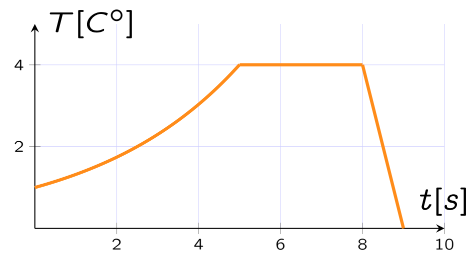
   (a) Trouver tous les nombres de deux chiffres qui vérifient cette propriété.

   (b) Représenter le chiffre des dizaines en fonction du chiffre des unités.

## 3.3 Généralités (3) : Les tracés

Les graphiques sont souvent utilisés pour décrire la variation de quantités physiques. Par exemple, un scientifique peut utiliser le graphique de la figure ci-contre pour donner la température d'une certaine solution à divers moments d'une expérience.

L'interprétation de ce graphique se fait comme suit : la température augmente graduellement du temps $t = 0$ au temps $t = 5$. Puis elle ne varie pas, et reste donc la même, entre $t = 5$ et $t = 8$. Finalement, elle diminue rapidement entre $t = 8$ et $t = 9$.




De même, si $f$ est une fonction, on peut utiliser un graphique pour indiquer les changements de $f(x)$ lorsque $x$ varie dans ce qu'on a appelé le domaine de définition de la fonction $f$.

### 3.3.1 Bases théoriques

**Définition 3.3.1 : Graphique d'une fonction**

Le **graphique d'une fonction** $f$ est le graphique de l'équation $y = f(x)$ pour $x$ appartenant au domaine de définition de $f$.

On ajoute souvent l'indication $y = f(x)$ au graphique. Si on note $P(a;\ b)$ le point $P$, alors $a$ représente la coordonnée horizontale du point et $b$ la coordonnée vertical. Autrement dit $a$ est la coordonnée des abscisses et $b$ celle des ordonnées.

En outre $f(a) = b$ si le point $P$ appartient à la fonction $f$.

Par définition, il y a exactement une valeur $f(a)$ pour chaque $a$ du domaine de définition de $f$. On utilise le test suivant dans le cas où on veut vérifier que la courbe donnée est bien le graphique d'une fonction.

**Propriété 3.3.1 : Test de la droite verticale**

Un ensemble de points dans un plan est la représentation graphique d'une fonction si toute droite verticale coupe la courbe en un point au plus.

**Procédé 3.3.1 : Tracer un graphique d'après un tableau**

Pour tracer un graphique d'après un tableau il faut

1. tracer un axe horizontal et un axe vertical ; **les graduer** ;
2. identifier des paires de coordonnées représentant des points du graphique et tracer un point par paire de coordonnées ;
3. si le tableau correspond à une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors on fait la supposition qu'il existe une infinité d'autres points entre deux points tracés, et par conséquent, on doit relier les points donnés ou calculés les uns aux autres ;
4. s'il vous manque des points, vous pouvez compléter le tableau d'après la fonction donnée, seulement dans le cas où la fonction est donnée (!).

La graduation des axes dépend des informations données dans l'énoncé et de la place à disposition.

### 3.3.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 3.3.1 : Exemple 1**

Représenter la fonction suivante, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, donnée sous forme partielle par les points du tableau ci-contre :

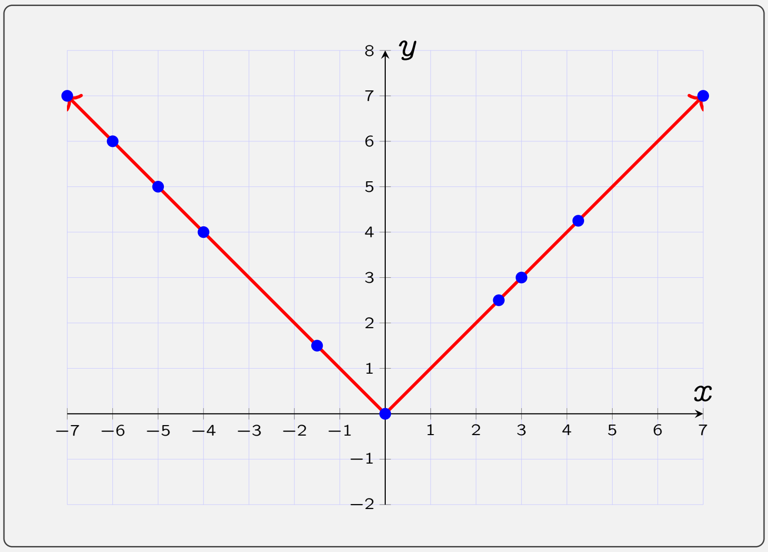
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-7$ | 7 |
| $-6$ | 6 |
| $-5$ | 5 |
| $-4$ | 4 |
| $-1{,}5$ | 1,5 |
| 0 | 0 |
| 2,5 | 2,5 |
| 3 | 3 |
| 4,25 | 4,25 |
| 7 | 7 |

**Solution**
On commence par tracer les points donnés. Ensuite on relie les points entre eux. N'ayant pas d'autre information, nous pouvons laisser des segments droits entre les points, pas de courbe.

En effet, cette fonction s'appelle **valeur absolue**, et s'écrit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+;\ x \ \mapsto \ |x|$$

qui à tout nombre réel lui associe la même valeur **sans le signe**.



**Exemple 3.3.2 : Exemple 2**

Représenter le graphique de la fonction $f$ définie comme suit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

**Solution** Vous devez commencer par compléter un tableau. La seule différence par rapport à d'autres définitions de fonctions, est que nous avons trois comportements différents pour une même fonction. On appelle une telle fonction **définie par parties**.

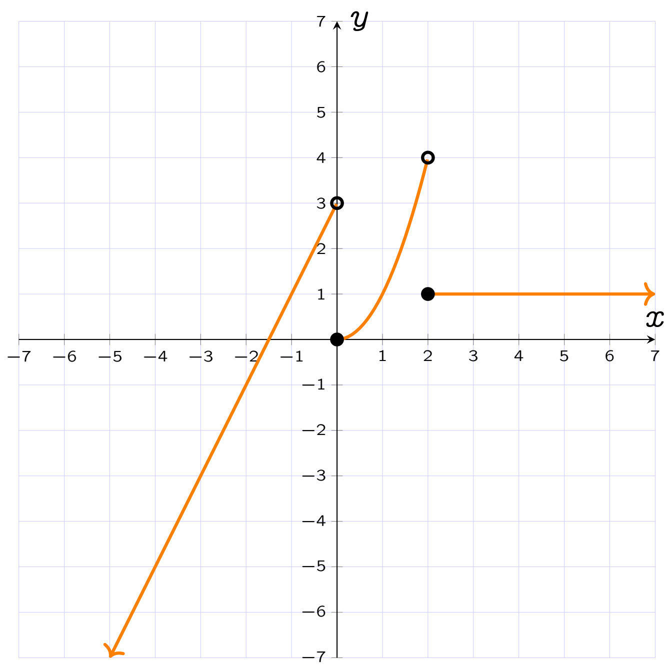
| $\boldsymbol{x}$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{y}$ | $-9$ | $-7$ | $-5$ | $-3$ | $-1$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

La vue du tableau semble plus simple.

Il ne reste plus qu'à regarder les valeurs extrêmes du tableau, pour avoir une idée du placement des axes et de sa graduation.

Puis placer les points sur le graphique et relier les points entre eux.

Seule difficulté, reconnaître dans la première partie qu'il s'agit d'une droite, dans la seconde partie une courbe (segment de parabole) et dans la troisième une droite horizontale (en fait une demi-droite dans les deux cas).



### 3.3.3 Exercices

Élémentaire

3017. Tracer la fonction donnée par les couples suivants

| $x$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |

3018. Après avoir tracé et gradué les axes placer les points ci-dessous dans votre repère.

| $x$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-0{,}1\overline{6}$ | $-0{,}2$ | $-0{,}25$ | $-0{,}\overline{3}$ | $-0{,}5$ | $-1$ | $\nexists$ |

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $0{,}5$ | $0{,}\overline{3}$ | $0{,}25$ | $0{,}2$ | $0{,}1\overline{6}$ | $0{,}14\ldots$ |

Peux-tu dire de quel fonction s'agit-t-il ? Peux-tu en donner une expression algébrique ?

3019. Après avoir tracé et gradué les axes placer les points ci-dessous dans votre repère.

| $x$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $36$ | $25$ | $16$ | $9$ | $4$ | $1$ | $0$ |

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $4$ | $9$ | $16$ | $25$ | $36$ | $49$ |

Peux-tu dire de quel fonction s'agit-t-il ? Peux-tu en donner une expression algébrique ?

3020. Après avoir tracé et gradué les axes placer les points ci-dessous dans votre repère.

| $x$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ |

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $1{,}41\ldots$ | $1{,}73\ldots$ | $2$ | $2{,}23\ldots$ | $2{,}\overline{449}$ | $2{,}64\ldots$ |

Peux-tu dire de quel fonction s'agit-t-il ? Peux-tu en donner une expression algébrique ?

3021. Après avoir tracé et gradué les axes placer les points ci-dessous dans votre repère.

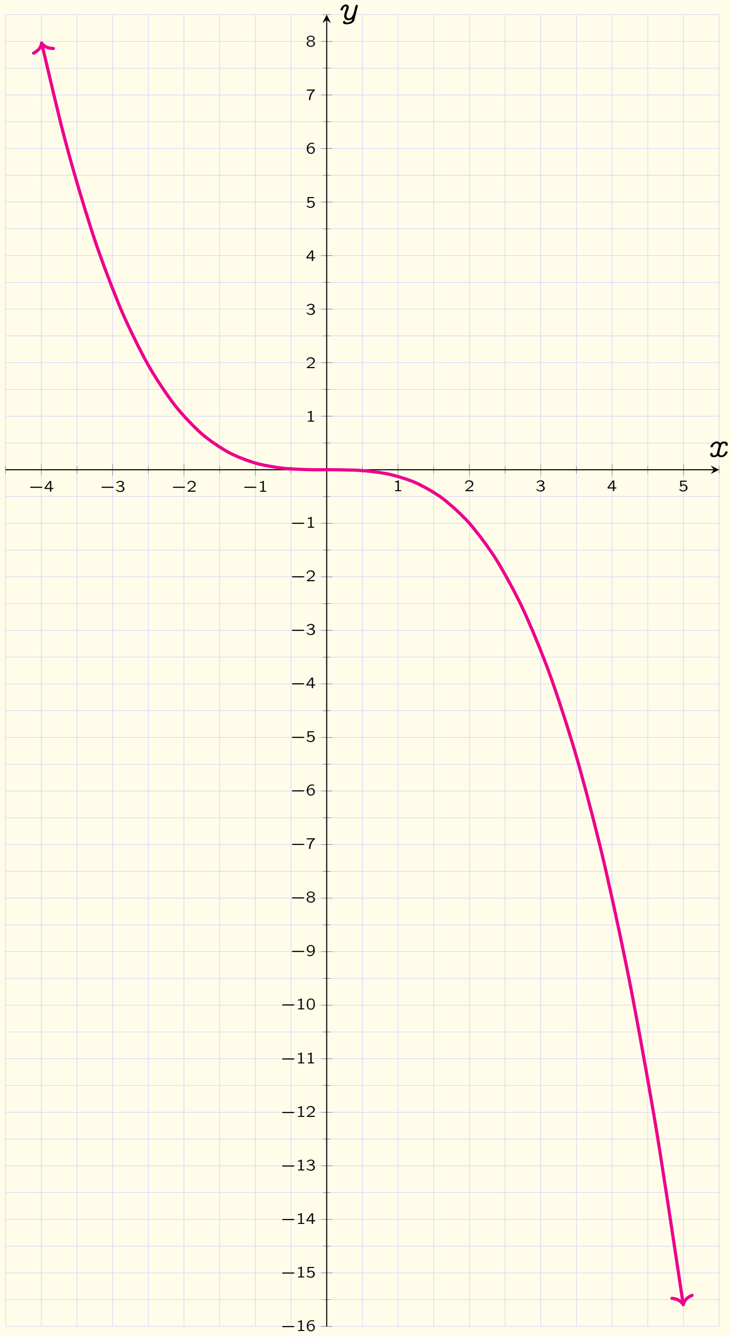
| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-64$ | $-27$ | $-8$ | $-1$ | $0$ |

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $8$ | $27$ | $64$ | $125$ |

Peux-tu dire de quel fonction s'agit-t-il ? Peux-tu en donner une expression algébrique ?

**Intermédiaire**

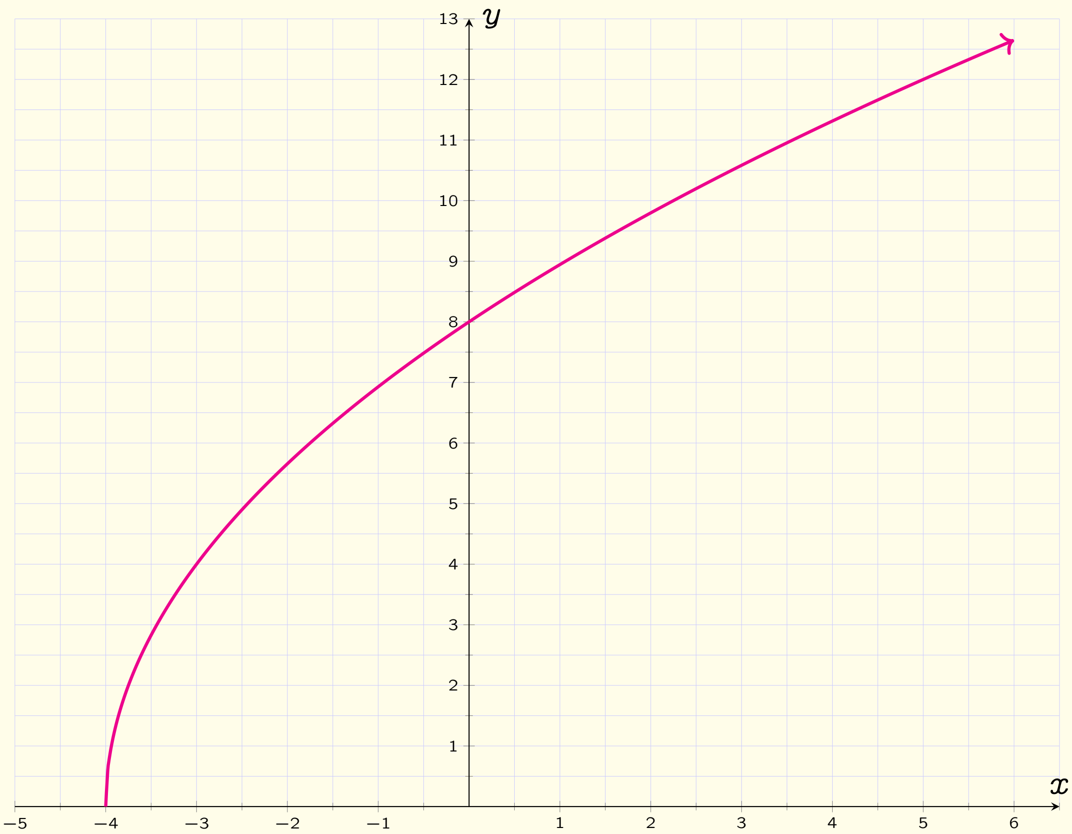
3022. Faire une lecture du graphique et compléter le tableau de valeurs




| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $8$ | $-3{,}375$ | | $-0{,}125$ | |

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | $15{,}625$ |

3023. Faire une lecture du graphique et compléter le tableau de valeurs




| $x$ | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | | 5,6 . . . | 6,9 . . . | |

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 10,5 . . . | 11,3 . . . | |

**Avancé**

3024.

## 3.4 Généralités (4) : Analyse de la représentation graphique d'une fonction

Dans cette section, nous introduisons l'analyse de fonctions via la lecture des graphiques.

### 3.4.1 Bases théoriques

Vous avez étudié les équations du premier degré. Il y était question de trouver tous les $x$ qui vérifient une certaine égalité, par exemple

$$2x - 1 = 0$$

ici on répond qu'il y a un seul $x$ qui vérifie l'égalité c'est $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$.
Et si je veux répondre à la quasi-même équation ci dessous ?

$$2x - 1 = 4$$

la réponse sera que $x$ ne peut prendre qu'une seule valeur et c'est $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

Ainsi, si pour une raison ou une autre on a envie de savoir quels sont tous les $x$ qui vérifient l'égalité pour diverses valeurs du "membres de droite" ?

Il est alors pratique d'écrire un $y$ à la place du membre de droite. On aura alors ce qu'on appelle **l'équation d'une fonction**. Dans notre exemple plus haut, il s'agit d'une droite :

$$2x - 1 = y \qquad \text{que l'on écrit de préférence} \qquad y = 2x - 1$$

On peut donc dire que

**Définition 3.4.1 : Équation d'une fonction**

Pour toute fonction $f$ bien définie, l'expression s'écrivant $\boldsymbol{y = f(x)}$ est l'**équation de la fonction $\boldsymbol{f}$**.

Remarquer que on a déjà rencontré cette écriture dans les sections précédentes.

La présence des lettres $x$ et $y$ dans l'équation, nous indique que l'une est dépendante de l'autre : comme $y$ figure seule d'un côté de l'égalité, elle sera dépendante. Et comme $x$ est l'argument de la fonction $f$, c'est elle qui est indépendante.

**Définition 3.4.2 : Variables indépendante et dépendante**

Dans $y = f(x)$

- $\boldsymbol{y}$ est la **variable dépendante**
- $\boldsymbol{x}$ est la **variable indépendante**

Il y a certaines propriétés remarquables pour une fonction qu'il faut connaître.

**Définition 3.4.3 : Ordonnée à l'origine**

Soit une fonction $f$. Le nombre $\boldsymbol{f(0)}$ est appelé **ordonnée à l'origine** de la fonction $f$.

En d'autre mots, c'est l'**image** de 0 par la fonction $f$.
Elle est située sur l'axe verticale du graphique et ses coordonnées sont $(0; f(0))$.

**Important : À ne pas confondre**

Les élèves confondent souvent $f(x) = 0$ et $f(0) = k$.

- $f(x) = 0$, est la donnée d'une équation. Avec elle on demande quels sont les $x$ pour lesquels $f(x)$ est égal à zéro.
- $f(0) = k$, nous dit que $k$ est l'ordonnée à l'origine de la fonction $f$. Ce nombre $k$ est la coordonnée verticale du point ordonnée à l'origine : $(0; f(0))$.

**Définition 3.4.4 : Les zéros d'une fonction**

Soit $f$ une fonction. On appelle **zéros** d'une fonction, l'ensemble des $x$ pour lesquels $f(x) = 0$.

Autrement dit, lorsque vous résolvez l'équation $f(x) = 0$, quelque soit la définition de la fonction $f$ (par exemple $f(x) = 2x - 1$ ou $f(x) = 3x^2 - x + 1$ ou encore $f(x) = \sqrt{1 - x}$), vous êtes en train de chercher les zéros de la fonction $f$. Ces zéros sont en fait les **solutions de l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$**.

**Définition 3.4.5 : Pré-image d'une image**

Soit une fonction $f$. Comme nous savons que $f(x)$ est l'image de $x$ par la fonction $f$. On définit la **pré-image de $\boldsymbol{f(x)}$ comme étant $\boldsymbol{x}$**.

**Définition 3.4.6 : Minimum et maximum d'une fonction**

Soit une fonction $f$. On définit le **maximum** d'une fonction, comme la valeur maximale de l'ensemble image de la fonction. Parfois ce maximum n'existe pas, on dit alors que $\max f = +\infty$.
Le **minimum** d'une fonction, est définit comme la valeur minimale de l'ensemble image de la fonction. Ici aussi, il se peut que ce minimum n'existe pas, auquel cas on dira que $\min f = -\infty$.

### 3.4.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 3.4.1 : Exemple 1**

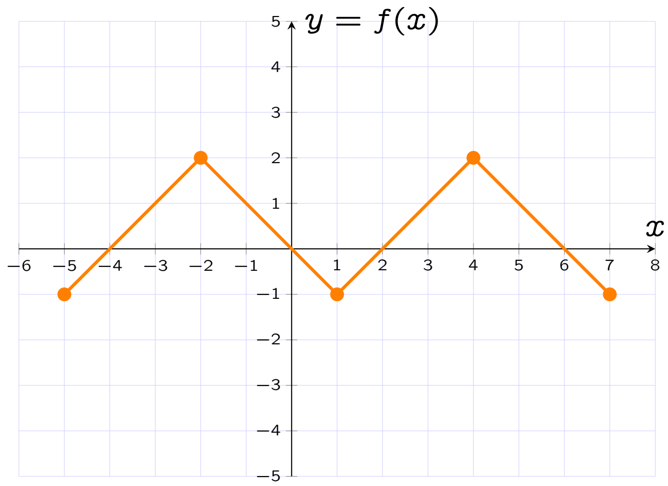
Dans le graphique ci contre, donner

(a) $f(1)$

(b) $f(0)$

(c) l'ensemble des $x$ tels que $f(x) = 1$

(d) l'ensemble des $x$ tels que $f(x) < -1$



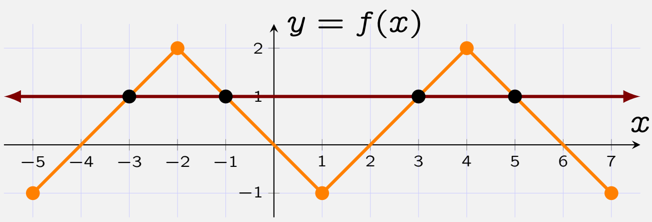

**Solution** Il s'agit d'une lecture de graphique. Remarquer que l'axe verticale, correspond aux **images**, et s'écrit aussi bien $y$ que $f(x)$. Il s'agit, comme dit dans les sections précédentes des images de $x$ par la fonction $f$.

Alors

(a) $f(1) = -1$

(b) $f(0) = 0$. Noter que $f(0)$ **pour toute fonction** est appelé **ordonnée à l'origine**.

(c) En d'autres termes il faut trouver tous les $x$ qui ont 1 pour image. On peut tracer une droite horizontale passant par $y = 1$ et lire l'intersection avec le graphe de la fonction donnée.

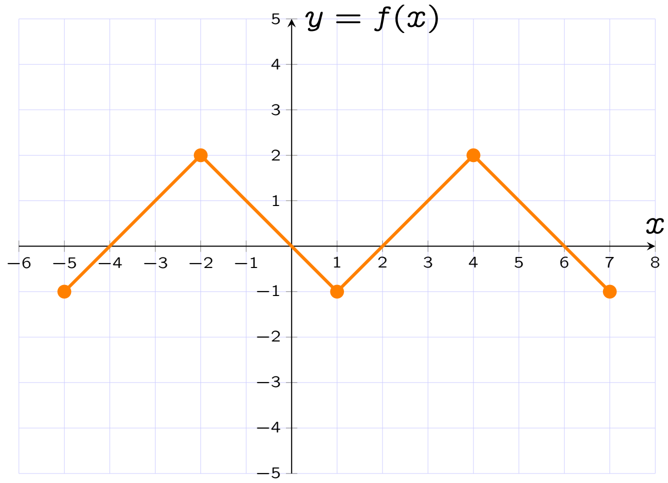



La réponse sont toutes les coordonnées $x$ de ces points, ici il y en a quatre. On écrit $f(x) = 1 \Rightarrow S = \{-3; -1; 3; 5\}$.

(d) On remarque qu'aucune image n'est inférieur à $-1$, c'est donc l'ensemble vide : $f(x) < -1 \Rightarrow S = \varnothing$.

**Exemple 3.4.2 : Exemple 2**

Dans le graphique ci-contre, donner l'ensemble de définition et l'ensemble image de la fonction $f$.




**Solution** On doit se souvenir de la définition de l'ensemble de définition et de l'ensemble image d'une fonction.

(a) L'ensemble domaine de définition de la fonction $f$ sont tous les nombres $x$ de l'axe horizontale, pour lesquels il existe une image. Ici on voit que seuls les valeurs allant de $x = -5$ jusqu'à $x = 7$ sont comprises dans l'ensemble domaine de définition, et qu'entre deux il n'y a pas de "trou". Autrement dit le tracé est sans interruption entre ces deux bornes.

Ainsi le domaine de définition de la fonction $f$, noté $\mathscr{D}_f$, est

$$\mathscr{D}_f = [-5; 7]$$

(b) L'ensemble image est l'ensemble des $f(x)$, autrement dit, tous les nombres de l'axe verticale qui ont une pré-image (un $x$). Ici aussi, il y a une valeur minimale et une valeur maximale.

Une manière pratique de le trouver : placer une règle horizontalement au bas du graphique. Puis monter régulièrement vers le haut du graphique. Lorsque vous rencontrez le graphique pour la première fois, vous identifiez la valeur sur l'axe verticale : c'est le minimum pour l'ensemble image.
Puis vous continuez jusqu'en haut du graphique. Durant le déplacement de votre règle, vous serez sur le graphique, vous devez alors identifier la dernière coordonnée sur l'axe verticale avant de ne plus être sur le graphique : elle correspond au maximum pour l'ensemble image de la fonction $f$.

Ainsi $y = -1$ est le minimum et $y = 2$ est le maximum, et l'ensemble image, noté $\mathscr{I}_f$ est

$$\mathscr{I}_f = [-1; 2]$$

**Exemple 3.4.3 : Exemple 3**

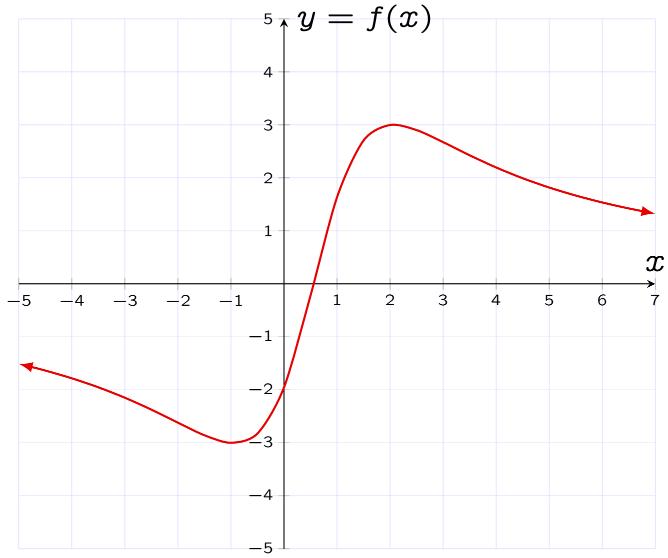
Voici le graphique de la fonction $f$. Donner

(a) l'ordonnée à l'origine

(b) le minimum de $f$

(c) le maximum de $f$

(d) le(s) zéro(s) de $f$




**Solution**

(a) l'ordonnée à l'origine, c'est la coordonnée verticale (sur l'axe des $y$) où la fonction "coupe" l'axe des ordonnées. Cette valeur est notée $f(0)$ et vaut $-2$. Donc,

$$f(0) = -2$$

(b) le minimum de $f$, pour ce point et le suivant, on observe que la courbe est donnée avec deux flèches aux extrémités. Cela veut dire que la courbe, sans autre indication, suit à l'infinit dans cette direction et dans ce sens. Toujours sans autre indication, on peut dire que le minimum est de $-3$, donc

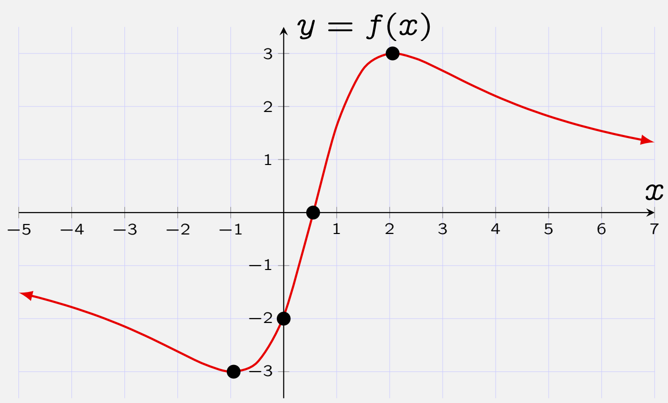
$$\min f = -3$$

(c) le maximum de $f$, même remarque que ci-dessus. Dans ce cas la maximum est de 3, et on écrit

$$\max f = 3$$

(d) le(s) zéro(s) de $f$, ce sont les $x$ solution de $f(x) = 0$, c'est-à-dire : pour quels $x$ l'image vaut zéro ? Ici c'est 0,5, et on écrit

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0{,}5\}$$



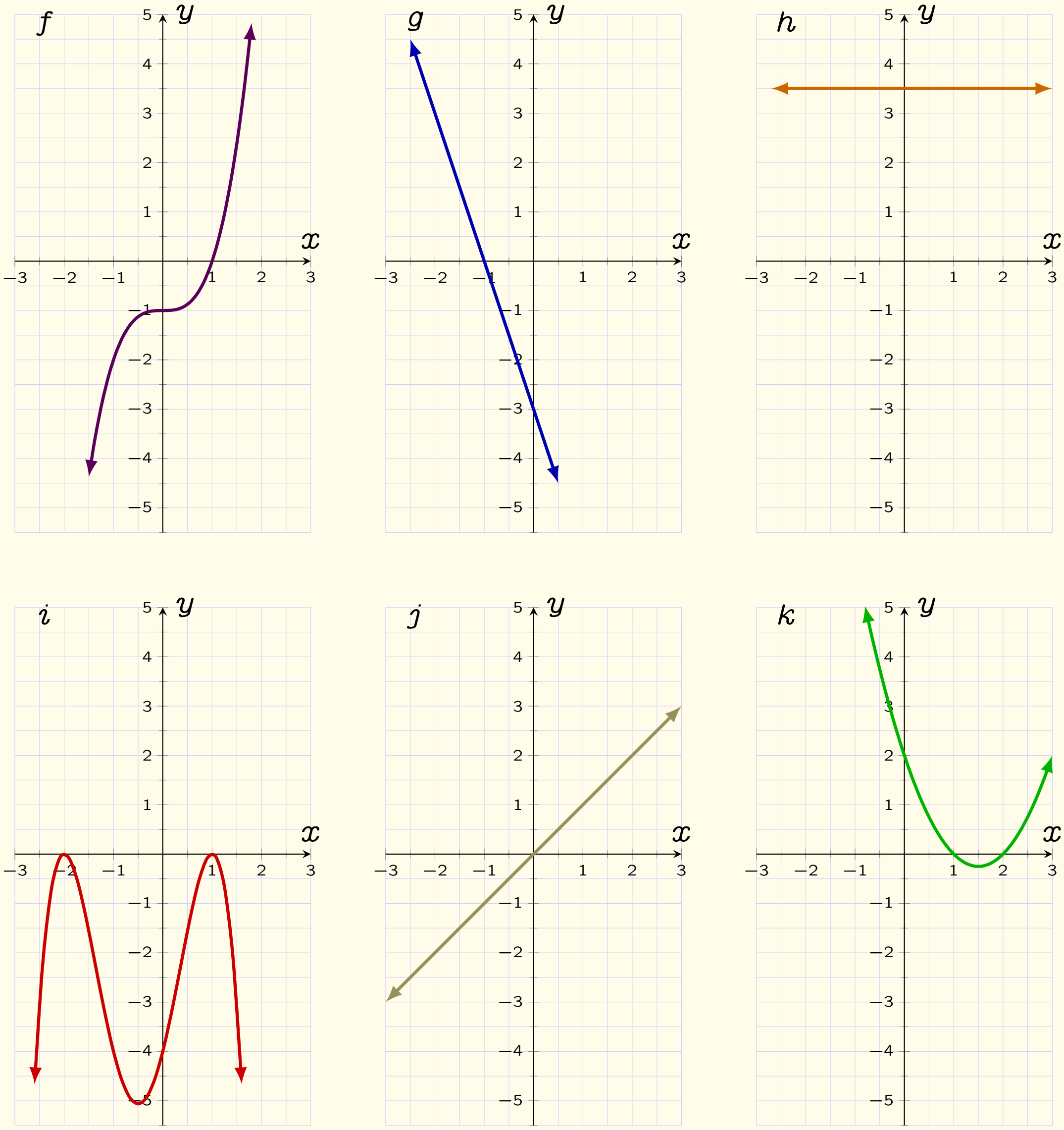
### 3.4.3 Exercices

Élémentaire

3025. Pour les graphiques ci-dessous donner

(a) l'ordonnée à l'origine

(b) les zéros visibles




3026. Pour les fonctions de l'exercice 3025 ci-dessus, donner

(a) le maximum,

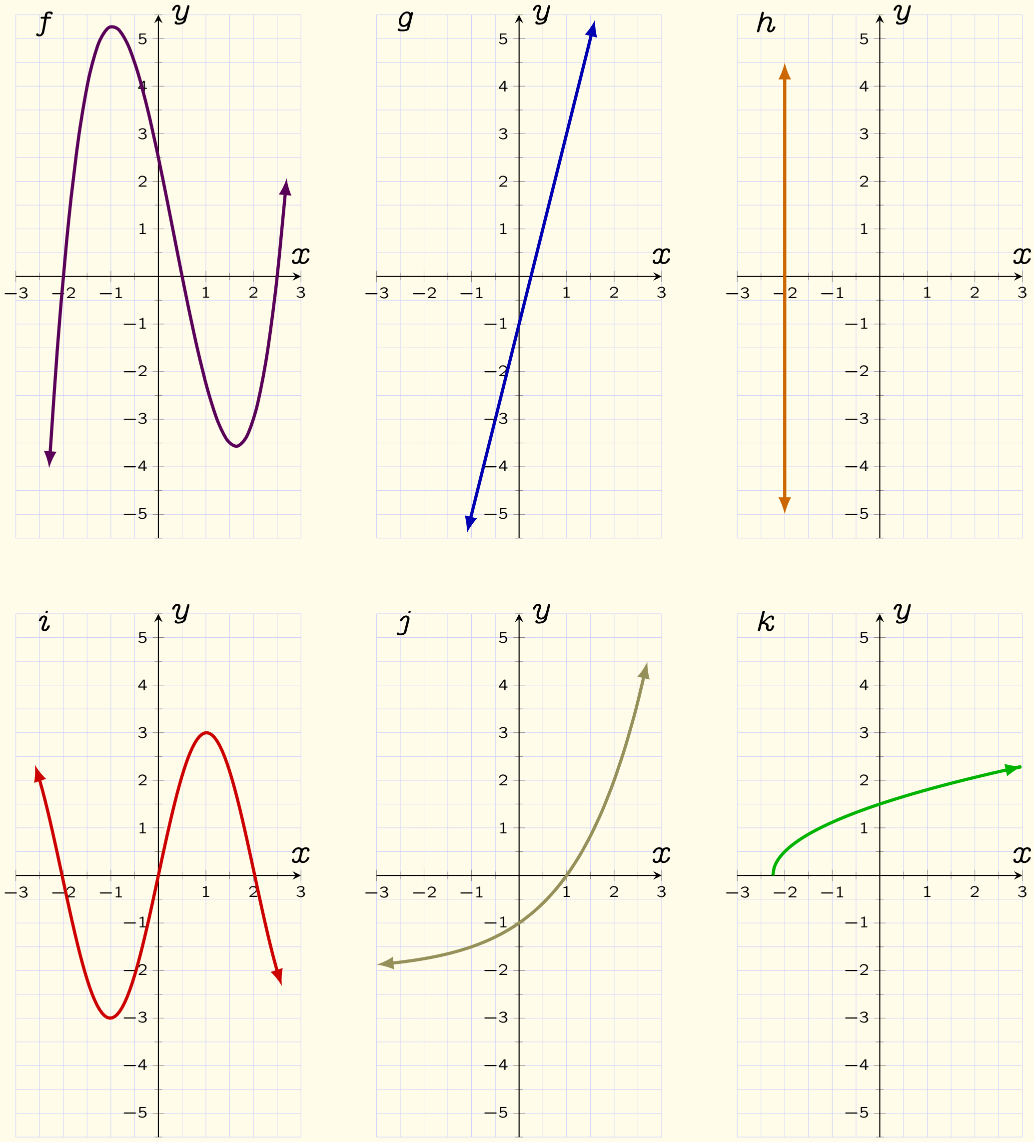
(b) le minimum, et

(c) le domaine de définition.

3027. Pour les graphiques ci-dessous donner

(a) l'ordonnée à l'origine

(b) les zéros visibles




3028. Pour les fonctions de l'exercice 3027 ci-dessus, donner

(a) le maximum,

(b) le minimum, et

(c) le domaine de définition.

**Intermédiaire**

3029. blabla

Avancé

3030.

## 3.5 Fonctions affines (1) :

### 3.5.1 Bases théoriques

### 3.5.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 3.5.1 : Exemple 1**

**Solution**

### 3.5.3 Exercices

Élémentaire

3031. blabla

**Intermédiaire**

3032. blabla

Avancé

3033.

## 3.6 Fonctions affines (2) :

### 3.6.1 Bases théoriques

### 3.6.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 3.6.1 : Exemple 1**

**Solution**

### 3.6.3 Exercices

**Élémentaire**

3034. blabla

**Intermédiaire**

3035. blabla

Avancé

3036.

## 3.7 Fonctions affines (3) :

### 3.7.1 Bases théoriques

### 3.7.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 3.7.1 : Exemple 1**

**Solution**

### 3.7.3 Exercices

**Élémentaire**

3037. blabla

**Intermédiaire**

3038. blabla

Avancé

3039.

# Analyse de données (6)

4

Objectifs

(A) utiliser des notions statistiques et de traitement de données, et notamment

   (1) représenter graphiquement une série statistique

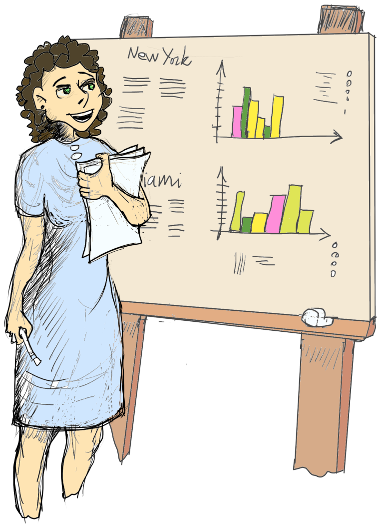
   (2) acquérir le vocabulaire propre au domaine (effectif, fréquence cumulée, échantillon, variable, moyenne, médiane, écart-type)

   (3) interpréter les notions de moyenne, de médiane, de variance et d'écart-type

   (4) calculer une moyenne, une médiane, un d'écart-type

## 4.1 Statistiques (1) : Notions

Reina possède deux hôtels, un à New York et l'autre à Miami. Elle voudrait savoir s'il y a une différence dans le nombre de nuits que ses clients restent dans ses hôtels.
Pour ce faire elle analyse les dernières 40 réservations faites sur chacun des deux hôtels, en relevant le nombre de nuits réservées par client.




**New York**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 2 | 4 | 2 | 6 | 3 | 4 | 5 |
| 8 | 3 | 1 | 3 | 4 | 2 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 3 | 6 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 6 | 2 | 4 |
| 8 | 1 | 5 | 7 | 2 | 1 | 8 | 5 | 3 | 2 |

**Miami**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 4 | 5 | 3 | 6 | 2 | 3 | 1 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 6 | 5 | 2 | 4 | 7 |
| 3 | 2 | 8 | 1 | 7 | 3 | 1 | 2 | 5 | 6 |
| 4 | 5 | 6 | 4 | 5 | 4 | 8 | 1 | 3 | 7 |

On peut alors se poser un certain nombre de questions

(a) Quel est le meilleur moyen d'organiser les informations ci-dessus ?

(b) Comment pourraient être affichées les données ?

(c) Quel est le nombre de nuits passées le plus souvent dans chaque hôtel ?

(d) Comment Reina pourrait-elle mesurer la durée moyenne des séjours dans chacun de ses deux hôtels et comment pourrait-elle mesurer la dispersion des données de chaque ensemble ?

En **statistique** nous récoltons et analysons des informations, des données, souvent numériques, qui nous permettent de comprendre le monde qui nous entoure.

Beaucoup, sinon tous, les gouvernements font des recensements à intervalles réguliers pour obtenir des informations sur la population. Les Nations Unies aident les pays en voie de développement dans les procédures de recensement, afin que des informations concernant le recensement puissent être collectées de manière précise pour être comparées avec d'autres pays.

### 4.1.1 Bases théoriques

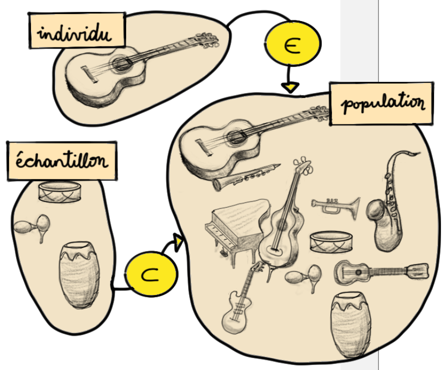
#### Vocabulaire statistique

**Définition 4.1.1 : Population, individus, échantillons**

Les ensembles étudiés par la statistique s'appellent **population**. Ce terme est hérité des premières études statistiques associées à des recensements démographiques. Cependant, la population statistique peut être l'ensemble des arbres d'une forêt, l'ensemble des étudiants d'une école, une certaine race bovine, l'ensemble des exploitations agricoles d'un pays, etc.

Les éléments de ces ensembles sont appelés **individus**, que ce soient des hommes, des arbres ou toute autre entité de l'ensemble considéré.

La population, souvent trop vaste (voire infinie), doit être fractionnée par le statisticien qui n'en étudiera que des sous-ensembles appelés **échantillons**.




Le fait d'avoir fractionné la population en sous-ensembles de taille plus modérée permet d'observer sur un échantillon les individus un par un. Ces observations peuvent être relatives à différents critères que l'on nomme *caractères statistiques*.

**Définition 4.1.2 : Caractères statistiques**

On nomme **caractères statistiques** les observations relatives à un certain critère.

**Exemple : caractère statistique**

Soit la population constituée des étudiants de l'Ecole de culture générale. Nous pouvons décider d'en étudier un échantillon, par exemple ceux inscrits en deuxième année. Les observations peuvent être relatives à

- leur taille ;
- leur note moyenne en mathématiques ;
- leur goûts musicaux ;
- le métier exercé par leurs parents.

Un caractère statistique permet de déterminer une répartition des individus d'une population selon un certain critère.

**Définition 4.1.3 : Modalité**

Les valeurs possibles de ce critère sont appelées **modalités**. Les modalités d'un même caractère sont incompatibles entre elles et exhaustives ; un individu quelconque de la population présente une et une seule modalité du critère étudié.

**Exemple : modalités**

- Le caractère "sexe" a deux modalités : féminin (F) ou masculin (M).
- Le caractère "Classe à l'ECG" a 5 modalités : préparatoire (P), première (1e), deuxième (2e), troisième (3e) et quatrième (4e).

Certaines modalités peuvent également se présenter sous la forme d'intervalles ou de classes.

**Exemple : modalités intervalles**

Pour le caractère "surface agricole utilisée", on peut avoir les modalités

- moins de 10 ha ;
- de 10 à 60 ha ;
- plus de 60 ha.

**Définition 4.1.4 : Caractères quantitatifs**

On peut dire qu'un **caractère statistique est quantitatif si ses modalités sont mesurables** et donc représentées par des nombres.

**Exemple : caractères quantitatifs**

- l'âge, le poids, la taille ;
- le nombre d'enfants à charge ;
- le taux de cholestérol ;
- le diamètre des arbres.

Ce sera le cas de la plupart des caractères qui seront traités dans ce cours. De manière générale, tout caractère lié à une mesure est par nature un caractère quantitatif.

**Définition 4.1.5 : Caractères qualitatifs**

On peut dire qu'un **caractère statistique est qualitatif si ses modalités ne sont pas mesurables**.

**Exemple : caractères qualitatifs**

- le sexe ;
- la nationalité ;
- les saisons ;
- les couleur.

**Définition 4.1.6 : Variables discrètes**

Une variable statistique est dite **discrète** si ses modalités ne prennent que des valeurs isolées (non continues).

**Exemple : variables discrètes**

- notes scolaires ;
- les effectifs ;
- parts de pizza ;
- pointures.

**Remarque** Il ne faut pas confondre **discret** et **entier**. Une variable prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ est une variable **discrète**, mais la réciproque n'est pas forcément vraie. C'est le cas par exemple du nombre de parts de pizza mangée où deux valeurs possibles sont une part et demie et deux parts : 1,5 et 2.

**Définition 4.1.7 : Variables continues**

Une variable statistique est dite **continue** si elle peut prendre n'importe quelle valeur intermédiaire entre deux bornes données.

De façon générale, les variables statistiques liées à des mesures où interviennent le temps, l'espace ou encore la masse, sont des variables continues.

**Exemple : variables continues**

- l'âge, la taille, le poids ;
- la surface agricole ;
- le kilométrage annuel d'une voiture ;
- le diamètre des arbres.

Une des premières tâches de la statistique est de traiter des données qui souvent sont en très grand nombre et données de manière brute, non ordonnée.
Une deuxième tâche est de les présenter sous une forme lisible : sous forme de **tableaux** ou de **graphiques**. Il s'agit alors de décrire une population d'où le nom de **statistique descriptive**.

### 4.1.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 4.1.1 : Exemple 1**

Les gestionnaires d'un château veulent étudier le nombre de personnes visitant le site au moment du repas de midi. Duran 30 jours consécutifs ils enregistrent les différentes informations

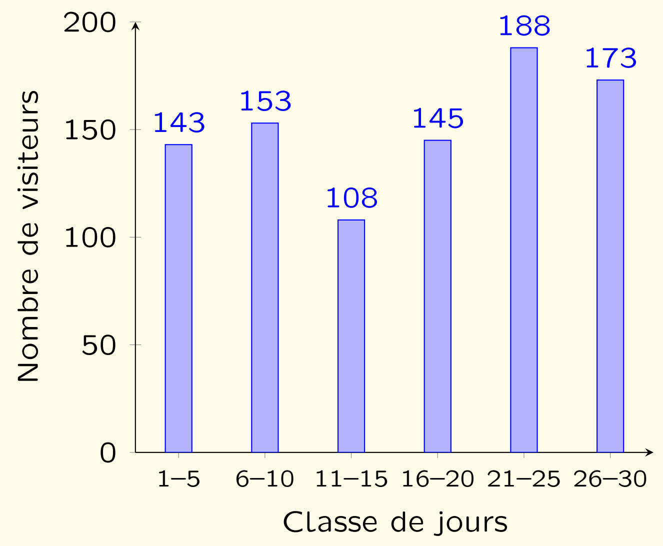
| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 37 | 30 | 17 | 13 | 46 | 23 | 40 | 28 | 38 | 24 | 23 | 22 | 18 | 29 | 16 |
| 35 | 24 | 18 | 24 | 44 | 32 | 54 | 31 | 39 | 32 | 38 | 41 | 38 | 24 | 32 |

Dresser un tableau des effectifs, vous mettez en première colonne les intervalles de 5 jours consécutifs et en seconde colonne le nombre de personnes ayant visité le chateau.

**Solution**

Comme les informations concernant l'affluence a été enregistrée dans l'ordre des jours analysés, on aura 6 tranches de 5 jours, donc notre tableau comportera si lignes :

| Jours | Effectif |
|---|---|
| 1 à 5 | 143 |
| 6 à 10 | 153 |
| 11 à 15 | 108 |
| 16 à 20 | 145 |
| 21 à 25 | 188 |
| 26 à 30 | 173 |

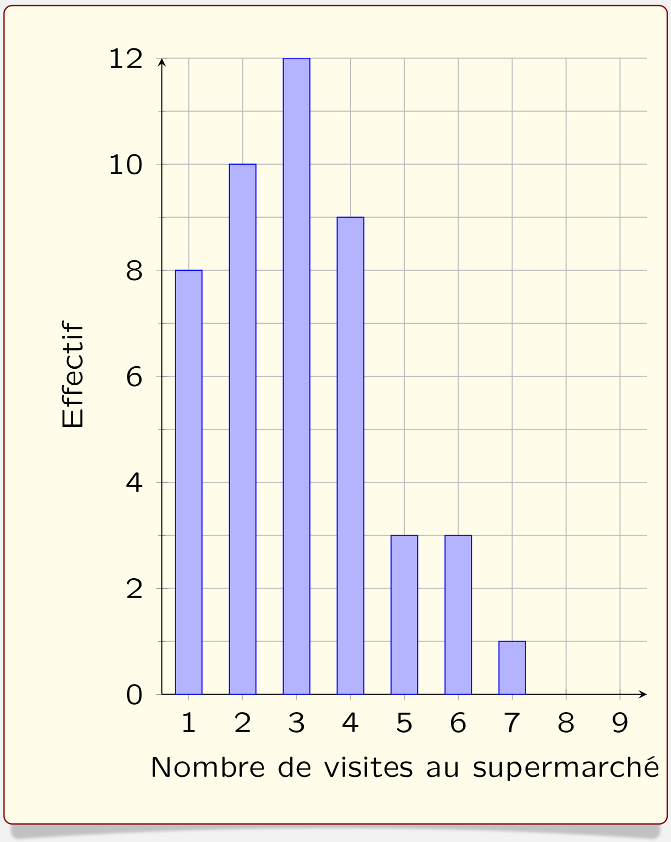



et le graphique montrera horizontalement (en abscisses) le différents groupes ou "classes" de jours, ici groupés par tranches de cinq jours. C'est comme si on les avait numérotés.

En haut de chaque "baton" ou "rectangle" on peut noter le nombre de personnes que cumule la tranche. On appelle cette valeur **effectif**.

**Exemple 4.1.2 : Exemple 2**

Un enquêteur travaillant pour un grand supermarché, questionna des clients, choisis au hasard, sur leurs habitudes de consommation : “Combien de fois avez-vous fait des courses dans notre supermarché la semaine dernière ?”. Suite aux réponses des clients, un graphique a été dressé :




(a) Combien de clients ont répondu à la question de l’enquêteur ?

(b) Combien de clients ont-ils acheté dans le supermarché une ou deux fois ?

(c) Quel est le pourcentage de clients qui ont acheté plus de cinq fois ?

---

**Solution 2**

Il s’agit d’une lecture de graphique. En abscisses, nous avons le nombre de fois que les clients sont allé faire leurs courses au supermarché. On constate que beaucoup plus de personnes sont allées acheter une fois que sept fois, par exemple.

(a) Combien de clients ont répondu à la question de l’enquêteur ?
Il faut faire la somme des **effectifs** de chaque valeurs sur l’axe des abscisses : $8+10+12+9+3+3+1=46$. C’est donc 46 client qui ont répondu à l’enquêteur.

(b) Combien de clients ont-ils acheté dans le supermarché une ou deux fois ?
On fait la somme des coordonnées verticales des deux premièrs valeurs horizontales qui désignent le nombre de personnes qui ont fait 1 ou 2 fois leurs courses dans le magasin la semaine dernière : $8+10=18$. C’est donc 18 personnes qui ont acheté une ou deux fois dans le supermarché.

(c) Quel est le pourcentage de clients qui ont acheté plus de cinq fois ?
On doit faire le rapport du nombre de personnes qui ont acheté plus que cinq fois par le nombre total de personnes interrogées : on fait donc la somme des ordonnées des deux dernières colonnes puis on divise cela par 46 :

$$\frac{4}{46} \approx 8{,}7\%$$

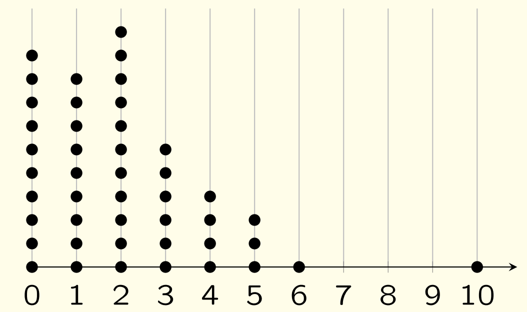
### 4.1.3 Exercices

**Élémentaire**

3040. On a demandé aux employés d'une entreprise :

"combien de temps quittez-vous les bureaux pour des rendez-vous de travail durant la semaine ?"

Le tableau ci-dessous est une description des résultats obtenus.




(a) Combien d'employés n'ont pas quitté l'entreprise ?
(b) Quel est le pourcentage d'employés ayant quitté l'entreprise plus de cinq fois ?
(c) Comment décririez-vous la valeur 10 ?

3041. Vingt élèves ont répondu à la question : "Combien de téléviseurs avez-vous dans votre foyer ?", et les données suivantes ont été collectées :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 0 |
| 0 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

(a) Constuire un graphe à points pour décrire les données.
(b) Comment décririez-vous les informations ? Y a-t-il des valeurs extrêmes ?
(c) Combien de foyers n'ont pas de TV ?
(d) Quel est le pourcentage de foyers ayant trois téléviseurs ou plus ?

3042. En théorie le nombre de cure-dents dans une boite est de 50, mais leur nombre réel tend à varier. Pour analyser ce phénomène, le nombre de cure-dents de 60 boites ont été comptés. Voici le résultat :

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 52 | 51 | 50 | 50 | 51 | 52 | 49 | 50 | 48 | 51 | 50 | 47 | 50 | 52 |
| 48 | 50 | 49 | 51 | 50 | 49 | 50 | 52 | 51 | 50 | 50 | 52 | 50 | 53 | 48 |
| 50 | 51 | 50 | 50 | 49 | 48 | 51 | 49 | 52 | 50 | 49 | 49 | 50 | 52 | 50 |
| 51 | 49 | 52 | 52 | 50 | 49 | 50 | 49 | 51 | 50 | 50 | 51 | 50 | 53 | 48 |

(a) Dresser un tableau des effectifs pour ces données. (Indice : Première colonne nombre de cure-dents, deuxième colonne nombre de boites)

(b) Tracer un graphe en colonnes pour décrire les données du tableau.

(c) Quel est le pourcentage de boites contenant exactement 50 cure-dents ?

3043. Voici les notes (sur 100) de 50 étudiants à un test de science.

92 29 78 67 68 58 80 89 92 69 66 56 88 81 70 73 63 55
67 64 62 74 56 75 90 56 47 59 64 89 39 51 87 89 76 59
72 80 95 68 80 64 53 43 61 71 38 44 88 62

(a) Construire un tableau des effectifs, en utilisant les classes 20—29, 30—39, . . . , 90—100

(b) Quel est le pourcentage d'étudiants qui ont obtenu 80 points et plus ?

(c) Quel est le pourcentage d'étudiants qui ont obtenu moins de 50 points ?

(d) Quel est l'intervalle (ou classe) qui a le plus grand effectif ?

3044. Les résultats d'un examen de 60 points de 45 étudiants ont été enregistrés et voici les valeurs :

34 37 44 51 51 39 33 58 40 42 43 43 47 37 35
41 43 48 50 55 44 44 52 54 59 39 31 29 44 57
45 34 29 27 18 49 41 42 37 42 43 43 45 34 51

(a) Construire un tableau des effectifs, en utilisant les intervalles résultat suivants 15—19, 20—24, etc.

(b) Tracer un graphe en colonnes pour décrire les données du tableau.

(c) Une note de 6 est donnée aux étudiants ayant un résultat de 50 points et plus. Quel pourcentage d'étudiants ont obtenu la note de 6 ?

**Intermédiaire**

3045. .

Avancé

3046. .

## 4.2 Statistiques (2) : données continues

Les informations qui sont collectées par le statisticien, sont dites continues, si ces données peuvent prendre **toutes** les valeurs comprises entre deux bornes.
C'est donc par **intervalles** ou encore **classes** que nous devons les classer, les ordonner, les présenter.
Cet intervalle, que nous nomons classe, devient l'unité représentatives de toutes les mesures prises entre les deux bornes de l'intervalle.
Le graphique utilisé pour ce genre de donnée est l'**histogramme**, un diagramme en barres rectangulaires **collées**.
On va appeler la **classe modale**, l'intervalle qui est le plus présent dans l'ensemble des données récoltées par les enquêteurs. Noter qu'il peut y avoir plusieurs classes modales.

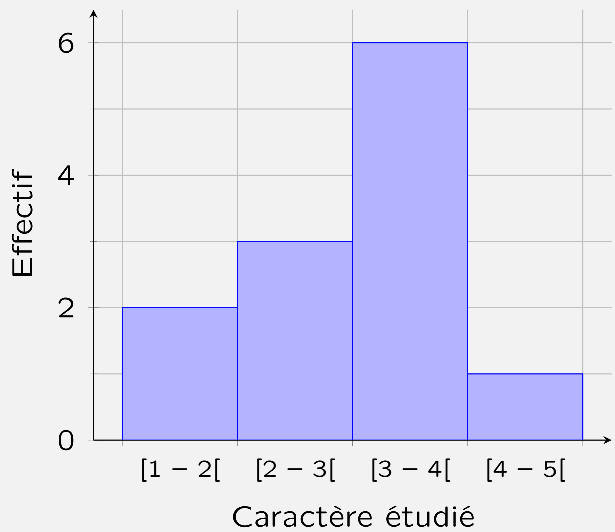
### 4.2.1 Bases théoriques

**Définition 4.2.1 : Classe modale**

On appelle **classe modale** l'intervalle qui est le plus représenté dans l'ensemble des données récolées. Il peut y avoir plusieures classes modales dans l'ensemble de données étudié.

**Définition 4.2.2 : Histogramme**

Un **histogramme** est un graphique à barres ou rectangles qui son **contigus** et dont les coordonnées en abscisses sont des intervalles, que l'on appelle classes.




Deux intervalles consécutifs s'écrivent

$$[2-\mathbf{3[}\text{ et }\mathbf{[3}-4[$$

où vous remarquez que 3 n'appartient qu'au deuxième intervalle !

### 4.2.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 4.2.1 : Exemple 1**

Les poids, en kilogrammes, des colis envoyés en un jour par la poste locale sont listés ci-contre.

4,07 — 1,63 — 3,52 — 2,91
3,24 — 3,47 — 5,29 — 4,63
3,11 — 2,85 — 3,76 — 4,92
3,44 — 1,39 — 2,58 — 2,22

(a) Organiser les données en intervalles d'entiers.

(b) Dresser un graphe en barres.

(c) Trouver l'intervalle modale (ou classe modale).

(d) Dans le mois, 564 colis sont envoyés par la poste locale. Estimer le nombre de colis pesant plus de 4 kilogrammes.

**Solution 1**

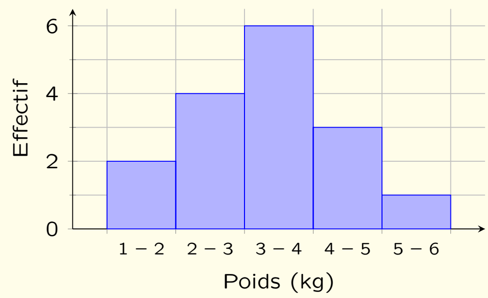
(a) Organiser les données en intervalles d'entiers.

On va créer cinq classes. Comme le nombre le plus petit des informations résultées est 1,39 et le plus grand 5,29, on prendra tous les entiers entre 1 et 6. Cela donne le tableau suivant :

| Poids p (kg) | Effectif |
|---|---|
| $1 \leqslant p < 2$ | 2 |
| $2 \leqslant p < 3$ | 4 |
| $3 \leqslant p < 4$ | 6 |
| $4 \leqslant p < 5$ | 3 |
| $5 \leqslant p < 6$ | 1 |

(b) Dresser un graphe en barres.

Pour tracer le graphe on prend dans l'ordre les intervalles, que l'on va placer en abscisses et les effectifs en ordonnées. Comme dit plus haut, les rectangles (ou barres) doivent être collés.




(c) Trouver l'intervalle modale (ou classe modale).

On voit sur le graphique (et dans le tableau) que la classe ou intervalle qui a le plus d'effectif est [3; 4[

(d) Dans le mois, 564 colis sont envoyés par la poste locale. Estimer le nombre de colis pesant plus de 4 kilogrammes.

D'après le tableau, on envoie 4 colis pesant plus de 4 kg en un jour, donc on peut dire que par jour $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ des colis envoyés pèsent plus de quatre kilogramme, cette proportion est gardée pour les 564 colis envoyés dans le mois. Donc, on estime à

$$\frac{1}{4} \cdot 564 = 141$$

le nombre de colis envoyés dans le mois.

### 4.2.3 Exercices

Élémentaire

3047. Voici une table du poinds en kilogrammes d'une équipe de joueurs de volleyball.

(a) Expliquez pourquoi le poids, constitue une variable continue.

(b) Tracer un graphe pour ces données (histogramme).

(c) Trouver et interpréter la classe modale.

| Poids p | Effectif |
|---|---|
| $75 \leqslant p < 80$ | 2 |
| $80 \leqslant p < 85$ | 5 |
| $85 \leqslant p < 90$ | 8 |
| $90 \leqslant p < 95$ | 7 |
| $95 \leqslant p < 100$ | 5 |
| $100 \leqslant p < 105$ | 1 |

3048. Un inspecteur de plantes prends un échantillon de semis d'une pépinière et mesure leur hauteur en millimètres. Voici ses résultats.

(a) Combien de semis mesurent 100 mm ou plus ?

(b) Quel pourcentage de semis se situent entre 60 et 80 mm ?

(c) Représenter ces données dans un histogramme.

(d) Trouver la classe modale.

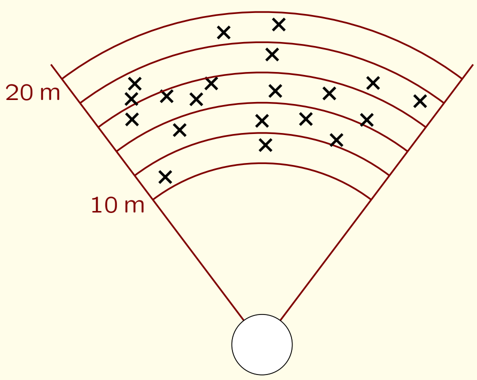
(e) Il y a 857 semis dans la pépinière. Estimer le nombre de semis qui mesurent

i. moins de 100 mm

ii. entre 40 et 100 mm

| Heuteur h | Effectif |
|---|---|
| $20 \leqslant h < 40$ | 4 |
| $40 \leqslant h < 60$ | 175 |
| $60 \leqslant h < 80$ | 15 |
| $80 \leqslant h < 100$ | 8 |
| $100 \leqslant h < 120$ | 2 |
| $120 \leqslant h < 140$ | 4 |

3049. Les essais d'un lanceur de poids lors d'un entrainement sont consignés sur le croquis ci-contre.




(a) Organiser les informations sous forme de classe.

(b) Tracer un histogramme.

(c) Trouver la classe modale.

3050. Un groupe d'athèles étudiants ont obtenus les temps ci-dessous, en secondes, lors d'une course de 200 m :

**Résultats du 200 mètres**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26,57 | 25,22 | 27,09 | 26,44 | 24,13 | 27,83 | 25,72 | 26,40 |
| 23,12 | 27,44 | 24,76 | 25,09 | 28,70 | 26,13 | 23,94 | 27,23 |
| 26,35 | 28,91 | 26,30 | 27,02 | 24,19 | 25,27 | 27,45 | 26,45 |
| 27,40 | 27,22 | 25,88 | 23,50 | 26,49 | 27,19 | 28,37 | 25,17 |
| 28,08 | 26,80 | 28,14 | 26,82 | 27,66 | 25,41 | 24,89 | 27,92 |

(a) Organiser les informations en classes.

(b) Quel pourcentage d'étudiants a obtenu un chrono plus rapide que 25 secondes ?

(c) Tracer un histogramme.

(d) Trouver la classe modale.

Intermédiaire

3051. .

Avancé

3052. .

## 4.3 Statistiques (3), mesures centrales

Lorsqu'on étudie un échantillon de données, souvent numériques, il est utile, comme nous l'avons déjà vu, de les ordonner. Ceci est fait en ordonnant les informations sous forme de liste, soit par ordre croissant (le plus souvent d'ailleurs), soit par ordre décroissant. On peut aussi les placer dans un tableau en y faisant des calculs, par exemple le centre d'un intervalle qui agirait comme le représentant de la *classe* étudiée. On peut encore tracer un graphique, que l'on appelle le plus souvent un historigramme, ou encore placder les valeurs dans une figure ronde, ayant la forme de camembert, pour aprécier, d'un coup d'oeil, les rapports quantitatif, le plus souvent, sous forme de pourcentage.
Cependant, comme nous avons à faire à des données numériques, nous aimerions connaître quel est le centre des données étudiées. Cette information couplée avec une information sur la dispersion, nous permettent de mieux apprécier et surtout de comparer l'ensemble du domaine étudié.
Cette première information est appelée le **mesure centrale**.

### 4.3.1 Bases théoriques

#### La moyenne

Lorsque vous passez des tests, vous obtenez une note. Une suite de notes, constitue un exemple d'échantillon de données statistiques. Sur ces informations, vous êtes déjà habitués à calculer une moyenne. C'est notre première *mesure centrale*

**Définition 4.3.1 : La moyenne arithmétique**

La **moyenne arithmétique** ou simplement **moyenne**, notée $\boldsymbol{\overline{x}}$, d'un ensemble de données statistiques numériques, est la somme de l'ensemble des données statistiques divisée par leur nombre. Autrement dit, $\boldsymbol{\overline{x}}$, qui se prononce "x barre", se calcule comme suit

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

où chaque information collectée est notée $x_n$, avec l'indice $n$ variant entre 1 et $N$.

Par exemple si

$$3{,}5 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 4{,}5$$

constituent quatre de mes résultats à quatre tests différents, on aura

$$x_1 = 3{,}5 \qquad x_2 = 6 \qquad x_3 = 4 \qquad x_4 = 4{,}5$$

et $N = 4$ puisqu'il y a quatre notes. La moyenne se calcule alors comme vous avez l'habitude de la calculer, à savoir

$$\overline{x} = \frac{3{,}5 + 6 + 4 + 4{,}5}{4} = 4{,}5$$

**Cette valeur ne peut être calculée que sur des valeurs numériques**, c'est assez naturel !
La moyenne est très pratique, mais est sensible aux valeurs extrêmes. En effet si à ces notes nous ajoutons une note supplémentaire, par exemple $x_5 = 2$, la moyenne sera de

$$\overline{x} = \frac{3{,}5 + 6 + 4 + 4{,}5 + 2}{5} = 4$$

Ce comportement ne se retrouve pas dans la seconde mesure centrale, **la médiane**.

#### La médiane

**Définition 4.3.2 : La médiane**

La **médiane**, notée $\boldsymbol{\tilde{x}}$, est la *valeur centrale* d'un ensemble de données numériques ordonnées. S'il y a $N$ valeurs, le **rang** de la valeur centrale est $n = \dfrac{N+1}{2}$.

Si $n$ **est un entier**, alors la **médiane** est $\tilde{x} = x_n$.

Si $n$ **n'est pas un entier**, alors la **médiane** est $\tilde{x} = \dfrac{x_{[n]} + x_{[n]+1}}{2}$, où $[n]$ est la partie entière du nombre $n$.

La médiane peut ne pas faire partie de la série statistique étudiée.

Par exemple dans la série

$$3{,}5 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 4{,}5 \qquad 2$$

il y a $N = 5$ éléments. On commence par l'ordonner dans l'ordre croissant

$$2 \qquad 3{,}5 \qquad 4 \qquad 4{,}5 \qquad 6$$

et le rang de la médiane est $\dfrac{N+1}{2} = \dfrac{5+1}{2} = 3$, c'est-à-dire

$$\tilde{x} = x_3 = 4$$

On sait désormais que sur cette série de notes, **la moitié** des notes sont des 4 ou plus, et l'autre moitié 4 et moins.

Dans le cas de la série d'origine

$$3{,}5 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 4{,}5$$

il y a $N = 4$ éléments. On commence par l'ordonner dans l'ordre croissant

$$\underbrace{3{,}5}_{x_1} \qquad \underbrace{4}_{x_2} \qquad \underbrace{4{,}5}_{x_3} \qquad \underbrace{6}_{x_4}$$

et le rang de la médiane est $\dfrac{N+1}{2} = \dfrac{4+1}{2} = 2{,}5$, c'est-à-dire 2, d'après la théorie, donc

$$\tilde{x} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{4 + 4{,}5}{2} = 4{,}25$$

On sait désormais que sur la série de notes d'origine (sans le 2), **la moitié** des notes sont des 4,25 ou plus, et l'autre moitié des 4,25 et moins.

### 4.3.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 4.3.1 : Exemple 1**

Julie et Andrea jouent au *netball* dans des clubs différents. Leurs performances cette saison est comme suit :

Julie a joué 11 matchs et a marqué 14, 22, 17, 31, 15, 19, 24, 28, 26, 35 et 29 paniers ;

Andrea a joué 8 matchs et a marqué 17, 21, 36, 19, 16, 28, 26 et 32 paniers.

Laquelle a la moyenne la plus grande, Julie ou Andra ?

**Solution** On calcule la moyenne de Julie, $\overline{x}_J$ et la moyenne d'Andrea, $\overline{x}_A$, puis on compare :

$$\overline{x}_J = \frac{14+22+17+31+15+19+24+28+26+35}{11} = \frac{260}{11} \approx 23{,}6 \text{ paniers.}$$

$$\overline{x}_A = \frac{17+21+36+19+16+28+26+32}{8} = \frac{195}{8} \approx 24{,}4 \text{ paniers.}$$

En conséquence c'est Andrea qui a, en moyenne, marqué le plus grand nombre de paniers.

**Exemple 4.3.2 : Exemple 2**

Les deux séries statistiques suivantes montent le nombre de poids qu'il y a dans des gousses de petits poids, prises au hasard. Donner la médiane de chaque série.

(a) 3, 6, 5, 7, 7, 4, 6, 5, 6, 7, 6, 8, 10, 7, 8

(b) 3, 6, 5, 7, 7, 4, 6, 5, 6, 7, 6, 8, 10, 7, 8, 9

**Solution 2**

(a) On ordonne la série dans l'ordre croissant

$$3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 10 \qquad \text{(15 termes)}$$

Donc $N = 15$, et $n = \dfrac{N+1}{2} = 8$, la médiane est le $8^{\text{ième}}$ terme :

$$\tilde{x} = 6$$

(b) On ordonne la série dans l'ordre croissant

$$3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ \boxed{6,\ 7},\ 7,\ 7,\ 7,\ 8,\ 8,\ 9,\ 10 \qquad \text{(16 termes)}$$

Donc $N = 15$, et $n = \dfrac{N+1}{2} = 8{,}5$, la médiane est la moyenne entre le $8^{\text{ième}}$ et le $9^{\text{ième}}$ termes :

$$\tilde{x} = \frac{6+7}{2} = 6{,}5$$

**Exemple 4.3.3 : Exemple 3**

Le tableau suivant montre le nombre d'aces servis par des joueurs de tennis dans le premier set d'un tournoi.

| Nombre d'aces | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Occurrence | 4 | 11 | 18 | 13 | 7 | 2 |

Calculer la moyenne de services gagnants que l'adversaire n'a pas pu toucher, aces, qu'il y a eu dans ces sets.

**Solution 3** Pour répondre à la question, il vaut mieux présenter les informations sous forme d'un tableau et de calculer le nombre réel d'aces.

| Aces | Occurrences | Produit |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 11 | 22 |
| 3 | 18 | 5 |
| 4 | 13 | 52 |
| 5 | 7 | 35 |
| 6 | 2 | 12 |
| Totaux | 55 | 179 |

2 aces ont été marqués 11 fois. Au lieu de calculer $2+2+...+2$, nous calculons simplement le produit $2 \cdot 11$ ce qui fait 22.

$$\overline{x} = \frac{\text{somme des aces}}{\text{total occurrences}} = \frac{179}{55} \approx 3{,}25 \text{ aces}$$

**Exemple 4.3.4 : Exemple 4**

Le tableau suivant montre le nombre de personnes assises par table dans un restaurant. Trouver la médiane de la série.

| Nombre de personnes | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Occurrence | 1 | 0 | 3 | 9 | 12 | 7 | 4 | 2 |

**Solution 4**
Dans ce tableau le nombre total de tables dans le restaurant est le nombre total d'occurrences. En effet la table dit que 6 personnes sont assises à 3 tables différentes. Ce que l'on doit trouver est le nombre médian de personnes par table. Le nombre total de tables est donc $N = 38$.
**Comme les informations de la première colonne sont déjà ordonnées dans**

**l'ordre croissant** il suffit de trouver le rang de la médiane :

$$\frac{N+1}{2} = \frac{39}{2} = 19{,}5$$

et donc, d'après la théorie, la médiane est la moyenne entre le nombre de personnes assises entre la $19^{\text{ième}}$ et la $20^{\text{ième}}$ table, c'est-à-dire

$$\tilde{x} = \frac{9+9}{2} = 9 \text{ personnes.}$$

**Exemple 4.3.5 : Exemple 5**

Jusqu'à présent, Evariste a passé quatre tests de mathématique cette année. Chaque test était sur 20 points et sa moyenne a été de 15 points.
Quel doit être le nombre de points qu'Evariste doit avoir au cinquième test pour obtenir une moyenne de 16 points ?

---

**Solution 5** Nous savons que la moyenne actuelle d'Evariste est de 15, c'est-à-dire que

$$\text{moyenne}_{\text{Evariste}} = \frac{\text{somme des points aux 4 tests}}{4} = 15$$

Autrement dit, si l'on garde l'égalité de droite, que

$$\text{somme des points aux 4 tests} = 4 \cdot 15 = 60$$

Notons le nombre de points qu'il aura au cinquième test par la lettre $x$, et construisons la nouvelle moyenne qu'il voudrait avoir, c'est-à-dire 16, en intégrant l'inconnue $x$ :

$$\frac{\text{somme des points aux 4 tests} + x}{5} = 16$$

et résolvons pour $x$. Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{60+x}{5} &= 16 \\ \Leftrightarrow \quad 60+x &= 5 \cdot 16 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 80-60 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 20 \end{aligned}$$

Il doit obtenir 20 points au cinquième test pour espérer avoir une moyenne de 16.

### 4.3.3 Exercices

**Élémentaire**

3053. Ci-après sont données les points réalisés par deux équipes de basketball sur un ensemble de 12 matchs :

| | |
|---|---|
| Equipe A : | 91, 76, 104, 88, 73, 55, 121, 98, 102, 91, 114, 82 |
| Equipe B : | 87, 104, 112, 82, 64, 48, 99, 119, 112, 77, 89, 108 |

Quelle équipe a la moyenne de points marqués la plus haute ?

3054. Calculer la médiane de chacune des séries ci-après :

(a) 21 23 24 25 29 31 34 37 41

(b) 105 106 107 107 107 107 109 120 124 132

(c) 173 146 128 132 116 129 141 163 187 153 162 184

3055. Une récente enquête dans un collège révèle le nombre de frères et soeurs par étudiants :

1, 1, 3, 2, 2, 2, 0, 0, 3, 2, 0, 0, 1, 3, 3, 4, 0, 0, 5, 3, 3, 0, 1, 4, 5,
1, 3, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 5, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 1, 2

(a) Quel est la moyenne par étudiant ?

(b) Quel est la médiane de frères et soeurs par étudiant ?

3056. La table suivante montre la moyenne des précipitations par mois dans la ville de Kuala Lumpur :

| Mois | J | F | M | A | M | J | J | A | S | O | N | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Moyenne (mm) | 157 | 202 | 258 | 291 | 222 | 127 | 98 | 161 | 220 | 249 | 259 | 190 |

Calculer la moyenne de la quantité de pluie tombée par mois sur cette ville.

3057. Le prix des 10 dernières maisons à vendre chez MaisonJolie étaient les suivants :

146′400 CHF, 127′600 CHF, 211′000 CHF, 192′500 CHF,
256′400 CHF, 132′400 CHF, 148′000 CHF, 129′500 CHF,
131′400 CHF, 162′500 CHF

(a) Calculer la moyenne et la médiane des prix des maisons à vendre. Commentez votre résultat.

(b) Quelle mesure centrale (la moyenne ou la médiane) allez-vous utiliser si vous êtes

 (i) un vendeur qui attend de vendre votre maison ;

 (ii) entrain de regarder pour acheter une maison dans la commune ?

**Intermédiaire**

3058. Le graphe en barres ci-contre, donne la valeur des donnations à une organisation internationnale, collectés lors d'une manifestation culturelle.

(a) Construire un tableau des effectifs d'après le graphique.

(b) Déterminer le nombre total des dons obtenus.

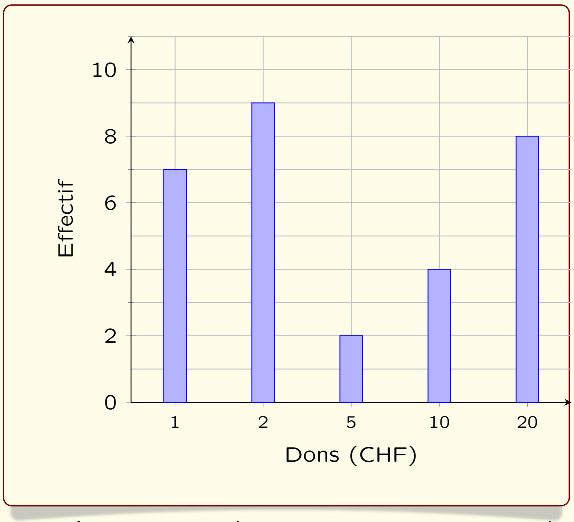
(c) Trouver :

(i) le mode

(ii) la moyenne

(iii) la médiane

(d) Laquelle de ces mesures centrale peut-être trouvée aisément en lisant le graphe ?




3059. Jackie a joué 8 matchs de netball cette saison et a obtenu une moyenne de 17 buts par match. Combien de buts doit-elle marquer au prochain match pour augmenter à 18 sa moyenne de buts par match ?

3060. Trouver la valeur de $x$ si

(a) 7, 15, 6, 10, 4 et $x$ ont une moyenne de 9.

(b) 10, $x$, 15, 20, $x$, $x$, 17, 7 et 15 ont une moyenne de 12.

3061. Le samedi, Maurice a cueilli des poires de 32 arbres. Il a cueilli une moyenne de 17 poires par arbre.

Le dimanche, il a cueilli encore des poires pour une moyenne de 12 poires par arbre.

Sur l'ensemble du week-end, Maurice a cueilli une moyenne de 14 poires par arbre.

De combien d'arbres Maurice a-t-il cueilli des poires le dimanche ?

3062. La moyenne, la médiane et le mode de sept nombres sont 8, 7 et 6 respectivement. Deux des nombres en question sont 8 et 10. Le plus petit des nombres est 4. Trouver quel est le nombre le plus grand.

**Avancé**

3063. Considérons quatre nombres $a$, $b$, $c$ et $d$. La moyenne de $a$ et $b$ est 7, la moyemme de $b$ et $c$ est 10, et la moyenne de $c$ et $d$ est 9. Trouver la moyenne de $a$ et $d$.

## 4.4 Statistiques (4) : moyenne de données groupées

### 4.4.1 Bases théoriques

### 4.4.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 4.4.1 : Exemple 1**

**Solution**

### 4.4.3 Exercices

**Élémentaire**

3064. blabla

**Intermédiaire**

3065. blabla

Avancé

3066.

## 4.5 Statistiques (5) : mesures de dispersion

La mesure de dispersion *naturelle* d'une série statistique est l'écart ou étendue qu'il y a entre la valeur maximale et minimale de la série. Par exemple les écarts des résultats au bac en France à une année donnée est donné dans le tableau[1] ci-dessous

| min/max étendue | maths | physique | sciences n. | histoire-géo. | philosophie |
|---|---|---|---|---|---|
| trimestre 1 | 2.0/18.7 | 2.25/19.5 | 5.0/17.50 | 5.0/16.6 | 3.0/17.5 |
| trimestre 2 | 1.6/19.0 | 2.40/18.7 | 2.7/18.50 | 3.1/16.4 | 4.0/16.0 |
| trimestre 3 | 2.0/19.5 | 2.00/19.6 | 2.5/18.25 | 3.0/17.5 | 1.0/18.0 |
| bac | 1/20 19 | 1/19 18 | 2/19 17 | 1/18 17 | 2/19 17 |

On peut constater que, quelque soit la discipline, l'étendue au bac est plus importante que durant l'année, et qu'aucune note n'utilise l'échelle complète de 0 à 20. Par exemple la note de mathématique a l'étendu la plus grande : 19. L'étendue est l'indice le plus simple pour mesurer la dispersion des valeurs d'une variable quantitative.
Comme déjà montré avec la différence qu'il y a entre la moyenne et la médiane, l'étendue est très sensible aux valeurs extêmes : les minima peuvent être complètement modifiés par un candidat n'ayant pas travaillé du tout avant son examen, comme les maxima par un élève génial.
On voit donc que cette mesure de dispersion est assez instable. Elle ne peut pas répondre à la question : les notes dans une discipline, sont-elles groupées autour de la moyenne ou bien très ou peu dispersées ? Sont-elles plus ou moins dispersées que dans une autre discipline ?
Pour répondre à ces question on va utiliser l'**écart-type**.

1. Brigitte ESCOFIER, Jérôme PAGÈS, Initiation aux traitements statistiques, Presse universitaires de Rennes, 1997, p.58

### 4.5.1 Bases théoriques

Prenons un exemple. Voici une série statistique

$$2 \qquad 3 \qquad 5 \qquad 9 \qquad 11$$

la moyenne $\overline{x}$ est de 6, pour chaque valeur $x$ de la série, on peut trouver l'écart à la moyenne par la formule $x - \overline{x}$. On obtien le tableau ci-contre.

| $x$ | $x - \overline{x}$ |
|---|---|
| 2 | $-4$ |
| 3 | $-3$ |
| 5 | $-1$ |
| 9 | 3 |
| 11 | 5 |

Une première observation est que la somme des écart est égale à zéro. En conséquence on ne peut pas en prendre la moyenne (pourquoi ?). Par contre si on élève au carré chaque valeur on aura que des nombres positifs

$$\frac{(-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 3^2 + 5^2}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Enfin, puisque nous avons élevé au carré chaque étendue, nous devons prendre la racine carré de cette valeur **afin de retrouver les unités de départ**. Ceci nous donne ce qu'on appelle l'**écart-type** : $\sqrt{12} \approx 3{,}46$.

**Définition 4.5.1 : Ecart-type**

Pour une série statistique de $N$ valeurs et de moyenne $\overline{x}$, l'**écart-type**, noté $\boldsymbol{\sigma}$, est donné par la formule suivante

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \overline{x})^2}{N}}$$

Cependant on lui préfère la formule plus *pratique* suivante

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{p} (x_i^2 \cdot n_i)}{N} - \overline{x}^2}$$

Pour cette deuxième formule, voici les explications des symboles :

- $\boldsymbol{x_i^2}$ : c'est le carré de chacun des nombres de la série statistique.
- $\boldsymbol{n_i}$ : c'est le nombre de fois que le nombre $x_i$ est présent dans la série, dans l'exemple ci-dessus, chaque $x$ est présent une seule fois, donc pour tous $n_i = 1$.
- $\boldsymbol{p}$ : est le nombre de données $x$, chacune est numérotée, dans l'exemple ci dessur $p = 5$
- $\boldsymbol{N}$ : est le nombre total d'informations $x$ récoltées. Dans l'exemple ci-dessus, comme chaque nombre $x$ n'est présent qu'une seule fois, $N = p = 5$.
- $\boldsymbol{i}$ : est ce qu'on appelle un indice, il est là que pour distinguer les informations, il ne participe pas dans les calculs.

**Plus les valeurs $x$ sont proches de la moyenne $\overline{x}$ plus $\sigma$ est petit.**

### 4.5.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 4.5.1 : Exemple 1**

Un vendeur de légumes achète des oranges à deux grossistes différents. Il prend au hasard cinq caisses à chaque grossiste, et compte le nombre d'oranges tachées dans chacune d'entre elles.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Grossiste A | 4 | 16 | 14 | 8 | 8 |
| Grossiste B | 9 | 12 | 11 | 10 | 13 |

Trouver la moyenne et l'écart-type pour chaque série de valeurs et comparer les fournisseurs grossistes.

**Solution**

On va dresser un tableau pour chaque série avec les informations nécessaire au calcul de l'écart-type.

**Grossiste A**

| $x$ | $n$ | $x \cdot n$ | $x^2$ | $x^2 \cdot n$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 4 | 16 | 16 |
| 16 | 1 | 16 | 256 | 256 |
| 14 | 1 | 14 | 196 | 196 |
| 8 | 2 | 16 | 64 | 128 |
| Total | **5** | **50** | **532** | **596** |

**Grossiste B**

| $x$ | $n$ | $x \cdot n$ | $x^2$ | $x^2 \cdot n$ |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 9 | 81 | 81 |
| 12 | 1 | 12 | 144 | 144 |
| 11 | 1 | 11 | 121 | 121 |
| 10 | 1 | 10 | 100 | 100 |
| 13 | 1 | 13 | 169 | 169 |
| Total | **5** | **55** | **615** | **615** |

$$\overline{x} = \frac{4+16+14+8\cdot 2}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{596}{5} - 10^2} = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{30} \approx 4{,}38$$

$$\overline{x} = \frac{9+12+11+10+13}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{615}{5} - 11^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

Les oranges fournies par Grossiste A ont en général moins de taches, mais celles du Grossiste B sont plus régulières.

### 4.5.3 Exercices

Élémentaire

3067. Trouver (calculer) les écart-type des deux séries suivantes

(a) 5, 8, 9, 10

(b) 3, 5, 11, 13, 18

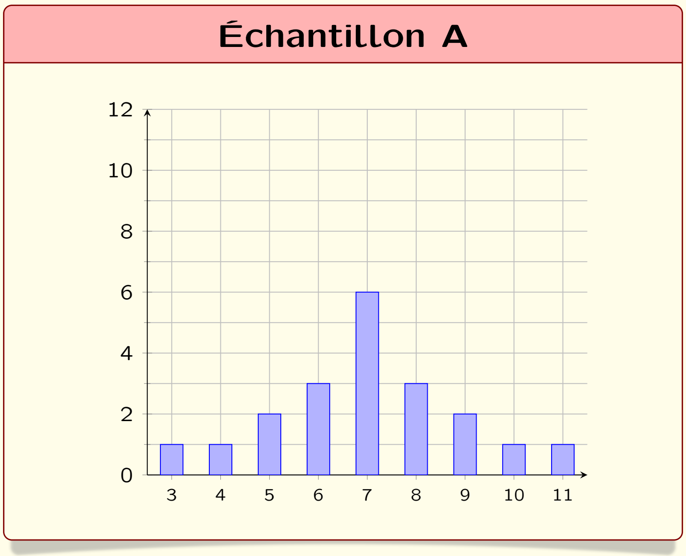
3068. Soit la série 4, 7, 8, 10, 11, 32

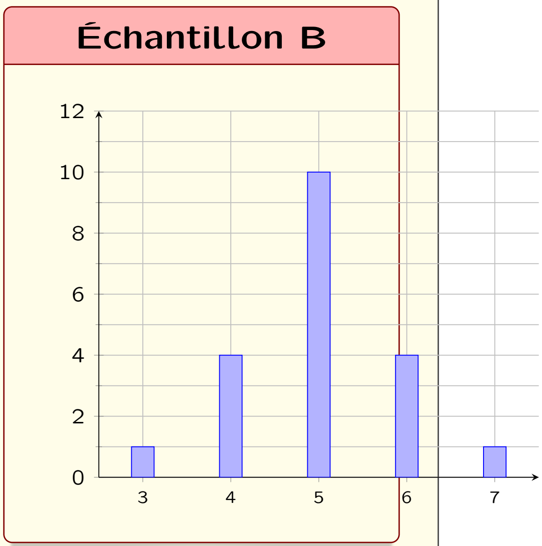
(a) Trouver l'écart-type ;

(b) identifier et enlever de la série la valeur extême, puis recalculer l'écart-type ;

(c) décrire quel effec avait la valeur extrême sur l'écart-type.

3069. Considérons les deux graphes en barres suivants.




(a) En regardant le grahpique, quel est la séri statistique qui a la plus large étendue ?

(b) Calculer la moyenne de chaque série.

(c) Pour chaque série trouver

(i) l'étendue ;

(ii) l'écart-type

(d) Expliquer pourquoi l'écart-type donne une meilleure information que l'étendue.

3070. Deux joueurs de baseball comparent leurs performances à la batte pour une séquence de dix matchs. Leurs nombres de coups réussis par match étaient

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Michkey | 5 | 4 | 1 | 0 | 5 | 4 | 0 | 5 | 4 | 2 |
| Julio | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 6 | 2 | 3 | 3 |

(a) Montrer que chaque joueur a la même moyenne et la même étendue.

(b) Quelle performance est plus variable d'après vous ?

(c) Vérifier votre réponse précédente en calculant l'écart-type des deux séries.

(d) Quelle information, l'étendue ou l'écart-type donne la meilleure information dans ce cas ?

Intermédiaire

3071.

Avancé

3072.

## 4.6 Statistiques (6) : Mesures de position et de dispersion

### 4.6.1 Bases théoriques

### 4.6.2 Exercices résolus (exemples)

**Exemple 4.6.1 : Exemple 1**

**Solution**

### 4.6.3 Exercices

Élémentaire

3073. blabla

Intermédiaire

3074. blabla

**Avancé**

3075.