ECG Ella-Maillart

MATH

EM

ATIQUE

2e

Robinson Cartez

2023-2024 v0.1
Genève

Table des matières

Le mot *algèbre* vient du mot *ilm al-jabr w'al muqabala*, titre d'un livre écrit au 19e siècle par le mathématicien arael al-Khworizimi.

On atraduit ce titre comme la science de la restitution et de la réduction, ce qui signifie la transposition et la combinaisono de termes semblables (d'une équation). L'expression *al-jabr* a conduit au nom de la branche des mathématiques que nous appelons algèbre.

En algèbre, nous utilisons des symboles ou lettres, comme a, b, c, d, e, x, y, pour désigner des nombres arbitraires. Cette caractéristique générale de l'algèbre est illustrée par de nombreuses formules emplyées dans les disciplines scientifiques et techniques.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

On dit aussi de l'algèbre, qu'elle sert à structurer la pensée...

Objectifs

(A) étude des équations quadratiques afin de
  (1) résoudre des équations à l'aide des formules de Viète ;
  (2) reconnaître et résoudre une équation à produit nul, dont les facteurs peuvent être du second degré ;
  (3) vérifier ses résultats (en général une quadratique peut avoir jusqu'à deux solutions) ;
  (4) résoudre des problèmes comportant une expression du deuxième degré à une inconnue ;

(B) étude de l'inéquation linéaire, dans le but de
  (1) connaître la notation d'intervalle ouvert et fermé ;
  (2) résoudre des inéquations ;

(C) étude de systèmes d'inéquations linéaires à une inconnue, et notamment
  (1) résoudre un système d'inéquations ;
  (2) résoudre des problèmes d'application ;

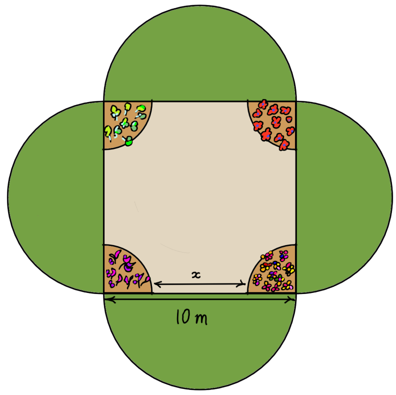
(D) et finalement initiation aux équations trigonométrique, comportant
  (1) la résolution graphique et algébrique d'inéquations trigonométriques simples soit dans un intervalle donné, soit dans tout $\mathbb{R}$

1.1 Équation quadratique (1) : Le mariage

Nous allons commencer par un petit problème.

1.1.1 Enoncé

Un parc de forme carrée est bordé par quatre demi-cercles de gazon, comme le montre le figure ci-dessous.
Pour préparer un mariage, on plante des fleurs aux quatre coins du carré. On sait que la pelouse couvre une surface quatre fois plus grande que la surface où sont plantées les fleurs.
Supposons que les surfaces, par ailleurs toutes de même dimension, où sont plantées les fleurs sont distantes de x mètres.



1.1.2 Questions

1. Expliquer pourquoi le rayon des quart de cercle où sont plantées les fleurs vaut $\left(5 - \dfrac{x}{2}\right)$ mètres.
2. Montrer que $x^2 - 20x + 50 = 0$.
3. Si vous résolvez cette équation, pouvez-vous trouver la distance séparant les champs des fleurs ?

1.1.3 Commentaires

Vous savez résoudre les équations du type

$$ax + b = 0 \qquad \text{avec } a \neq 0$$

Ce sont des **équations linéaires** à une inconnue x. Cette famille d'équations peut avoir, au maximum, *une seule* solution.

Un exemple est l'équation $7x - 4 = 0$ qui a une seule solution $x = \dfrac{4}{7}$.

Un autre exemple est $3 - 6x = x - 7x + 3$ qui a une infinité de solutions.

Et enfin $-x + 1 = x - 2x$ qui n'a pas de solutions.

1.1.4 Bases théoriques

Comme vu précédemment, les équations dites linéaires peuvent avoir au maximum une seule solution.
En effet, comme résoudre une équation se fait en isolant l'inconnue, celle-ci une fois isolée, montre sa valeur directement, puisque son exposant est 1. On rappelle que

$$x = x^1$$

Alors, si $3x - 2 = 0$

$$\begin{array}{rrcl} & 3x-2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 3x & = & 2 \\ \Leftrightarrow & x & = & \dfrac{2}{3} \end{array}$$

Et la solution se lit directement : $x = \dfrac{2}{3}$.
Pour les équations **quadratiques** cela se passe différemment.

Définition 1.1.1 : Équation quadratique

Une **équations quadratique** est une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des constantes avec $a \neq 0$.
Une telle équation peut avoir *deux*, *une* ou *zéro* solutions.

Dans la définition ci-dessus, on ne dit rien au sujet des constantes b et c, on peut alors traiter le cas où $b = c = 0$.

C'est un cas particulier d'équation quadratique et le plus simple, et on a la règle suivante :

Propriété 1.1.1

Si

$$x^2 = k$$

Alors

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{k} & \text{si } k > 0 \\ x = 0 & \text{si } k = 0 \\ S = \varnothing & \text{il n'y a pas de solution dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Une équation quadratique est en fait un polynôme en x de degré 2 que l'on égale à zéro. Mais dans la pratique, l'équation à résoudre n'est pas toujours donnée sous cette forme. Il faut donc se ramener à une d'**équation polynomiale**

Définition 1.1.2 : Équation polynomiale

Une **équation polynomiale** ou équation algébrique, est une équation de la forme

$$P = 0$$

où P est un polynôme à une seule inconnue, x.

Alors, le tout premier travail à effectuer est du *calcul littéral* et il consiste à regrouper tous les termes de l'expression du même côté de l'égalité et de laisser un zéro de l'autre.

1.1.5 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.1.1 : Exemple 1

Résoudre $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Solution On observe.
Il s'agit d'une équation quadratique. N'ayant pas encore de techniques sous la main, nous pouvons (toujours) nous poser la question : "pour quel x l'expression de gauche de l'égalité devient zéro ?".

Il faut, dans ce cas, faire des substitutions simples, afin de trouver, au moins, une solution.

Donc, c'est par tâtonnement que l'on peut commencer.
Pour ce faire commencer par des petites valeurs, les plus simples sont -1, $0, 1$ voir 2.
En essayant, on constante que si $x = 2$, $x^2 + 3x - 10$ devient

$$2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 4 + 6 - 10 = 10 - 10 = 0$$

Et si on persévère, lorsque $x = -5$, $x^2 + 3s - 10$ vaut

$$(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 25 - 25 = 0$$

Et l'on s'arrête de chercher !
Les deux solutions de $x^2 + 3x - 10 = 0$ sont $x = 2$ et $x = -5$. Pour donner la réponse, on écrit

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in S = \{2;\ -5\}.$$

où $S = \{2;\ -5\}$ est l'**ensemble solution** de l'équation.

Exemple 1.1.2 : Exemple 2

Quelles sont les solution de $x^2 + 2x + 1 = 0$?

Solution
On observe.
C'est une équation quadratique. N'ayant pas d'autre outil, pour l'instant on attaque le problème par tâtonnement.
On trouve que pour $x = -1$ l'expression vaut zéro :

$$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

Et on a de la peine à trouver une autre solution. C'est le cas typique des **limites de la résolution par tâtonnement**.

En effet, on ne peut pas savoir de cette manière s'il y en a d'autres ou pas. C'est pour cela que plus loin nous verrons qu'il existe un moyen de savoir à l'avance combien de solutions il existe, sans même les calculer ! Dans le cas présent il n'y qu'une seule solution et on a donc

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff x \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.3 : Exemple 3

Donner les solutions de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

Solution
On observe.
C'est une équation quadratique, dite incomplète, car il lui manque le monôme en x.
Par tâtonnement, on se pose la question : "quel est le nombre dont le carré plus un vaut zéro ?".

Répéter plusieurs fois la question dans sa tête permet de se rendre compte qu'un tel nombre n'existe pas.

En effet, **aucune somme de nombres positifs ne donne zéro**. Et comme le carré d'un nombre est toujours positif, $x^2 + 1$ ne sera jamais égale à zéro.

Pour qu'elle le soit l'un des deux termes doit être négatif et l'autre positif, ou encore les deux égaux à zéro (Question : zéro est-il pair ou impair ? Est-il négatif ou positif ?).
Donc la réponse est

$$x^2 + 1 = 0 \implies S = \varnothing \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.4 : Exemple 4

Pour $x \in \mathbb{R}$, résoudre $2x^2 + 1 = 15$.

Solution
On observe.
C'est une équation qui n'est sous la forme d'une équation polynomiale, c'est à dire "un polynôme égal à zéro". On lui applique donc quelques transformations algébriques pour obtenir la form équivalente souhaité :

$$\begin{array}{rrcl} & 2x^2 + 1 & = & 15 \\ \iff & 2x^2 + 1 - 15 & = & 0 \\ \iff & 2x^2 - 14 & = & 0 \end{array}$$

Mais on constate qu'il n'y a que le terme en x^2. C'est une équation de la forme $x^2 = k$. Isolons donc complètement le x^2 :

$$\begin{array}{rrcl} & 2x^2 - 14 & = & 0 \\ \iff & 2x^2 & = & 14 \\ \iff & x^2 & = & 7 \end{array}$$

Donc, d'après la théorie les seuls nombres réels dont le carré vaut 7 sont $\pm\sqrt{7}$.

Ainsi, peut être donnée sous la forme de l'ensemble solution :

$$S = \{-\sqrt{7};\ \sqrt{7}\}$$

Exemple 1.1.5 : Exemple 5

Résoudre l'équation suivante et donner l'ensemble solution :

$$2 - 3x^2 = 8$$

Solution
On observe.
C'est une équation de degré deux sous forme quelconque. On la met sous la forme équation polynomiale, puis on isole x^2, on prend la racine carrée et on donne l'ensemble solution :

$$\begin{array}{rrcl} & 2-3x^2 & = & 8 \\ \Longleftrightarrow & -3x^2 & = & 6 \\ \Longleftrightarrow & 3x^2 & = & -6 \\ \Longleftrightarrow & x^2 & = & -2 \end{array}$$

Or, il n'y a pas de nombre réel dont le carré est un nombre négatif. Ainsi, cette équation n'a pas de solutions et son ensemble solution est vide :

$$S = \varnothing$$

Exemple 1.1.6 : Exemple 6

Résoudre et donner l'ensemble solution : $(x-3)^2 = 16$.

Solution
On observe.
C'est une équation qui *semble* quadratique. En effet, le x que je vois n'est pas au carré, c'est la parenthèse qui est au carré.

Cependant, comme le x est **dans la parenthèse** qui elle est au carré, c'est qu'il y a espoir que le x soit élevé à la puissnce 2.

Or, on en a pas besoin, car le membre de droite de l'égalité est une constante, et de ce fait *"je peux me libérer du carré facilement"*. Il suffit de prendre la racine carré dans les deux membres.

Donc, pour résoudre on prend la racine carrée, on isole x, et on donne l'ensemble solution :

$$\begin{array}{rrcl} & (x-3)^2 & = & 16 \\ \Longleftrightarrow & x-3 & = & \pm\sqrt{16} \\ \Longleftrightarrow & x-3 & = & \pm 4 \\ \Longleftrightarrow & x & = & 3 \pm 4 \\ \Longleftrightarrow & x & = & \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases} \end{array}$$

Et on a

$$S = \{-1;\ 7\}$$

Exemple 1.1.7 : Exemple 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(x+2)^2 = 11$$

Solution

On observe.

On constate qu'on est dans la même situation que dans l'exemple précédent. On applique alors le même procédé :

$$\begin{array}{rrcl} & (x+2)^2 & = & 11 \\ \Longleftrightarrow & x+2 & = & \pm\sqrt{11} \\ \Longleftrightarrow & x & = & \pm\sqrt{11} - 2 \end{array}$$

Et l'ensemble solution est

$$S = \{-\sqrt{11} - 2;\ \sqrt{11} - 2\}$$

1.1.6 Exercices

Élémentaire

NB : Sans autre indication, tous les exercices se résolvent dans $\mathbb{R}$, autrement dit les nombres sont tous réels.

1001. Résoudre en donnant à chaque fois les étapes intermédiaires et l'ensemble solution

(a) $x^2 - 10 = 90$
(b) $2x^2 = 50$
(c) $5x^2 = 20$
(d) $6x^2 = 54$
(e) $5x^2 = -45$
(f) $7x^2 = 0$

1002. Résoudre en donnant à chaque fois les étapes intermédiaires et l'ensemble solution

(a) $3x^2 - 2 = 25$
(b) $4 - 2x^2 = 12$
(c) $4x^2 + 2 = 10$
(d) $(x-1)^2 = 9$
(e) $(x+4)^2 = 16$

1003. Résoudre en donnant à chaque fois les étapes intermédiaires et l'ensemble solution

(a) $(x+2)^2 = -1$
(b) $(x-4)^2 = 5$
(c) $(x-6)^2 = -4$
(d) $(x+2)^2 = 0$
(e) $(2x-5)^2 = 0$

1004. Résoudre en donnant à chaque fois les étapes intermédiaires et l'ensemble solution

(a) $(3x+2)^2 = 4$
(b) $(3x+1)^2 = 81$
(c) $(2x+1)^2 = 48$
(d) $(3-2x)^2 = 7$
(e) $\frac{1}{3}(2x+3)^2 = 2$

1005. Résoudre en donnant à chaque fois les étapes intermédiaires et l'ensemble solution

(a) $2x^2 - 1 = 48$
(b) $x^2 - 4 = 5$
(c) $(x - 2x + 1)^2 = 4$
(d) $3x^2 - 6x = 36 - 6x$

Intermédiaire

1006. Résoudre en détaillant et donner l'ensemble solution
$$(x+1)^2 = (3-x)^2$$

1007. Résoudre en détaillant et donner l'ensemble solution
$$(-3x+1)^2 = (x+1)\cdot(x+1)$$

1008. Résoudre en détaillant et donner l'ensemble solution
$$(6-x)^2 = x^2$$

1009. Résoudre en détaillant et donner l'ensemble solution
$$(2x-1)^2 = (2-3x)^2$$

Avancé

Sachant que $x \neq 0$ résoudre les équations suivantes en veillant à *éliminer* les fractions au moyen de techniques arithmétiques (*dénominateur commun*) :

1010.
$$\frac{x}{4} = \frac{1}{x}$$

1011.
$$\frac{5}{x} = \frac{x}{2}$$

1012.
$$\frac{x}{8} = \frac{2}{x}$$

1013.
$$\frac{1}{x} + 2 = \frac{x+8}{4}$$

1.2 Équation quadratique (2) : Nombres consécutifs

1.2.1 Quels sont ces nombres

Voici un problème et sa solution tirée du livre *Algèbre récréative*, de Y. Pérelman.

> Trouver trois nombres consécutifs tels que le carré du nombre moyen soit supérieur d'une unité au produit des deux autres.

Solution

On va poser x le premier de ces nombres. Comme il s'agit de nombres consécutifs, on a des nombres entiers. Les nombres sont dont x; $(x+1)$; $(x+2)$. Alors on a l'équation

$$(x+1)^2 = x(x+2)+1$$

Et on peut développer les deux côtés de l'égalité :

$$x^2+2x+1 = x^2+2x+1$$

Or, si l'on veut isoler x on va se retrouver avec une équation équivalente à $0=0$. Ceci veut dire que quelque soit la valeur de x, autrement dit quels que soient les trois nombres consécutifs, on aura toujours l'égalité.
En d'autres mots, la propriété des trois nombres que l'on cherche est remplie par tous les triplets de nombres consécutifs !!
En effet, prenons au hasard 13; 14 et 15. On a pour le côté gauche

$$14^2 = 196$$

et pour le côté droit de l'égalité

$$13\cdot 15+1 = 130+13\cdot 5+1 = 130+65+1 = 196$$

Ou encore 17; 18 et 19

$$18^2 - 17\cdot 19 = 324-323 = 1$$

qui est une autre manière de prouver le résultat (pourquoi ?).
Décider que x est le premier nombre est un choix arbitraire. On peut très bien décider que x soit le deuxième nombre ou encore le troisième. Bien évidemment l'écriture des deux autres nombres change.
Il est assez amusant de voir que si on choisit que x est le deuxième nombre, alors le premier devient $x-1$ et le troisième $x+1$. Si maintenant on écrit la propriété, on trouve

$$\begin{aligned} x^2 &= (x-1)\cdot(x+1)+1 \\ x^2-1 &= (x+1)\cdot(x-1) \end{aligned}$$

une identité remarquable, car $1 = 1^2$, c'est l'identité

$$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

1.2.2 Bases théoriques

Pour les équations quadratiques qui ne sont pas de la forme $x^2 = k$ on applique deux techniques : la factorisation puis l'équation produit.

L'équation produit

Définition 1.2.1 : Équation produit

On dit qu'une équation est une équation produit lorsque qu'elle se présente sous la forme

$$A \cdot B \cdot C = 0$$

dans cette expression, A, B et C sont des expressions algébriques. Ce résultat se généralise à plus que trois expressions algébriques.

L'essentiel de cette définition est que l'**équation produit** comporte un membre de gauche, le produit d'expressions algébriques (en général des polynômes), et à droite de l'égalité **toujours le zéro**.
Par exemple nous avons $(x-2)\cdot(x+5) = 0$ ou encore $(2x^2-x+2)(5-x)(3x+1) = 0$, etc.
Ainsi on peut appliquer la règle de l'équation produit nul suivante :

Propriété 1.2.1 : Produit nul

Lorsque le produit de deux expressions algébriques ou plus vaut zéro, alors *au moins* un des facteurs du produit doit être égal à zéro.

Si

$$A \cdot B \cdot C = 0$$

alors

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

Les conditions dans l'accolade se lisent avec des "ou" : au moins une doit être égale à zéro.
En effet, si on a l'expression $5 \cdot x \cdot y = 0$ on voit bien que soit x soit y vaut zéro, et que $5 \neq 0$ est évident.

Factorisation

Pour résoudre une équation quadratique par factorisation, nous appliquons toutes nos connaissances du calcul littéral. On peut alors suivre les quatre étapes ci-dessous :

1. Si nécessaire, mettre l'expression sous sa d'équation polynomiale, c'est-à-dire toutes les expressions algébriques à gauche de l'égalité et un zéro à droite de l'égalité.

2. Utiliser le calcul algébrique pour factoriser le côté gauche, **entièrement**. Si ce n'est pas possible de factoriser entièrement, alors on ne peut pas utiliser cette méthode de résolution.
3. Appliquer la règle du **produit nul**.
4. Résoudre les équations de degré un issues du point précédent.

Les identités remarquables

On peut utiliser des raccourcis afin de factoriser. Comme vu précédemment (dans mes cours de 1ère année), il existe des identitiés remarquables que l'on peut utiliser pour factoriser. Les voici listées.

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)\cdot(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$
4. $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

Diviser par l'inconnue

Il faut faire **attention de ne pas diviser par l'inconnue** x (ou tout autre lettre).
En effet, vous risquez d'avoir des résultats absurdes et/ou de manquer une solution de votre équation.
Par exemple

$$x^2 = 3x$$

Peut s'écrire $x \cdot x = 3 \cdot x$ et vous purriez être tenté de diviser par x pour obtenir

$$x = 3$$

ce qui est juste. Mais au passage nous avons oublié la solution $x = 0$! Et vous avez divisé par zéro... ce qui est interdit.
La règle est donc

Procédé 1.2.1

On ne doit pas simplifier une variable d'un produit des deux côtés de l'égalité d'une équation **sauf si l'on sait que cette variable n'est jamais égale à zéro**.

1.2.3 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.2.1 : Exemple 1

Résoudre $3x^2 = 2x$.

Solution

$$\begin{array}{rrcl} & 3x^2 & = & 2x \\ \Longleftrightarrow & 3x^2 - 2x & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & (3x-2)x & = & 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Exemple 1.2.2 : Exemple 2

Résoudre $x^2 + 3x = 28$.

Solution

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 + 3x & = & 28 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 3x - 28 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & (x+7)(x-4) & = & 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 7 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vérification

Si $x = -7$ alors $x^2 + 3x = (-7)^2 + 3(-7) = 49 - 21 = 28$. Ok.
Si $x = 4$ alors $x^2 + 3x = 4^2 + 3 \cdot 4 = 16 + 12 = 28$. Ok.

Exemple 1.2.3 : Exemple 3

Résoudre l'équation quadratique ci-après et donner son ensemble solution.

$$5x^2 = 3x + 2$$

Solution

$$\begin{array}{rrcl} & 5x^2 & = & 3x + 2 \\ \Longleftrightarrow & 5x^2 - 3x - 2 & = & 0 \end{array}$$

À ce stade on peut essayer la troisième identité remarquable, mais ce n'est pas possible, car le facteur du terme quadratique x^2 est différent de 1.
Ce qu'il faut faire ici est d'écrire le terme en x comme la somme de deux monômes en x dont les coefficients sont le facteur de x^2 et le terme constant.
Ici les deux monômes seraient l'une des quatre combinaisons :

1. $5x$ et $2x$
2. $-5x$ et $2x$
3. $-5x$ et $-2x$
4. $5x$ et $-2x$

Pour cette équation il s'agit de $-5x$ et $2x$, car

$$-5x + 2x = -3x$$

qui est le terme central.
L'idée est de factoriser $5x$ dans les deux premiers termes et 2 dans les deux derniers. On a alors la solution suivante :

$$\begin{array}{rrcl} & 5x^2 - 5x + 2x - 2 & = & 0 \\ \iff & 5x(x-1) + 2(x-1) & = & 0 \\ \iff & (5x+2)(x-1) & = & 0 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} 5x + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ x = 1 \end{cases}$$

En l'ensemble solution est $S = \{-\frac{2}{5};\ 1\}$.

Exemple 1.2.4 : Exemple 4

Résoudre l'équation

$$\frac{x-2}{x} = \frac{6+x}{2}$$

Solution
On observe.
On constate que l'on a des fraction (rationnelles) et l'inconnue au dénominateur !
Ce n'est pas un problème : si l'**énoncé utilise l'inconnue au dénominateur c'est que x n'est pas égal à zéro** on peut donc diviser par x. On va donc traiter ce x comme un nombre quelconque non nul. Cela veut dire que l'on peut multiplier par x afin d'éviter de travailler avec des fractions.

$$\begin{aligned}
& & \frac{x-2}{x} &= \frac{6+x}{2} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{2\cdot(x-2)}{2\cdot x} &= \frac{x\cdot(6+x)}{x\cdot 2} \\
&\Longleftrightarrow & 2\cdot(x-2) &= x\cdot(6+x) \\
&\Longleftrightarrow & 2x-4 &= 6x+x^2 \\
&\Longleftrightarrow & x^2+4x+4 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & (x+2)^2 &= 0 \\
&\Longrightarrow & x+2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & x &= -2
\end{aligned}$$

Vérification

Si $x = -2$ alors le membre de gauche (*mg*) vaut

$$\text{mg} : \frac{(-2)-2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

et le membre de droite (*md*) vaut

$$\text{md} : \frac{6+(-2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Exemple 1.2.5 : Exemple 5

Résoudre

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x+6} = 1$$

Solution

Comme dans l'exemple précédent, nous avons des fractions et l'inconnue au dénominateur. Cela implique que $x \neq 0$, et qu'on peut donc diviser et multiplier par x.

$$\begin{aligned}
& & \frac{1}{x} + \frac{4}{x+6} &= 1 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1\cdot(x+6)}{x\cdot(x+6)} + \frac{4\cdot x}{(x+6)\cdot x} &= \frac{1\cdot x(x+6)}{1\cdot x(x+6)} \\
&\Longleftrightarrow & x+6+4x &= x(x+6) \\
&\Longleftrightarrow & 5x+6 &= x^2+6x \\
&\Longleftrightarrow & 0 &= x^2+x-6 \\
&\Longleftrightarrow & 0 &= (x+3)(x-2)
\end{aligned}$$

Et l'ensemble solution s'écrit $S = \{-3;\ 2\}$

1.2.4 Exercices

Élémentaire

1014. Résoudre.

(a) $x^2 - 7x = 0$
(b) $x^{-}5x = 0$
(c) $x^2 = 8x$
(d) $x^2 = 4x$
(e) $3x^2 + 6x = 0$
(f) $2x^2 + 5x = 0$
(g) $4x^2 - 3x = 0$
(h) $4x^2 = 5x$
(i) $3x^2 = 9x$

1015. Résoudre.

(a) $x^2 + 3x + 2 = 0$
(b) $x^2 - 3x + 2 = 0$
(c) $x^2 - 10x + 25 = 0$
(d) $x^2 + 5x + 6 = 0$
(e) $x^2 + 6 = 5x$
(f) $x^2 + 7x = -6$
(g) $x^2 + 14 = -9x$
(h) $x^2 + 11x = -30$
(i) $x^2 = 15 - 2x$
(j) $x^2 + 4x = 12$
(k) $x^2 = 11x - 24$
(l) $x^2 = 14x - 49$

1016. Résoudre les équations suivantes et donner l'ensemble solution.

(a) $2x^2 + 18x + 36 = 0$
(b) $-x^2 - 11x - 28 = 0$
(c) $3x^2 + 6x = 24$
(d) $2x^2 + 2x = 24$
(e) $4x^2 + 24 = 20x$
(f) $5x^2 + 20 = 20x$
(g) $3x^2 = 3x + 18$
(h) $-x^2 = 7x - 60$
(i) $140 + 6x = 2x^2$

1017. Exercice déplacé.

1018. Exercice déplacé.

Intermédiaire

1019. Résoudre.

(a) $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{1}{2x}$

(b) $\dfrac{x+4}{2} = \dfrac{6}{x}$

(c) $\dfrac{x+2}{x} = x$

(d) $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{2}{x}$

(e) $\dfrac{x}{1+2x} = \dfrac{1}{3x}$

(f) $\dfrac{3x+1}{2x} = x+2$

1020. Résoudre.

(a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x+2} = 1$

(b) $\dfrac{5}{x} + \dfrac{x}{x-6} = 2$

(c) $\dfrac{4}{x+1} + \dfrac{3}{x+3} = -1$

(d) $\dfrac{5}{x+2} - \dfrac{6}{x-1} = -2$

(e) $\dfrac{4}{x-2} + \dfrac{3}{x-1} = 3$

(f) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x+3}{x} = -5$

(g) $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} = x$

(h) $\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{2}{x+1} = x$

Avancé

1021. Résoudre les trois équations ci-dessous après avoir posé une variable intermédiaire (**Indice** : réécrire l'équation en posant que $y = x^2$ et résoudre pour y puis revenir à la variable de départ et donner les solutions).

(a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(b) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

(c) $x^4 = 4x^2 + 5$

1022. Résoudre les trois équations ci-dessous. Pensez à utiliser les identités remarquables.

(a) $x^3 - 10x^2 = 39x$

(b) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 = 0$

(c) $2x^6 + 88x^2 = 30x^4$

1023. Résoudre.

(a) $\sqrt{x+2} = x$

(b) $\sqrt{x+13} - \sqrt{7-x} = 2$

1.3 Équation quadratique (3) : Babylone

1.3.1 Les babyloniens et l'algèbre

À l'époque des babyloniens, le papier n'existait pas. C'est donc sur des tablettes d'argile fraîche que ces derniers écrivaient.
C'est pour cette raison que nous savons que les babyloniens avaient des connaissances en algèbre. Car l'une de ces tablettes, appelée *Plimpton 322*, a été conservée par les archéologues.

Cette tablette contient des exemples de problèmes avec leurs solution. Et nous savons aujourd'hui, grâce à leur étude, que les anciens babyloniens étaient capables de résoudre des équations difficiles, en utilisant des règles que l'on utilise aujourd'hui en algèbre. Parmi elles ont trouve application d'opérations de part et d'autre de l'égalité et la factorisation.
Ils pouvaient, par exemple, ajouter $4xy$ à $(x-y)^2$ pour obtenir $(x+y)^2$.
Tous ceci était mené sans l'aide des lettre que nous utilisons aujourd'hui. Pour les inconnues ils utilisaient des mots.
Voici un problème qui date d'il y a $4'000$ ans.

Problème : *J'ai soustrait le côté de mon carré à son aire et j'obtiens* 870. *Quelle est la longueur du côté du carré ?*
Solution : Prendre la moitié de 1, qui est $\frac{1}{2}$ et multiplier $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{2}$, qui donne $\frac{1}{4}$. Ajouter ce résultat à 870 pour obtenir $870+\frac{1}{4}$. Ceci est le carré de $29+\frac{1}{2}$. Maintenant ajouter $\frac{1}{2}$ à $29+\frac{1}{2}$ et le résultat est 30, le côté du carré.

En utilisant la notation moderne, l'équation est $x^2-x=870$ et l'une de ses solutions est $x=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)+870}+\frac{1}{2}=30$.

1.3.2 Bases théoriques

Certaines équations du second degré, par exemple $x^2 + 4x - 7 = 0$, ne peuvent pas être résolues avec les méthodes de factorisation vues précédemment. L'une des raisons est que ses solutions, lorsqu'elles existent, sont irrationnelles : elles ne s'expriment pas comme le quotient de deux nombres entiers.
Mais heureusement il existe une méthode permettant de les résoudre, que l'on appelle la **complétion du carré**.

En effet, on ne peut pas factoriser directement l'équation $x^2 + 4x - 7 = 0$, mais on va *forcer* l'apparition de tout ce qu'il faut pour **compléter** un carré. On aura bien sûr des termes en plus, mais ils seront tous des nombres.

Pour compléter un carré on doit

1. écrire l'équation sous la forme
$$ax^2 + bx + c = 0$$
et diviser TOUTE l'équation par a, pour avoir
$$x^2 + dx + e = 0$$
où d est le coefficient de x et e le terme constant de l'équation.
NB : vous aurez dans la majorité des cas deux fractions qui apparaissent à la place de d et e ;
2. ensuite, **diviser le facteur de x par deux**, ici $d/2$;
3. élever au carré ce résultat, ici $\left(\frac{d}{2}\right)^2$;
4. l'ajouter aux deux membres de l'équation ;
$$x^2 + dx + \left(\frac{d}{2}\right)^2 + e = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$
5. identifier l'identité $\left(x + \frac{d}{2}\right)^2$ et l'isoler à gauche de l'égalité ;
$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - e$$
6. puis prendre la racine carrée des deux côtés de l'égalité ;
$$x + \frac{d}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - e}$$
7. isoler x ;
8. écrire l'ensemble solution.

Observons que le point 2 de ce procédé se justifie par le fait que le facteur de x dans $(x + a)^2$ est toujours doublé dans le développement de la parenthèse.

1.3.3 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.3.1 : Exemple 1

Pour les deux équations ci-dessous (**a**) trouver ce qu'il faut ajouter aux deux membres de l'équation pour créer un carré parfait au membre de gauche (*mg*) ; (**b**) écrire l'équation sous la forme $(x+p)^2 = k$.

1. $x^2 + 8x = -5$
2. $x^2 - 6x = 13$

Solution

1. $x^2 + 8x = -5$:

   (a) Dans l'équation, la motié du facteur de x est $\frac{8}{2} = 4$. Donc nous devons ajouter 4^2.

   (b)
$$\begin{array}{rrcl} & x^2 + 8x{\color{red}+4^2} & = & -5{\color{red}+4^2} \\ \Longleftrightarrow & (x+4)^2 & = & -5+16 \\ \Longleftrightarrow & (x+4)^2 & = & 11 \end{array}$$

2. $x^2 - 6x = 13$

   (a) Dans l'équation, la moitié du facteur de x est $\frac{-6}{2} = -3$. Nous ajoutons 9 aux deux côtés de l'égalité.

   (b)
$$\begin{array}{rrcl} & x^2 - 6x{\color{red}+3^2} & = & 13{\color{red}+3^2} \\ \Longleftrightarrow & (x-3)^2 & = & 13+9 \\ \Longleftrightarrow & (x-3)^2 & = & 22 \end{array}$$

Exemple 1.3.2 : Exemple 2

Résoudre l'équation suivante en complétant le carré.

$$x^2 + 4x - 7 = 0$$

Solution

On applique le procédé de l'encadré ci-dessus :

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 + 4x - 7 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 4x & = & 7 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 4x + 4 & = & 7+4 \\ \Longleftrightarrow & (x+2)^2 & = & 11 \\ \Longleftrightarrow & x+2 & = & \pm\sqrt{11} \\ \Longleftrightarrow & x & = & -2 \pm \sqrt{11} \end{array}$$

On a donc $S = \{-2+\sqrt{11};\ -2-\sqrt{11}\}$.

Exemple 1.3.3 : Exemple 3

Résoudre les équations ci-dessous en complétant le carré.

1. $x^2 + 2x - 2 = 0$
2. $x^2 - 5x + 3 = 0$

Solution

1. $x^2 + 2x - 2 = 0$

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 + 2x - 2 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 2x & = & 2 \\ \Longleftrightarrow & x^2 + 2x \color{red}{+1^2} & = & 2 \color{red}{+1^2} \\ \Longleftrightarrow & (x+1)^2 & = & 3 \\ \Longleftrightarrow & x + 1 & = & \pm\sqrt{3} \\ \Longleftrightarrow & x & = & -1 \pm \sqrt{3} \end{array}$$

2. $x^2 - 5x + 3 = 0$

$$\begin{array}{rrcl} & x^2 - 5x + 3 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 - 5x & = & -3 \\ \Longleftrightarrow & x^2 - 5x \color{red}{+\frac{5}{2}^2} & = & -3 \color{red}{+\frac{5}{2}^2} \\ \Longleftrightarrow & (x - \frac{5}{2})^2 & = & -3 + \frac{25}{4} \\ \Longleftrightarrow & (x - \frac{5}{2})^2 & = & \frac{13}{4} \\ \Longleftrightarrow & x - \frac{5}{2} & = & \pm\sqrt{\frac{13}{4}} \\ \Longleftrightarrow & x & = & \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}} \\ \Longleftrightarrow & x & = & \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array}$$

Exemple 1.3.4 : Exemple 4

Résoudre en complétant le carré

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

Solution

$$\begin{array}{rrcl} & x^2-4x+6 & = & 0 \\ \iff & x^2-4x & = & -6 \\ \iff & x^2-4x+2^2 & = & -6+2^2 \\ \iff & (x-2)^2 & = & -2 \end{array}$$

Or, il n'y a pas de nombre réel dont le carré soit négatif, **un carré ne peut être négatif dans** $\mathbb{R}$.
En conséquence, il n'existe pas de solution réelle : $S = \varnothing$.

Exemple 1.3.5 : Exemple 5

Résoudre l'équation $3x^2 + 6x - 2 = 0$, en complétant le carré.

Solution

$$\begin{array}{rrcl} & 3x^2+6x-2 & = & 0 \\ \iff & x^2+2x-\frac{2}{3} & = & 0 \\ \iff & x^2+2x & = & \frac{2}{3} \\ \iff & x^2+2x+1^2 & = & \frac{2}{3}+1^2 \\ \iff & (x+1)^2 & = & \frac{5}{3} \\ \iff & x+1 & = & \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \\ \iff & x & = & -1\pm\sqrt{\frac{5}{3}} \end{array}$$

On n'aime pas laisser des racines au dénominateur. Alors on va multiplier la fraction de droite, celle qui contient $\sqrt{3}$ au dénominateur, par cette même valeur aussi bien au numérateur qu'au dénominateur. De cette façon la racine disparaît du dénominateur et se reporte au numérateur, car

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$$

Alors, le résultat est

$$\begin{array}{rcl} x & = & -1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ x & = & -1\pm\frac{\sqrt{15}}{3} \\ x & = & \frac{-3\pm\sqrt{15}}{3} \end{array}$$

1.3.4 Exercices

Élémentaire

1024. Pour chaque équation (**a**) trouver le nombre à ajouter aux deux membres de l'équation ; (**b**) écrire l'équation sous la forme $(x+p)^2 = k$.

(a) $x^2 + 2x = 5$
(b) $x^2 - 2x = -7$
(c) $x^2 + 6x = 2$
(d) $x^2 - 6x = -3$
(e) $x^2 + 10x = 1$
(f) $x^2 - 8x = 5$
(g) $x^2 + 12x = 13$
(h) $x^2 + 5x = -2$
(i) $x^2 - 7x = 4$

Intermédiaire

1025. Résoudre en complétant le carré et laisser les racines carrées dans le résultat, ne pas donner de valeur approchée.

(a) $x^2 - 4x + 1 = 0$
(b) $x^2 - 2x - 2 = 0$
(c) $x^2 - 4x - 3 = 0$
(d) $x^2 + 2x - 1 = 0$
(e) $x^2 + 4x + 1 = 0$
(f) $x^2 + 6x + 3 = 0$
(g) $x^2 + 3x + 2 = 0$
(h) $x^2 + 8x + 14 = 0$
(i) $x^2 - 3x - 1 = 0$

1026. Si possible, résoudre les équations suivantes en complétant le carré.

(a) $x^2 + 2x + 4 = 0$
(b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
(c) $x^2 - 6x + 11 = 0$
(d) $x^2 + x - 1 = 0$
(e) $x^2 + 5x - 2 = 0$
(f) $x^2 - 7x + 13 = 0$

1027. Résoudre en compétant le carré.

(a) $2x^2 + 4x - 1 = 0$
(b) $3x^2 - 12x + 7 = 0$
(c) $5x^2 - 10x + 3 = 0$
(d) $2x^2 + 12x - 5 = 0$
(e) $2x^2 - 2x + 3 = 0$
(f) $3x^2 + 3x - 1 = 0$

Avancé

1028. Dans ce problème, il faudra travailler avec du calcul littéral pur. Autrement dit, vous devez résoudre l'équation

$$x^2 + bx + c = 0$$

en complétant le carré. La difficulté réside en ce que les nombres sont remplacés par des lettres b et c. Pour le reste c'est comme avant.

Une fois que vous aurez résolu l'équation, c'est-à-dire trouvé des valeurs pour x, dire

(a) Sous quelles conditions l'équation $x^2 + bx + c = 0$ a-t-elle

i. deux solutions réelles ?

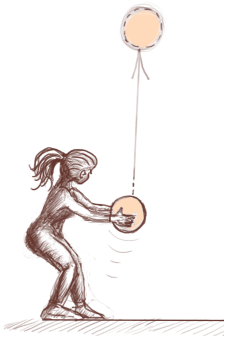
ii. une solution réelle ?

iii. aucune solution réelle ?

1.4 Équation quadratique (4) : Lancer vertical

1.4.1 Enoncé

Un ballon a été lancé verticalement vers le haut à la vitesse de 25 mètres par seconde.
Dans combien de secondes aura-t-il atteint une hauteur de 20 mètres au-dessus du sol ?



1.4.2 Solution

Pour des corps lancés verticalement vers le haut en l'absence de résistance de l'air, la mécanique établit la relation suivante entre la hauteur atteinte h, la vitesse initiale v, l'accélération de la pesanteur g et le temps t :

$$h = v \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Nous pouvons négliger ici la résistance de l'air car pour des faibles vitesses elle n'est pas très grande. Pour simplifier le calcul admettons g égal à 10 m/s^2 au lieu de 9,8 (l'erreur n'est que de 2%). En substituant dans la formule les valeurs de h, v et g, on a l'équation

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2}$$

soit plus simplement

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

En résolvant cette équation on trouve

$$t_1 = 1 \qquad t_2 = 4$$

Le ballon sera donc deux fois à 20 m au-dessus du sol : dans 1 seconde et dans 4 secondes !!
Cela peut paraître invraisemblable et si l'on ne refléchit pas, on est tenté de rejeter la deuxième solution. Ce serait une grosse erreur.
La seconde solution a un sens bien précis ; le ballon doit réellement se trouver deux fois à 20 m au-dessu du sol : une fois en montant, et une fois en retombant !
Il est facile de calculer qu'à une vitesse initiale de 25 m/s le ballon doit monter pendant 2,5 secondes et arriver à la hauteur de 31,25 m. Ayant atteint la hauteur de 20 m en 1 seconde, le ballon continuera à monter pendant 1, 5 secondes pour descendre ensuite pendant le même temps jusqu'à la hauteur de 20 m, puis arriver une seconde plus tard sur le sol.

1.4.3 Bases théoriques

Ni la factorisation ni la complétion du carré ne peuvent résoudre toutes les équations quadratiques.

Ce “manque” sera comblé par les travaux de François Viète (1540-1603), mathématicien français, sur la résolution des équations et en particulier du second degré.

On les appelle aujourd'hui **les formules de Viète**, pour la résolution des équations du deuxième degré.

Les formules

Propriété 1.4.1 : Solutions d'une équation quadratique

Soit l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0$$
avec $a \neq 0$ (c'est ce qui lui donne le droit d'être une équation du deuxième degre : le terme au carré est toujours présent.).
Alors les solutions de cette équation sont
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
où $\Delta = b^2 - 4ac$ est nommé le **discriminant**.

Le discriminant

Son rôle est super important. C'est sa valeur qui nous renseigne sur le nombre de solutions de l'équation quadratique.

Propriété 1.4.2 : Nombre de solutions d'une quadratique

1. Si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions à l'équation.
2. Si $\Delta = 0$ alors il y a une seule solution.
3. Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

La complétion du carré

Pour montrer la justesse de ces formules, on peut chercher les solutions de l'équation quadratique sous sa forme générale, en se servant de la complétion du carré. Nous allons voir comment on mène une preuve mathématique en faisant la démonstration de la Proriété 1.4.1, ci-avant :

Démonstration. La démonstration que voici, est du type “directe”. Elle suit d'une application de la méthode dite “complétion du carré”.

$$
\begin{array}{rrcll}
 & ax^2+bx+c & = & 0 & \\
\Longleftrightarrow & x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a} & = & 0 & \text{division par } a \text{ puisque } a \neq 0 \\
\Longleftrightarrow & x^2+\dfrac{b}{a}x & = & -\dfrac{c}{a} & \\
\Longleftrightarrow & x^2+\dfrac{b}{a}x{\color{red}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2} & = & -\dfrac{c}{a}{\color{red}+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2} & {\color{red}\text{complétion du carré}} \\
\Longleftrightarrow & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 & = & -\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{4a}{4a}\right)+\dfrac{b^2}{4a^2} & \\
\Longleftrightarrow & \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 & = & \dfrac{b^2-4ac}{4a^2} & \\
\Longleftrightarrow & x+\dfrac{b}{2a} & = & \pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}} & \\
\Longleftrightarrow & x & = & -\dfrac{b}{2a}\pm\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}} & \\
\Longleftrightarrow & x & = & \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &
\end{array}
$$

$\square$

1.4.4 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.4.1 : Exemple 1

Résoudre l'équation quadratique suivante avec les formules de Viète :

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

Solution

On observe : l'équation est déjà sous la forme requise.

On doit avant tout identifier a, b et c. Ensuite calculer le discriminant, pour savoir s'il y a des solutions et enfin donner l'ensemble solution :
On a : $a = 1;\ b = -2; c = -2$
Ainsi $\Delta = b^2 - 4ac \Longrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12 > 0$ il y a donc deux solutions, qui sont

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 1} \\ \Longleftrightarrow \quad x &= \frac{-(-2) \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ \Longleftrightarrow \quad x &= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ \Longleftrightarrow \quad x &= 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Et l'ensemble solution $S = \{1 - \sqrt{3};\ 1 + \sqrt{3}\}$.

Exemple 1.4.2 : Exemple 2

Résoudre par Viète : $2x^2 + 3x - 4 = 0$.

Solution

On observe : l'équation est déjà en place, le trinôme du second degré est isolé à gauche.

Il ne reste plus qu'à identifier a, b et c, à calculer Δ et à donner les solutions : $a = 2;\ b = 3;\ c = -4$, donc $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41 > 0$, et il y a deux solutions, qui sont

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2 \cdot (2)} \\ \Longleftrightarrow \quad x &= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4} \end{aligned}$$

Et l'ensemble solution est $S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{41}}{4};\ \frac{-3 + \sqrt{41}}{4} \right\}$.

1.4.5 Exercices

Élémentaire

1029. Résoudre les trois équations ci-dessous en utilisant (**a**) la factorisation et (**b**) les formules de Viète.

(a) $x^2 + 6x + 8 = 0$

(b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

(c) $3x^2 - 7x - 6 = 0$

1030. Résoudre en utilisant Viète.

(a) $x^2 + x - 5 = 0$

(b) $x^2 - 5x + 5 = 0$

(c) $x^2 - 4x - 1 = 0$

(d) $3x^2 + 5x - 1 = 0$

(e) $-2x^2 + x + 7 = 0$

(f) $5x^2 - 8x + 1 = 0$

(g) $x^2 + 1 = 3x$

(h) $2x^2 = 2x + 3$

(i) $9x^2 = 6x + 1$

(j) $7x^2 = 5x + 1$

(k) $3x^2 + 2x = 2$

(l) $25x^2 + 1 = 20x$

Intermédiaire

1031. Utiliser les formules de Viète pour résoudre ces équations.

(a) $(x+2)(x-1)=5$

(b) $(x+1)^2=3-x^2$

(c) $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x}{3}$

(d) $x+\dfrac{1}{x+2}=4$

(e) $3x-\dfrac{4}{x+1}=10$

(f) $\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{3x}{x+1}$

Avancé

1032. Soit l'équation dans $\mathbb{R}$ suivante

$$3x^2 + 19x - 40 = 0$$

Répondre, sans résoudre l'équation, aux questions suivantes

(a) Combien a-t-elle de solutions ?

(b) S'il y en a deux, quelle est la somme de ses solutions ? Quel en est le produit ?

(c) Quels autres renseignements sur la ou les solutions peut-on tirer des nombres calculés à la'ide des formules de Viète ?

1033. Répondre aux mêmes questions à propos des équations dans $\mathbb{R}$ suivantes

(a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

(b) $9x^2 + 24x + 16 = 0$

(c) $3x^2 - 5x + 3 = 0$

(d) $4x^2 - 4x - 3 = 0$

(e) $3x^2 + 10x + 6 = 0$

(f) $25x^2 - 30x + 9 = 0$

1034. Écrire une équation quadratique dont les solutions dans $\mathbb{R}$ ont 11 pour somme et 12 pour produit. (NB : il n'est pas certain d'avance que cette équation existe).

1035. Faire comme au problème précédent si la somme et le produit doivent être respectivement

(a) -5 et -10

(b) -2 et 5

(c) -8 et 3

(d) 5 et 7

(e) $\frac{4}{7}$ et $\frac{-3}{7}$

(f) 0 et -1

(g) 0 et 17

(h) $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$

1.5 Équation quadratique (5) : La contradiction

1.5.1 La résolution de problèmes

Nous allons voir une méthode utilisée dans la résolution de problèmes en général. Il s'agit de la **preuve par contradiction**.

Énoncé

Existe-t-il un entier impair plus grand que tous les autres ?

Solution

Supposons que ce nombre existe : c'est-à-dire qu'on assume le fait qu'il existe un nombre entier impair plus grand que tous les autres.
Qu'est-ce qu'il se passe si on ajoute 2 à cet entier impair ? Eh bien on obtient un nouveau nombre impair qui est plus grand que le précédent. Donc, nous avons une contradiction : on a supposé qu'un tel nombre existait, mais nous avons tout de suite trouvé un autre plus grand ! Il s'en suit que notre supposition de départ ne sera jamais vraie et est donc incorrecte.

1.5.2 Pourquoi un problème aussi simple ?

C'est de manière délibérée que le problème est simple. Cela sert à amener une idée profonde et beaucoup utilisée en mathématiques :

Définition 1.5.1 : Preuve par contradiction

La **preuve par contradiction** est une approche particulière pour montrer la validité d'un énoncé.

On commence par supposer un fait ou un énoncé comme étant vrai. Puis, avec les données du problème, nous développons les conséquences de cette supposition, qui en général nous mène à un contradiction ou quelque chose d'absurde. Nous sommes alors en droit d'affirmer que la supposition de départ était fausse.

Un telle méthode de raisonnement est en même temps naturelle et rigoureuse. Nous l'employons souvent lors de nos conversations, surtout lorsqu'on est engagé dans un débat. Par exemple les dires d'un enfant :

Si c'était vrai que c'est moi qui ai mangé tous ces chocolats hier, aujourd'hui je serais malade ! Mais je vais bien. C'est que ce n'est pas moi qui les ai mangé !!

Que vous le croyez ou non, cet enfant utilise le raisonnement par contradiction pour affirmer son innocence dans cette affaire.

1.5.3 À vous maintenant

Ensemble, 5 *joueurs de foot de la même équipe ont marqué* 14 *buts, chacun ayant marqué au moins* 1 *but.* **Montrer qu'au moins deux de ces joueurs ont marqué le même nombre de buts chacun.**

1.5.4 Bases théoriques

Au moment de “mathématiser” l’énoncé d’un problème, autrement dit de poser une équation, il est utile d’avoir une liste de tâches à accomplir ou de choses auxquelles penser en vue de la résolution du problème posé.

Il faut remarquer que ce n’est pas toujours nécessaire de suivre une telle liste d’étapes, et que, parfois, la réponse vient spontanément et quasi automatiquement. Cependant, l’un des buts du cours de mathématiques est d’expliquer par quels raisonnements nous avons trouvé la solution d’un problème.

Les étapes suggérées ci-dessous sont un guide dans cette démarche.

Procédé 1.5.1 : Poser une équation

1. Vous devez **lire attentivement** l’énoncé et la **question** posée.
2. Si nécessaire faite un **croquis** de la situation.
3. Décider quelle valeur sera désignée par x. En général cette valeur fait partie de la question posée.
4. Faites une liste des informations fournies par l’énoncé et **écrire l’équation**.
5. **Résoudre** l’équation.
6. **Vérifier** que vos solutions sont **raisonnables** et qu’elles satisfont les données du problème (et de l’équation).
7. Rédiger votre **réponse** sous la forme d’**une phrase en français**.

1.5.5 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.5.1 : Exemple 1

La somme d'un nombre et de son carré vaut 42. Trouver un tel nombre.

Solution
On lit.
Ce n'est pas évident de faire un croquis, mais cela peut aider d'en faire un : représenter les nombres sous forme de figures géométriques par exemple.

Comme il faut trouver un **nombre**, posons x : le nombre recherche.

Alors son carré s'écrit x^2. D'où l'équation et sa résolution

$$\begin{array}{rrcll} & x+x^2 & = & 42 & \\ \Longleftrightarrow & x^2+x-42 & = & 0 & \text{forme canonique} \\ \Longleftrightarrow & (x+7)(x-6) & = & 0 & \text{factorisation} \end{array}$$

Donc les solutions sont $x=-7$ et $x=6$. Mais l'énoncé du problème demandais de chercher *un* nombre. Donc, on a le choix :

Rép. : Le nombre recherché est soit -7 soit 6.

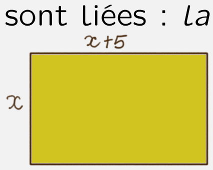
Vérification : Avec $x=-7$, on a $-7+(-7)^2=-7+49=42$, OK.

Avec $x=6$, on a $6+6^2=6+36=42$, OK.

Exemple 1.5.2 : Exemple 2

La longueur d'un rectangle est 5 cm plus grande que sa largeur. On sait que son aire vaut 84 cm^2. Trouver les dimensions du rectangle.

Solution
On lit.
La question porte sur les dimensions, et nous en avons deux. Seulement elles sont liées : *la longueur d'un rectangle est* 5 cm *plus grande que sa largeur*.



Donc si x désigne la largeur, $x+5$ désigne la longueur en centimètres. Alors

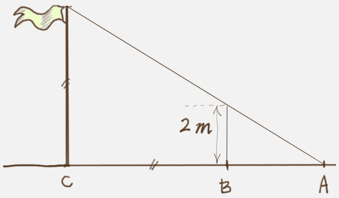
$$\begin{array}{rrcll} & x(x+5) & = & 84 & \text{la formule de l'aire} \\ \Longleftrightarrow & x^2+5x & = & 84 & \\ \Longleftrightarrow & x^2+5x-84 & = & 0 & \\ \Longleftrightarrow & (x+12)(x-7) & = & 0 & \end{array}$$

Ainsi, $x=-12$ ou bine $x=7$. Seulement x désigne une dimension, et ne peut donc être négative. Donc en définitive $x=7$. Et on a la réponse :

Rép. : Les dimensions sont 7 par 12 centimètres.

Exemple 1.5.3 : Exemple 3

La longueur du segment AB est de 3 m plus petite que la longueur du segment BC. Trouver la hauteur du mât du drapeau.



Solution
Puisqu'on cherche la hauteur du mât, soit x la lettre qui désigne la hauteur recherchée.

Alors, selon l'énoncé on a $\overline{BC} = x$ et $\overline{AB} = (x-3)$ mètres. On observe que la hauteur recherchée et la longueur du segment BC sont les mêmes.

Il ne reste plus qu'à appliquer une propriété des triangles semblables :

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{x}{2} & = & \frac{(x-3)+x}{x-3} \\ \Longleftrightarrow & x(x-3) & = & 2(2x-3) \\ \Longleftrightarrow & x^2-3x & = & 4x-6 \\ \Longleftrightarrow & x^2-7x+6 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & (x-1)(x-6) & = & 0 \end{array}$$

Et donc, x vaut 1 ou 6. Or toutes les distances doivent être positives, ce qui n'est pas le cas de $x-3$ si $x=1$. C'est donc que $x=6$.

Rép. : La hauteur du mât est de 6 mètres.

1.5.6 Exercices

Élémentaire

1036. La somme d'un nombre et de son carré vaut 110. Trouver un tel nombre.
1037. Si on soustrait 24 du carré d'un nombre, le résultat est cinq fois le nombre. Trouver un tel nombre.
1038. La somme de deux nombres est 6 et la somme de leur carré vaut 28. Trouver la valeur exacte de ces deux nombres.
1039. Deux nombres diffèrent de 7 et la somme de leur carré vaut 29. Trouver ces deux nombres.
1040. La longueur d'un rectangle est 4 cm plus grande que sa largeur. Trouver sa largeur sachant que son aire vaut 96 cm^2.

Intermédiaire

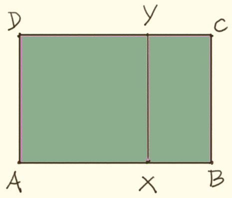
1041. La base d'un triangle est 4 m plus grande que sa hauteur. L'aire de ce triangle est de 70 m^2. Trouver la hauteur de ce triangle.

1042. On construit une clôture rectangulaire avec 60 m de fil barbelé. L'aire finale est de 216 m^2. Trouver les dimensions de l'enclos.

1043. Une pelouse rectangulaire a été construite contre un mur de briques existant. On a utilisé 24 m de bordure pour clôturer 60 m^2 de pelouse. Trouver les dimensions de la pelouse au centimètres près.

1044. Les deux cathètes d'un triangle rectangle sont 3 et 8 centimètres plus petites que son hypoténuse. Trouver la longueur de cette hypoténuse au millimètres près.

1045. Le croquis montre un rectangle $ABCD$ dans lequel $\overline{AB} = 21$ cm.



Le carré $AXYD$ est ôté et il reste un rectangle qui a 80 cm^2 de surface. Trouver la longueur du segment BC.

Avancé

1046. Le numérateur d'une fraction est 3 unités plus petit que son dénominateur. Si le numérateur est augmenté de 6 et le dénominateur de 5, la fraction est alors doublée de valeur. Trouver la fraction d'origine.

1047. Au marché, Paul achète pour 20 frs d'oranges. Claudine qui l'accompagne, achète 10 oranges de plus que Paul chez un autre marchand, mais les paie le même prix que Paul. Sachant que la différence du prix d'une orange entre les deux marchands est de 10 centimes, combien d'oranges Paul a-t-il acheté ?

1048. La somme d'un nombre et de son inverse est $2 + \frac{1}{12}$. Trouver ce nombre.

1049. La somme de deux nombres vaut 4 et la somme des leur inverses vaut 8. Trouver ces nombres.

1.6 Inéquation linéaire (1) : Analyser

1.6.1 Exemple d'introduction

Deux camarades de classe travaillent sur la résolution de l'inéquation ci-dessous

$$\boxed{\frac{2x}{x+3} < 1}$$

L'un d'entre eux réalise les suivantes étapes pour la résoudre

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{2x}{x+3} & < & 1 & \text{multiplier les deux côtés par } (x+3) \\ \Longleftrightarrow & 2x & < & x+3 & \text{soustraire } x \text{ des deux côtés} \\ \Longleftrightarrow & x & < & 3 & \end{array}$$

Son camarade, en vérifiant le résultat obtenu, observe que $x = -4$ vérifie la condition et que c'est donc une solution.

Or, en faisant la substitution dans l'expression de départ

$$\frac{2 \cdot (-4)}{(-4)+3} = \frac{-8}{-1} = 8$$

constate surpris que 8 n'est pas plus petit que 1, comme demandé !

Ils doivent donc conclure que leur solution de l'équation n'est pas correcte.

À quelle étape se situe l'erreur de l'un des étudiants ?

Y a-t-il une méthode qui donne la bonne solution à cette inéquation ?

1.6.2 Bases théoriques

Définition 1.6.1 : Inéquation

Une **inéquation** est la donnée de trois objets mathématiques,

1. Deux expressions algébriques séparées par
2. l'un des quatre symboles ci-dessous

$$< \qquad > \qquad \leqslant \qquad \geqslant$$

3. et d'une (ou plusieurs) inconnue.

Pour résoudre une **inéquation** il faut, tout comme pour les équations, **isoler l'inconnue** d'un côté de l'inégalité.

La théorie nous dit que si

$$a < b$$

alors **on peut additionner la même quantité** à gauche et à droite de l'inégalité en conservant la relation de grandeur des membres. Autrement dit que

$$a + c < b + c$$

où $c \in \mathbb{Z}$ et le symbole $<$ peut être n'importe lequel des quatre symboles d'inégalité ($<$,$>$,$\leqslant$ ou $\geqslant$).

Par exemple si on sait que

$$5 < 7$$

alors on peut ajouter 10

$$5 + 10 < 7 + 10$$

et de même on peut ajouter -12

$$5 - 12 < 7 - 12$$

Règle qui fait la différence

Il y a une règle qui fait la différence entre les équations et les inéquations.

Propriété 1.6.1

Si $c < 0$, autrement dit c est un nombre négatif, et que

$$a < b$$

alors

$$a \cdot c > b \cdot c$$

Le symbole d'inégalité doit être changé de sens.

Les intervalles

Pour donner l'ensemble solution des inéquation, on se sert d'un **intervalle**.

Définition 1.6.2 : Intervalle

Un **intervalle**, noté

$$[a\ ;\ b]$$

est la donnée de quatre éléments

1. une borne inférieure, notée a ;
2. une borne supérieure, notée b ;
3. un point-virgule, utilisé pour séparer les bornes ;
4. et une paire de crochets, dont le sens dépend de la nature de l'inégalité utilisée dans l'inéquation.

Les bornes sont telles que $a < b$.

Il existe quatre types d'intervalles

(1)	$[a\ ;\ b]$	fermé
(2)	$]a\ ;\ b]$	ouvert-fermé
(3)	$]a\ ;\ b[$	ouvert
(4)	$[a\ ;\ b[$	fermé-ouvert

Avec le cas particulier que si l'une des bornes est l'infini, alors le crochet est toujours ouvert, c'est-à-dire tourné vers l'extérieur. Notez que la borne inférieure, si elle est infinie sera toujours notée $]-\infty$, et si c'est la borne supérieure qui est infinie, alors elle sera notée $+\infty[$.

1.6.3 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.6.1 : Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ la suivante inéquation.

$$3x - 4 \leqslant 2$$

Solution

$$\begin{aligned} & 3x - 4 && \leqslant && 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 3x - 4 + 4 && \leqslant && 2 + 4 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{3x}{3} && \leqslant && \frac{6}{3} \\ \Longleftrightarrow \quad & x && \leqslant && 2 \end{aligned}$$

Ce qui donne le suivant ensemble solution $S =]-\infty;\ 2]$

Exemple 1.6.2 : Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ la suivante inéquation.

$$3 - 2x < 7$$

Solution

$$\begin{aligned} & 3 - 2x && < && 7 \\ \Longleftrightarrow \quad & 3 - 2x - 3 && < && 7 - 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & -2x && < && 4 \quad | \div (-2) \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{-2x}{-2} && > && \frac{4}{-2} \; (*) \quad \longleftarrow \text{Attention l'inégalité change de sens !} \\ \Longleftrightarrow \quad & x && > && -2 \end{aligned}$$

Attention : ici (*) l'inégalité change de sens. En effet, nous avons divisé par un nombre négatif.

Ce qui donne le suivant ensemble solution $S =]-2;\ +\infty[$

Exemple 1.6.3 : Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ la suivante inéquation.

$$-5 < 9 - 2x$$

Solution

$$\begin{array}{lrcl}
 & -5 & < & 9 - 2x \\
\Longleftrightarrow & -5+2x & < & 9 - 2x+2x \\
\Longleftrightarrow & 2x - 5 & < & 9 \\
\Longleftrightarrow & 2x - 5+5 & < & 9+5 \\
\Longleftrightarrow & 2x & < & 14 \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{2x}{2} & < & \dfrac{14}{2} \\
\Longleftrightarrow & x & < & 7
\end{array}$$

Ce qui donne le suivant ensemble solution $S =]-\infty;\ 7[$

1.6.4 Exercices

Élémentaire

1050. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner le graphe des solutions
   (a) $3x + 2 < 0$
   (b) $5x - 7 > 2$
   (c) $2 - 3x \geqslant 1$
   (d) $5 - 2x \leqslant 11$
1051. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner le graphe des solutions
   (a) $2(3x - 1) < 4$
   (b) $5(1 - 3x) \geqslant 8$
   (c) $7 \geqslant 2x - 1$
   (d) $-13 < 3x + 2$
1052. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner le graphe des solutions
   (a) $20 > -5x$
   (b) $-3 \geqslant 4 - 3x$
   (c) $3 < 5 - 2x$
   (d) $2 \leqslant 5(1 - x)$
1053. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner le graphe des solutions
   (a) $3x + 2 > x - 5$
   (b) $2x - 3 < 5x - 7$
   (c) $5 - 2x \geqslant x + 4$
   (d) $7 - 3x \leqslant 5 - x$
1054. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner le graphe des solutions
   (a) $3x - 2 > 2(x - 1) + 5x$
   (b) $1 - (x - 3) \geqslant 2(x + 5) - 1$
   (c) $5x - 2x \geqslant x - 4$
   (d) $3 - 7x \leqslant -5x - x$

Intermédiaire

1055. Résoudre dans $\mathbb{R}$. Commenter vos solutions.

(a) $3x + 1 > 3(x + 2)$

(b) $5x + 2 < 5(x + 1)$

(c) $2x - 4 \geqslant 2(x - 2)$

Avancé

Pas d'exercices avancé cette semaine.

1.7 Inéquation linéaire (2) : Résolution de problèmes

Fabrice et Romain jouent dans la même équipe de football.
La semaine dernière, Romain a marqué trois buts de plus que Fabrice, mais ensemble, ils ont marqué moins de neuf buts.
Quel est le nombre de buts que Romain peut avoir marqué ?

Dans cet exemple, on demande quels sont *tous* les buts que Romain a pu marquer.

Pour répondre à la question posée, on s'appuie sur une **inégalité**, mais avant il faut, comme on le fait dans la résolution de n'importe quel problème à texte, définir une (ou plusieurs) inconnue.

Posons donc x comme étant le nombre de buts que Romain aurait pu marquer et y comme étant le nombre de buts que Fabrice aurait pu marquer. Sachant qu'il n'y a pas de *demi-but*, les inconnues x, y prennent leurs valeurs dans les entiers naturels, noté $\mathbb{N}$. Ainsi on a l'inégalité suivante :

$$x + y < 9 \tag{1.1}$$

Or, il y a une information de plus que nous n'avons pas utilisée : *"Romain a marqué trois buts de plus que Fabrice"*. Ce qui veut dire que l'on peut écrire $x = y + 3$.

On observe que Romain a marqué au minimum 3 but. Mais voyons ce que donne cette information insérée dans l'inéquation (1.1) :

$$\begin{array}{rrcl} & y+3+y & < & 9 \\ \iff & 2y+3 & < & 9 \\ \iff & 2y & < & 6 \\ \iff & y & < & 3 \end{array}$$

C'est donc que $y \in \{0, 1, 2\}$ et que $x \in \{3, 4, 5\}$.

Rép. : Romain aurait marqué **3**, **4** ou **5**.

1.7.1 Bases théoriques

Voir cours de la semaine précédente.

1.7.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.7.1 : Exemple 1

Au début de l'été, Sandra a 500 fr dans son compte épargne. À la fin de l'été, elle aimerait avoir encore, au moins, 200 fr dans son compte.
Elle retire 25 fr chaque semaine.
Sous ces conditions, durant combien de semaines Sandra peut-elle retirer de l'argent ?

Solution
Posons x : **nombre de semaines durant lesquelles Sandra peut retirer de l'argent**.
Alors, nous avons l'inégalité suivante

$$500 - 25 \cdot x \geqslant 200$$

que l'on peut résoudre en *isolant* le x :

$$\begin{array}{rrcl} & 500 - 25x & \geqslant & 200 \\ \iff & 500 - 200 & \geqslant & 25x \\ \iff & \dfrac{300}{25} & \geqslant & x \\ \iff & 12 & \geqslant & x \end{array}$$

Réponse : Elle peut retirer de l'argent pendant au plus 12 semaines.

Exemple 1.7.2 : Exemple 2

Le tarif d'une compagnie de taxi est de 5 fr. de prise en charge et de 0,75 fr. par kilomètre. Tex, qui ne peut dépense qu'au plus 35 fr., doit prendre un taxi.
Combien de kilomètres peut-il voyager en taxi sans dépasser son budget ?

Solution
x : nombre de kilomètres que Tex peut voyager en taxi.
Alors, comme il ne doit pas dépasser 35 fr., on a l'inéquation suivante :

$$5 + 0{,}75x \leqslant 35$$

que l'on peut résoudre comme suit :

$$\begin{array}{rrcl} & 5 + 0{,}75x & \leqslant & 35 \\ \iff & 0{,}75x & \leqslant & 30 \\ \iff & \dfrac{3}{4}x & \leqslant & 30 \\ \iff & x & \leqslant & \dfrac{4}{3}30 \\ \iff & x & \leqslant & 40 \end{array}$$

Réponse : Il peut voyager en taxi durant 40 km au plus.

1.7.3 Exercices

Élémentaire

1056. Le prix des billets au cinéma est de 10,50 francs en fin de semaine. Poser et résoudre une inéquation permettant de trouver le maximum de billets que l'on peut acheter avec 205 francs.

1057. La longueur et la largeur d'un rectangle sont notées x et y respectivement. Si ce rectangle a une aire de 24 cm^2, donner la liste des possibles paires d'entiers x et y tels que $x > y$.

1058. Dans un collège londonien, le nombre de points minimum pour obtenir le degré A est de 75. Prince a réussi à atteindre une moyenne pour le degré A sur trois de ses tests scientifiques. Quel est le nombre minimum de points qu'il a fait dans son premier test si son score dans les deuxième et troisième tests étaient de 76 et 89 respectivement ?

1059. Le périmètre d'un carré mesure au plus 81 cm. Quelle est la mesure de la plus grande surface possible pour ce carré ?

Intermédiaire

1060. Si la somme de trois entiers consécutifs est plus petite que 75, trouver le cube du plus grand entier possible parmi les trois étudiés.

1061. Linda ouvre sa tirelire et y trouve 50 pièces de 2 et 5 francs. Si le montant total d'argent que forment ces pièces est plus grand que 132 francs, trouver le nombre minimum de pièces de 5 francs qu'elle a en sa possession.

1062. Dans un test aux Olympiades de maths, on donne 5 points pour une question correctement répondue et on enlève 2 points pour une question incorrectement répondue ou si la question est laissée sans réponse. Jenny répond aux 30 questions du test et son total de points n'est pas supérieur à 66.

   Trouver le nombre maximum de questions auxquelles elle a répondu correctement.

1063. Lixin a 3 ans de moins que Rui Feng. Si la somme de leurs âges est au plus 50 ans, trouver l'âge maximum qu'avait Lixin il y a 5 ans.

Avancé

1064. Dire pour chaque cas ci-après si l'énoncé est vrai ou faux. Si votre réponse est *faux*, donner une explication.

(a) Si $a > b$ et que a et b sont tous deux négatifs, alors $\dfrac{a}{b} > 1$.

(b) Si $a > b$ et que a et b sont tous deux négatifs, alors $a^3 > b^3$.

(c) Si $a > b$ et que a et b sont tous deux négatifs, alors $\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b} > 0$.

1.8 Inéquation linéaire (3) : Étudier

1.8.1 Comment étudier ?

C'est sans doute une question qui vous vient à l'esprit.

Alors voici quelques conseils qui peuvent vous aider.

1.8.2 Faire des fiches de révision

Oui, faire des fiches de révision c'est un bon moyen de se souvenir des procédés que vous devez apprendre par coeur.

Dans ces fiches il peut y avoir du texte, un exemple d'exercices résolu ou encore, et surtout, des formules. Mettez-y de la couleur et penser à *résumer* le contenu du cours. Après tout, si vous voulez les détails, vous avez le cours et vos notes de cours.

Ces fiches servent avant les test, mais aussi et surtout durant toute la période d'étude du sujet dont parlent les fiches. Par exemple, au moment de faire vos exercices ! Vous pouvez les consulter encore et encore, et à chaque fois que vous faites vos devoirs. L'idée est de ne plus les utiliser, car à force de les consulter, vous n'aurez plus besoin de les lire, vous aurez appris leurs contenu.

1.8.3 Faire des micro épreuves

Comme je l'ai dit à certains d'entre vous, afin de maîtriser le stress au moment des tests, une piste à explorer est de faire très souvent des contrôles, sans le cours et sans vos notes de cours. L'idée est de vous soumettre (votre corps et votre esprit) à un micro test, que vous pouvez effectuer en tout temps. Voici comment cela peut se présenter.

1. Copier l'énoncé d'un exercice sur une feuille vierge. Copiez-le en entier, et avec votre plu belle écriture. Il faut que vous ayez *plaisir* à écrire cet énoncé. Vous pouvez marquer encore plus votre plaisir à l'écrire en le coloriant, en y ajoutant des dessins etc. Cela dépend au fond de votre état du moment et de la discipline que vous étudiez.
2. Ensuite quittez la pièce dans laquelle vous êtes, et *oubliez* l'énoncé durant quelques minutes. Allez boire un verre d'eau par exemple, arrêtez-vous lire une BD, sortez le chien, etc. L'idée est de vous mettre en situation pour passer un test.
3. Revenez dans la pièce où vous avez laissé votre *test* et résolvez votre exercice, **en ne vous servant que de votre souvenir du cours**. En ce qui concerne mon cours, cela doit vous prendre entre 5 et 10 minutes maximum. Passé ce délai, vous contrôlez avec l'aide de la correction, si vous avez réussi votre exercice ou pas.
4. Ensuite vient la partie intéressante et qui vous fait avancer : soit vous avez réussi votre exercice et vous êtes content, et vous pouvez recommencer avec un autre exercice, peut-être plus difficile, et ainsi de suite ; soit vous n'avez pas réussi l'exercice et dans ce cas **vous devez vous poser la question** : ''*à quel moment et pourquoi (quel partie de l'énoncé, etc.) je n'ai pas résolu correctement l'exercice ?*''. Cette question est importante, car vous allez revenir en classe avec elle et tout autre question que vous aurez écrite.

1.8.4 Travailler en groupe

C'est un excellent moyen de vous mettre à l'épreuve : expliquer aux autres ce que vous avez compris. Ne vous inquiétez pas, si votre explication ou raisonnements ont des manques, votre interlocuteur saura vous l'indiquer. C'est même vous qui pourrez vous rendre compte que cela ne va pas : regardez le visage de l'autre et décelez des indices d'incompréhension.

C'est aussi en se *frottant* aux raisonnements et explications de vos pairs que vous allez renforcer vos connaissances. Et n'ayez pas peur : **vous êtes tous ici pour apprendre**.

1.8.5 Bases théoriques

Les bases théoriques des sections précédentes.

1.8.6 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.8.1 : Exemple 1

Déterminer quels sont les x vérifiant la condition suivante

$$x^2 \leqslant -1$$

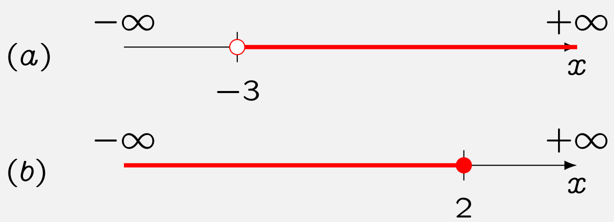
Solution
La première chose à faire est de tester pour quelques nombres, on peu tester ce que deviennent 0, $-1{,}5$, 3 et -2 au carré, par exemple :

$$0^2 = 0 \qquad (-1{,}5)^2 = 2{,}25 \qquad 3^2 = 9 \qquad (-2)^2 = 4$$

On voit que lorsque x est négatif, x^2 **donne toujours un nombre positif**, et que ceci est vrai pour tout nombre réel.
Rép. : En conséquence **il n'y a aucun nombre qui vérifie la condition**.

Exemple 1.8.2 : Exemple 2

Donner les intervalles correspondant aux graphiques suivants



Solution
On identifie tout d'abord les bornes inférieure (à gauche) et supérieure (à droite). Ensuite on vérifie si la borne numérique (autre que l'infini) est prise inclue dans l'intervalle ou pas. Elle est inclue si le petit disque est plein.
Ainsi on a $\quad (a) \quad S =]-3\ ;\ +\infty[\qquad (b) \quad S =]-\infty\ ;\ 2]$

Exemple 1.8.3 : Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'inéquation suivante :

$$-12 < 3x \leqslant 3$$

Solution
La condition posée par l'énoncé comprend en fait deux inéquations celle de **gauche**

$$-12 < 3x$$

et celle de **droite**

$$3x \leqslant 3$$

Elle doivent être traitées séparément. On commence par résoudre celle de gauche, on et on donne l'ensemble solution, pas besoin de donner le graphique :

$$\begin{array}{rrcl} & -12 & < & 3x \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{-12}{3} & < & x \\ \Longleftrightarrow & -4 & < & x \\ \Rightarrow & S_g & = & \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ldots\} \end{array}$$

Et ensuite, celle de droite

$$\begin{array}{rrcl} & 3x & \leqslant & 3 \\ \Longleftrightarrow & x & \leqslant & \dfrac{3}{3} \\ \Longleftrightarrow & x & \leqslant & 1 \\ \Rightarrow & S_d & = & \{\ldots -2;\ -1;\ 0;\ 1\} \end{array}$$

Et l'ensemble solution est constitué de tous les nombres qui sont à la fois dans S_g et dans S_d, autrement dit dans l'intersection de ces deux ensembles :

$$S = S_g \cap S_d = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1\}$$

1.8.7 Exercices

Élémentaire

1065. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

(a) $x + 1 < 3$

(b) $x - 5 \geqslant 12$

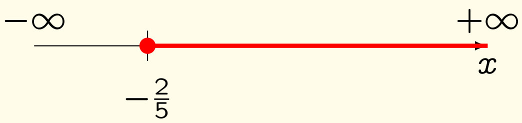
(c) $3x \leqslant 12$

(d) $\dfrac{x}{4} \leqslant 7$

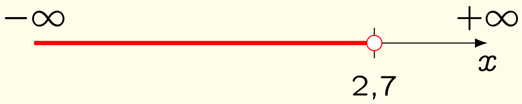
(e) $-2x + 1 > 11$

1066. Donner les intervalles correspondant aux graphiques suivants

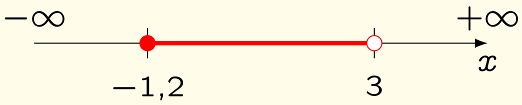
(a)



(b)



(c)



1067. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner le graphique ainsi que l'ensemble solution.

(a) $2 - 3x < 5x$

(b) $-3 + \dfrac{x}{5} \geqslant -x$

(c) $\dfrac{1-x}{2} + 5 < 0$

(d) $-x - \dfrac{2-x}{2} \leqslant -3$

Intermédiaire

1068. Résoudre les inéquations ci-dessous dans $\mathbb{Z}$:

(a) $3 < x < 10$

(b) $-2 < x \leqslant -1$

(c) $-2 < x < 2$

(d) $1{,}5 < x < 6$

(e) $-2{,}5 < x \leqslant 4$

(f) $-1 < x < 1$

Avancé

1069. La somme de trois entiers consécutifs est inférieure à 33. Quels peuvent être les plus grands nombres des triplets possibles dont la somme donne 33 ?

1070. Je pense à un nombre, le double et ajoute quatre. Le résultat est plus grand que lorsque je multiplie par trois ce nombre et lui soustrait cinq. Trouver trois valeurs possibles pour mon nombre.

1.9 Systèmes d'inéquations linéaires (1) : Tarifs postaux

Jusqu'à présent, nous avons travaillé avec des **équations** linéaires, des expressions algébriques séparées par une égalité : $=$.

Dans ce qui suit nous allons travailler avec des **inéquations** linéaires à une inconnue, deux **expressions algébriques** séparées par l'un des quatre symboles suivants : $<\quad\leqslant\quad>\quad\geqslant$.

1.9.1 Exemple d'introduction

Le tableau ci-contre indique les tarifs postaux pour les lettres et petits colis vers la Malaisie proposés par une entreprise locale.

Poids [m en g]	Coût [ct]
$0 < m \leq 20$	45
$20 < m \leq 50$	55
$50 < m \leq 100$	85
$100 < m \leq 200$	185
$200 < m \leq 300$	285

1. Que coûte l'envoi vers la Malaisie de trois lettres pesant 57 g, 25 g et 257 g ?
2. Quel est le prix maximale qu'on peut payer pour l'envoi de trois colis ou lettres ?
3. Quel est le prix minimal pour l'envoi de deux lettres ?

1.9.2 Bases théoriques

Pour résoudre des inéquations linéaires simultanément, nous devons trouver l'ensemble solution de chaque inéquation séparément, puis de ne considérer **que les solutions communes aux ensembles trouvés**.

Par exemple, si on nous donne

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 8 \end{cases}$$

alors l'ensemble solution pour la première inéquation est $[5;\ +\infty[$ et pour la seconde est $]-\infty;\ 8]$.
Ainsi l'intersection entre ces deux ensembles est $[5;\ 8]$, qui est l'ensemble solution de ce système d'inéquations.

On peut savoir si $x = 5$ vérifie les inéquations $3x \leq x + 6$ et $2x + 4 < 3x$, en **substituant** 5 à x dans les deux inéquations.

Dans le cas présent
$$3 \cdot (5) = 15 > 5 + 6 = 11$$
et donc 5 ne vérifie pas les équations simultanément, et ne fait pas partie de l'ensemble solution.

Le système

$$\begin{cases} 3x \leq x + 6 \\ 2x + 4 < 3x \end{cases}$$

a-t-il des solutions ?

1.9.3 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.9.1 : Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant

$$\begin{cases} 2x - 3 < x \\ 5x \leqslant -10 \end{cases}$$

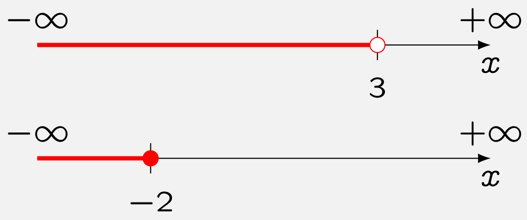
Solution

On va résoudre comme on ferai avec des équations : en isolant l'inconnue x d'un côté de l'inégalité :

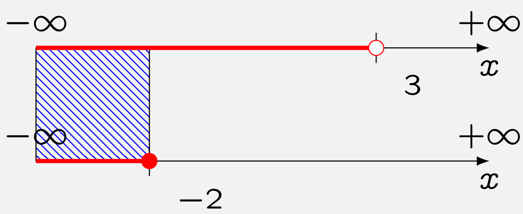
$$\begin{cases} 2x - 3 < x \\ 5x \leqslant -10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - x < 3 \\ x \leqslant \dfrac{-10}{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < 3 \\ x \leqslant -2 \end{cases}$$



On voit donc que l'intersection entre ces deux ensembles de nombres existe



c'est-à-dire, que tous les nombres compris dans le rectangle sont l'ensemble solution :

$$S =]-\infty\ ;\ -2]$$

Exemple 1.9.2 : Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant

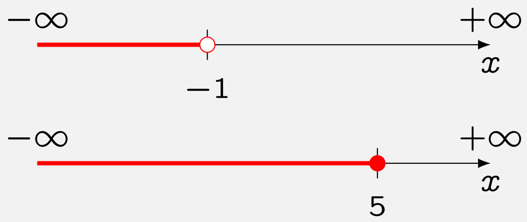
$$\begin{cases} 2x - 3 < -5 \\ \dfrac{7}{3} + \dfrac{x}{3} \leqslant 4 \end{cases}$$

Solution
On va résoudre comme on ferai avec des équations : en isolant l'inconnue x d'un côté de l'inégalité :

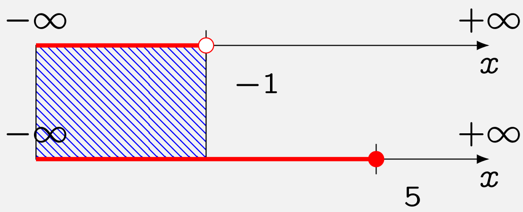
$$\begin{cases} 2x - 3 < -5 \\ \dfrac{7}{3} + \dfrac{x}{3} \leqslant 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x < -2 \\ 7 + x \leqslant 12 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < -1 \\ x \leqslant 5 \end{cases}$$



Si l'on trace l'intersection entre ces deux ensembles de nombres (la partie colorée correspond aux nombres de l'ensemble), on a



et l'ensemble solution est :

$$S =]-\infty\ ;\ -1]$$

Exemple 1.9.3 : Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation ci-dessous

$$3x \leqslant x + 6 < 3x + 6$$

Solution
Dans cet exercice, il faut séparer l'expression donnée en deux inéquations, les résoudre soit séparément soit en les mettant dans une accolade.

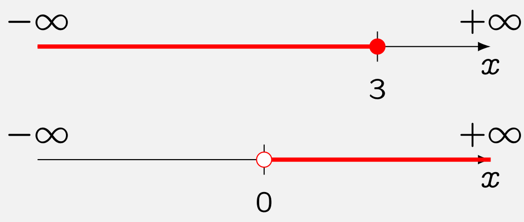
$$3x \leqslant x + 6 < 3x + 6$$

$$\iff \begin{cases} 3x \leqslant x + 6 \\ x + 6 < 3x + 6 \end{cases}$$

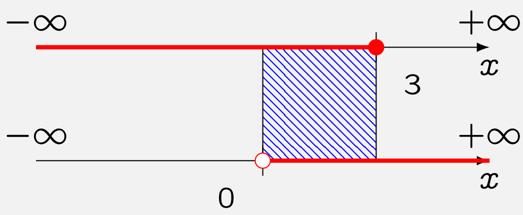
$$\iff \begin{cases} 2x \leqslant 6 \\ x < 3x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leqslant 3 \\ 0 < 2x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leqslant 3 \\ 0 < x \end{cases}$$



l'intersection est



et donc l'ensemble solution est $S =]0\ ;\ 3]$

Exemple 1.9.4 : Exemple 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation ci-dessous

$$4x + 14 \leqslant x + 5 < 3x - 1$$

Solution
Comme avant on sépare l'expression donnée en deux inéquations, puis on les résout soit séparément soit en les mettant dans une accolade.

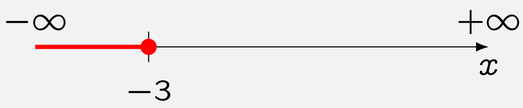
$$4x + 14 \leqslant x + 5 < 3x - 1$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 14 \leqslant x + 5 \\ x + 5 < 3x - 1 \end{cases}$$

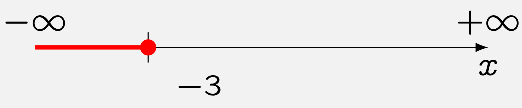
$$\iff \begin{cases} 3x \leqslant -9 \\ -2x < -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leqslant -3 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leqslant -3 \\ x > 3 \end{cases}$$



l'intersection est



vide, donc il n'y a pas d'ensemble solution, autrement dit $S = \varnothing$

1.9.4 Exercices

Élémentaire

1071. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et donner le graphique ainsi que l'ensemble solution.

$$\begin{cases} x - 3 < 2x - 5 \\ 7x + 2 > 8 \end{cases}$$

1072. Résoudre dans $\mathbb{R}$. Donner l'ensemble solution ainsi que le graphique.

$$\begin{cases} -8x - 2 < 6 + 4x \\ x - 2 > 4 \end{cases}$$

1073. Résolvez dans $\mathbb{R}$, donner le graphique et l'ensemble solution.

$$\begin{cases} 3x + 5 < 6x - x \\ 5(2 - x) > x \end{cases}$$

1074. Résoudre dans $\mathbb{R}$. Donner le graphique ainsi que l'ensemble solution.

$$\begin{cases} 2x < \pi \\ -x > -1{,}6 \end{cases}$$

Intermédiaire

1075. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

(a) $3 - a \leqslant a - 4 \leqslant 9 - 2a$
(b) $1 - b < b - 1 < 11 - 2b$
(c) $3 - c < 2c - 1 < 5 + c$

1076. Résoudre dans $\mathbb{Z}$.

(a) $5x - 1 < 4$ et $3x + 5 \geqslant x + 1$
(b) $2x - 5 \geqslant 1$ et $3x - 1 < 26$
(c) $-4 \leqslant 2x \leqslant 3x - 2$

1077. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

(a) $\frac{a}{4} + 3 \leqslant 4 \leqslant \frac{a}{2} + 6$

(b) $\frac{b}{3} \geqslant \frac{b}{2} + 1 \geqslant b - 1$

1078. Résoudre dans $\mathbb{Z}$.

(a) $3x - 5 < 26 \leqslant 4x - 6$
(b) $3x + 2 < 19 < 5x - 4$
(c) $-4 \leqslant 7 - 3x \leqslant 2$

Avancé

1079. Sachant que x est un nombre premier, trouver les valeurs de x qui vérifient

$$\frac{1}{2}x - 4 > \frac{1}{3}x \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}x + 1 < \frac{1}{8}x + 3$$

1080. Un nombre entier x est tel que

$$x + 2 < 5\sqrt{17} < x + 3$$

Trouver un tel entier.

1081. Sachant que x est un nombre premier, trouver la valeur de x pour laquelle

$$3x - 2 \geqslant 10 \geqslant x + 4$$

1.10 Système d'inéquations linéaires (2) : Au marché

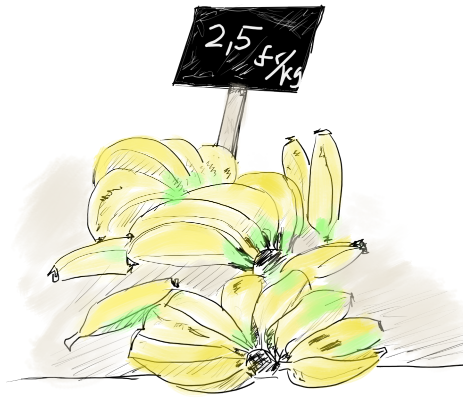
Dans cette section nous étudions la résolutions de problèmes liés à la notion d'inéquation.

1.10.1 Énoncé

Un marchand se rend au marché avec 100 kg d'oranges et 120 kg de bananes. Il vend les oranges à 3 fr./kg et les bananes à 2,5 fr./kg.

À la moitié de la matinée, il avendu toutes ses oranges mais il ui reste beaucoup de bananes.

Combien doit-il avoir vendu de bananes s'il veut que la vente de ces deux produits soit d'au moins 500 fr. et d'au plus 1 000 fr. ?



1.10.2 Solution

Une lecture attentive de l'énoncé, d'au moins deux fois, permet de poser une "double" inéquation.

Après avoir posé que M est le montant gagné par le marchand on peut écrire

$$500 \leq \quad M \quad \leq 1000$$

d'où deux inéquations à résoudre

$$\begin{cases} 500 \leq M \\ M \leq 1000 \end{cases}$$

Vous dévez maintenant exprimer M **en fonction** du nombre de bananes à vendre, de leur prix à l'unité et du gain déjà effectué sur la vente de toutes les oranges.

Ainsi vous trouvez que le nombre de bananes doit être compris entre 80 et 140 unités.

Sauriez-vous exprimer M pour retrouver le résultat obtenu ?

1.10.3 Bases théoriques

Pour résoudre des problèmes impliquant des inégalités, il faut être attentif aux mots utilisés dans l'énoncé donné.

En effet, contrairement à la résolution de problèmes en général, on a affaire avec des inéquations lorsque les mots **au moins**, **au plus**, **moins que**, **plus que**, par exemple, figurent dans le texte décrivant la situation donnée.

Comment lire les symboles

Voici une correspondance entre les mots en français pouvant apparaître dans les énoncés et le symbole mathématique associé.

Symbole		***Sens***
$<$	signifie	*est plus petit que, est inférieur à*
$>$	signifie	*est plus grand que, est supérieur à*
$\leq$	signifie	*est plus petit ou égal à, au plus*
$\geq$	signifie	*est plus grand ou égal à, au moins*
$x < 7$	se lit	x *est plus petit que* 7, x *est inférieur à* 7
$3 \leq x \leq 8$	se lit	x *est plus grand ou égal à* 3 *mais plus petit ou égal à* 8
$3 < x < 8$	se lit	x *est compris entre* 3 *et* 8
$x \geq 50$	se lit	x *vaut au moins* 50
$x \leq 70$	se lit	x *vaut au plus* 70
$x > 50$	se lit	x *vaut plus que* 50
$x < 70$	se lit	x *vaut moins que* 70

Les phrases suivantes, peuvent faire l'objet d'une inéquation, si elles se trouvent dans un énoncé :

- *Ce film est interdit aux moins de* 15 *ans.*
- *Mon compte en banque ne peut pas descendre en dessous de* 500 fr.
- *Aujourd'hui ma note de supermarché ne doit pas dépasser* 80 fr.
- *Le coût de production de cet article ne peut pas dépasser* 17,50 fr. *par pièce produite, et la quantité de pièces doit être supérieure à* 12500 *par mois.*
- *Ce produit doit être conservé à au plus* 4 °C.
- *La vitesse maximum autorisée est de* 50 km/h.

Rappel : marche à suivre pour résoudre des problèmes

1. Lire attentivement et souligner les mots clé ;
2. définir une inconnue (par exemple x : *le nombre de pommes cherché*) ;
3. déterminer quel symbole utiliser : $=$, $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$;
4. écrire une inégalité puis la résoudre ;
5. vérifier la cohérence de la réponse.

1.10.4 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.10.1 : Exemple 1

Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la différence $x-3$ est inférieure à la somme $2x+3$ et supérieure au quadruple de x ?

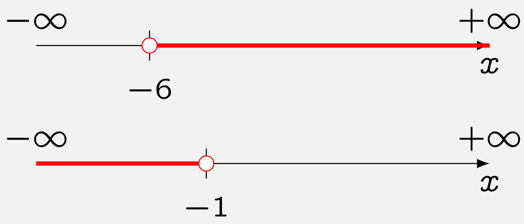
Solution On relit au besoin l'énoncé.

On a déjà tout ce qu'il faut. On traduit l'énoncé et on résout :

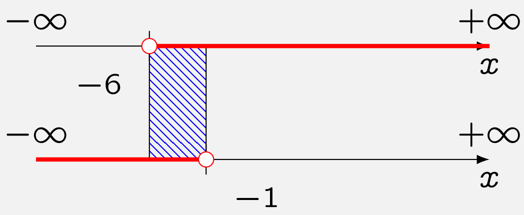
$$\begin{cases} x-3 < 2x+3 & \text{première condition} \\ 4x < x-3 & \text{seconde condition} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6 < x \\ 3x < -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6 < x \\ x < -1 \end{cases}$$



On voit donc que l'intersection entre ces deux ensembles de nombres existe



c'est-à-dire, que tous les nombres compris dans le rectangle sont l'ensemble solution :

$$S =]-6\ ;\ -1[$$

1.10.5 Exercices

Élémentaire

1082. On sait, que dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des deux autres. Les mesures des côtés d'un triangle sont 7 cm, 5 cm et $x + 3$ cm. Quelles sont les valeurs de x qui permettent de construire un tel triangle ?

1083. Un élève a obtenu les notes de 3,5 et de 4,5 aux deux premiers test d'anglais. Quelle note doit-il obtenir au troisième test pour obtenir une moyenne comprise entre 4,5 et 5 ?

1084. La somme de trois entiers consécutifs n'est pas plus petite que 51 et est inférieure à 60. Quels sont ces triplets ?

1085. Alice veut changer sa garde robe et décide de faire des achats. Elle ne veut pas dépenser plus de 650 fr. et a déjà réservé une robe coûtant 60 fr. dans la boutique où elle se rend cet après-midi. Ses parents vont lui donner la même somme d'argent le printemps prochain pour autant qu'elle dépense au moins la moitié de ce qu'elle a reçu. Ses parents lui donnent 1 000 fr. chaque printemps. Combien doit-elle dépenser au minimum (au franc près) pour avoir le même budget le printemps prochain ?

1086. À la vente annuelle de pâtisserie, les élèves vendent les gâteaux à 1,50 fr. la pièce. Ils espèrent faire mieux que l'année passée, occasion à laquelle ils avaient vendu des pâtisseries pour un total de 1 300 fr. Les estimations de l'élève responsable indiquent qu'ils feront mieux que l'an passé et qu'ils ne dépasseront pas les 1 450 fr.

   Ayant bénéficié d'une donation de 100 fr. d'une maman, combien de gâteaux espèrent-ils vendre cette année ?

Intermédiaire

1087. Alice travaille dans un bureau au centre ville et gagne 42 fr./h. Elle doit faire nettoyer son appartement tous les jours pour 75 fr. Elle voudrait économiser et décide de se faire plus de 260 fr. par jour. Combien d'heures, au minimum, doit elle travailler pour atteindre son objectif, et au maximum pour éviter un gain supérieur ou égal à 350 fr. ?

Avancé

1088. Lise roule sur autoroute à une vitesse moyenne de 110 km/h. Elle est à 165 km du péage. Nicolas est parti plus tard et circule sur la même autoroute à 120 km/h de moyenne. Il veut rattraper Lise avant le péage. Quelle doit être la distance minimale entre Lise et Nicolas pour que cela soit possible ?

Indication : commencer par remplir le tableau ci-dessous.

	Vitesse (v)	**Durée (t)**	**Distance ($d = v \cdot t$)**
Lise	110 km/h	...	165 km
Nicolas	120 km/h	...	165 km + x

1.11 Équations trigonométriques (1) : Une approche particulière

1.11.1 Exemple d'introduction

À l'instar des formules de Viète, on peut établir des formules afin de résoudre facilement les deux types d'équations trigonométriques que l'on va étudier cette année.

C'est une résolution algébrique que nous nous proposons d'introduire.

Nous verrons essentiellement la forme d'équation trigonométrique suivante :

$$a \cdot \sin(b \cdot x) = c \qquad \text{et} \qquad a \cdot \cos(b \cdot x) = c$$

où a, b et c sont des nombres réels et x l'inconnue exprimée en degrés.

Comme pour les équations quadratiques, $a \neq 0$ est essentiel.

Nous avons aussi un discriminant

Si	$\frac{c}{a} \notin [-1; 1]$
alors	$S = \varnothing$
sinon	il y a, a priori, une infinité de solutions.

Pour le sinus

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sin^{-1}(c/a)}{b} + n \cdot \frac{360}{b} \\ x &= \frac{-\sin^{-1}(c/a)}{b} + \frac{180}{b} + n \cdot \frac{360}{b} \end{aligned} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

et pour le cosinus

$$x = \frac{\pm\cos^{-1}(c/a)}{b} + n \cdot \frac{360}{b} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

Cette semaine nous étudions les solutions dans le cas où $n = 0$, c'est-à-dire pour des $x \in [0°; 360°]$.

1.11.2 Bases théoriques

Dans cette section, nous étudions la résolution des équations du type ci-dessous :

Définition 1.11.1 : Format d'équations trigonométriques étudié

$$a \cdot \sin(b \cdot x) = c \qquad\qquad a \cdot \cos(b \cdot x) = c$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$ et x un angle exprimé en degrés.

Mais avant, il faut comprendre que les **fonctions** $\sin(\dots)$ **et** $\cos(\dots)$ **figurent sur votre calculatrice**. Elles reçoivent un **angle** en argument et vous restituent un **nombre**.

Par exemple, si vous voulez connaître ce que vaut le sinus de 90° alors vous tapez sin, puis 9, 0,) et finalement enter. Votre calculatrice vous donne la valeur 1.

Vous n'aurez pas tout de suite la définition exacte de ce qu'est une fonction sinus ou cosinus. Néanmoins, **vous pouvez comprendre** qu'il s'agit de fonctions comme x^2 ou $\sqrt{\ }$: vous invoquez la fonction et lui donner un argument et, en retour, la fonction vous calcule une valeur.

Particularités des fonctions sinus et cosinus

Calculez sin(30). Remarquer que votre calculatrice doit être placée en mode "degrés" (touche mode et placer la surbrillance sur "DEG").

Elle calcule et vous donne $\frac{1}{2}$. Or $\sin(30 + 360) = \frac{1}{2}$ aussi ! Et il y a plus : tous les 360° le sinus est le même quelque soit l'angle en entrée. On définit ainsi la

Période du sinus

$$\sin(x + n \cdot \mathbf{360}) = \sin(x), \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

ce n indique le "nombre de tours", et son signe le sens de rotation. Nous verrons en Semaine 23, ce qu'il en est de ces rotations et les graphiques de ces fonctions. Pour l'instant retenez que tous les 360°, le sinus donne la même valeur. C'est d'ailleurs aussi vrai pour la fonction cosinus, pour laquelle on a aussi la

Période cosinus

$$\cos(x + n \cdot \mathbf{360}) = \cos(x), \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

Une autre particularité est la valeur que restituent ces deux fonctions.

Les fonction sinus et cosinus on des images comprises dans l'intervalle $[-1; 1]$. Autrement écrit on a

Intervalle $\sin$ **et** $\cos$

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$$

Règles à apprendre

Les règles suivantes sont à connaître, car elles vont vous servir pour résoudre algébriquement les équations trigonométriques.

Définition 1.11.2 : Fonctions trigonométriques inverses

$$\sin(x) = k \iff x = \sin^{-1}(k)$$

$$\cos(x) = k \iff x = \cos^{-1}(k)$$

avec $-1 \leqslant k \leqslant 1$ et x un angle exprimé en degrés (°).

Par ailleurs nous avons les deux égalités suivantes, qui seront étudiées plus en détail plus tard dans le cours :

Définition 1.11.3 : Angles ayant le même sinus / cosinus

$$\sin(x) = \sin(180 - x)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

avec x un angle exprimé en degrés (°).

1.11.3 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.11.1 : Exemple 1

Calculer à l'aide de votre calculatrice. Donner votre réponse avec 4 chiffres après la virgule (au dix-millième) si nécessaire.

(1) $\cos(10)$
(2) $\cos(-10)$
(3) $\cos(0)$
(4) $\cos(90)$
(5) $\cos(180)$
(6) $\sin(30)$
(7) $\sin(180-30)$
(8) $\sin(0)$
(9) $\sin(90)$
(10) $\sin(180)$

Solution

(1) $\cos(10) \simeq 0{,}9848$
(2) $\cos(-10) \simeq 0{,}9848$
(3) $\cos(0) = 1$
(4) $\cos(90) = 0$
(5) $\cos(180) = -1$
(6) $\sin(30) = \dfrac{1}{2}$
(7) $\sin(180-30) = \dfrac{1}{2}$
(8) $\sin(0) = 0$
(9) $\sin(90) = 1$
(10) $\sin(180) = 0$

Exemple 1.11.2 : Exemple 2

Trouver la valeur de l'angle dont le sinus et/ou le cosinus sont donnés.

(1) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(2) $\cos(-x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(3) $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
(4) $\sin(x) = \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Solution Dans les quatre cas, nous **devons** utiliser la règle principale introduite plus haut, à savoir l'utilisation des **fonctions réciproques** pour le sinus et le cosinus.
Sur votre calculette, vous pressez la touche 2nd, puis la touche de la fonction dont vous voulez la réciproque.
Algébriquement, il faut aussi, comme pour les autres équations, utiliser le symbole $\Longleftrightarrow$ entre deux équations. Pour rappel, ce symbole veut dire *équivalent*, autrement dit que *l'équation qui suit est équivalente à la précédente*. Le point de théorie qui justifie cette utilisation est que **deux équations équivalentes ont les mêmes solutions**. Et en général, on écrit des équations de plus en plus simples, et toujours équivalentes aux précédentes.

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \cos(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow x &= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
\Rightarrow x &= \boxed{\pm 45^\circ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad \cos(-x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\Leftrightarrow -x &= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
\Rightarrow x &= \boxed{\pm 45^\circ}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \sin(x) &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\
\Leftrightarrow x &= \begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\\ -\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+180 \end{cases}\\
\Leftrightarrow x &= \boxed{\begin{cases} 75^\circ\\ 105^\circ \end{cases}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \sin(x) &= \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\
\Leftrightarrow x &= \begin{cases} \sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\\ -\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)+180 \end{cases}\\
\Leftrightarrow x &= \boxed{\begin{cases} -75^\circ\\ 255^\circ \end{cases}}
\end{aligned}
$$

Exemple 1.11.3 : Exemple 3

Résoudre les équations ci-dessous

(1) $2 + \sin(x) = 0{,}45$

(2) $\frac{3}{4} \cdot \cos(x) = 0{,}8$

Solution

(1)
$$\begin{array}{rcl} 2 + \sin(x) & = & 0{,}45 \\ \Leftrightarrow \sin(x) & = & -2 + 0{,}45 \end{array}$$

Parce que $\sin(x) \in [-1; 1]$, cette équation est impossible et n'a donc pas de solution.

En effet, dans cette équation, nous trouvons que $\sin(x) = -1{,}55$.

Donc, $S = \varnothing$.

(2)
$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{4} \cdot \cos(x) & = & 0{,}8 \\ \Leftrightarrow \cos(x) & = & 0{,}8 \cdot \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \cos(x) & = & \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \cos(x) & = & \frac{16}{15} = 1 + \frac{1}{3} \end{array}$$

Ici aussi, le cosinus est en dehors de l'intervalle que doit respecter cette fonction à savoir $\cos(x) \in [-1; 1]$.

Cette équation est impossible et n'a pas de solution.

Donc, $S = \varnothing$.

Exemple 1.11.4 : Exemple 4

Résoudre les équations ci-dessous. Arrondir si nécessaire au dix-millième.

(1) $\sin(5x) = 0{,}45$

(2) $\frac{3}{2} \cdot \cos(3x) = 0{,}8$

Solution

(1)
$$\begin{aligned} \sin(5x) &= 0{,}45 \\ \Leftrightarrow 5x &= \sin^{-1}(0{,}45) \\ \Rightarrow x &= \begin{cases} \dfrac{\sin^{-1}(0{,}45)}{5} \\ \dfrac{-\sin^{-1}(0{,}45)}{5} + \dfrac{180}{5} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= \boxed{\begin{cases} 5{,}3487° \\ 30{,}6513° \end{cases}} \end{aligned}$$

Dans cet exemple, nous vérifions brièvement que la valeur du sinus est dans l'intervalle image de la fonction : $[-1; 1]$. Cette équation a donc des solutions.

Une fois la réciproque appliquée, nous avons accès au "bloc inconnue", $5x$.

Il faut encore **isoler** complètement le x. C'est ce qui est fait en divisant par 5 dans l'exemple ci-dessus.

Et on oublie pas de donner la seconde solution !

(2)
$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot \cos(3x) &= 0{,}8 \\ \Leftrightarrow \cos(3x) &= 0{,}8 \cdot \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow 3x &= \cos^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{8}{15}\right) \\ \Rightarrow x &= \boxed{\pm\ 19{,}2563°} \end{aligned}$$

C'est seulement lorsque la fonction $\cos(\ldots)$ **est isolée que nous pouvons appliquer sa réciproque**.

Ce dernier point est très important, car beaucoup d'élèves font l'erreur d'appliquer la réciproque sans isoler la fonction.

On divise donc par le facteur de $\cos(3x)$. On vérifie brièvement que la valeur du cosinus est dans l'intervalle accepté. Si tout va bien, on applique la réciproque. Cela dégage l'accès au "bloc inconnue", $3x$.

Finalement nous divisions par 3.

Et on oublie pas de donner la seconde solution !

1.11.4 Exercices

Élémentaire

Dans les suivants exercices, nous cherchons les solutions pour des angles compris entre [0°; 360°]. Arrondir vos résultats (si nécessaire) au dix-millième.

1089. Résoudre.

(a) $\sin(x) = 0{,}35$

(b) $\sin(2x) = 0{,}35$

(c) $\cos(\frac{x}{2}) = 0{,}5$

(d) $\cos(x) = 1{,}5$

1090. Résoudre.

(a) $2\sin(x) = 2$

(b) $0{,}4\sin(x) = 0{,}5$

(c) $\cos(x) \cdot 3 = 1$

(d) $\frac{5}{2}\cos(x) = 1$

1091. Résoudre.

(a) $2{,}5\sin(2{,}5x) = 2$

(b) $\frac{\sin(0{,}1x)}{3} = 0{,}1$

(c) $4\cos(\frac{x}{4}) = 2$

(d) $\frac{\cos(4x)}{4} = 0{,}2$

1092. Résoudre.

(a) $7\sin(2x) = -7$

(b) $5\sin(x) = -\frac{5}{2}$

(c) $120\cos(60x) = -110$

(d) $0{,}12\cos(-x) = -0{,}1$

1093. Résoudre.

(a) $-1 + \sin(x) = -1$

(b) $2 - \sin(2x) = 3$

(c) $\cos(x) - 1 = -2$

(d) $-\cos(x) - 1 = 2$

Intermédiaire

1094. Résoudre.

(a) $\frac{3}{2} - \sin(x) = 1{,}5$

(b) $-11 - \sin(2x) = 0$

(c) $\cos(\frac{x}{5}) + 7 = 6{,}5$

(d) $\cos(0{,}2x) - 3 = 0{,}5$

1095. Résoudre.

(a) $\frac{3}{12}\sin(4x) = 3$

(b) $\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\sin(2x) = 2$

(c) $\frac{\cos(\frac{x}{3})}{2} = 0{,}5$

(d) $\frac{4}{5} + 5\cos(x) = 1$

Avancé

1096. Montrer que, pour $n = 0$, les solutions pour x des équations montrées en introduction suivantes

Sinus

$$x = \frac{\sin^{-1}(c/a)}{b}$$

$$x = \frac{-\sin^{-1}(c/a)}{b} + \frac{180}{b}$$

Cosinus

$$x = \frac{\pm\cos^{-1}(c/a)}{b}$$

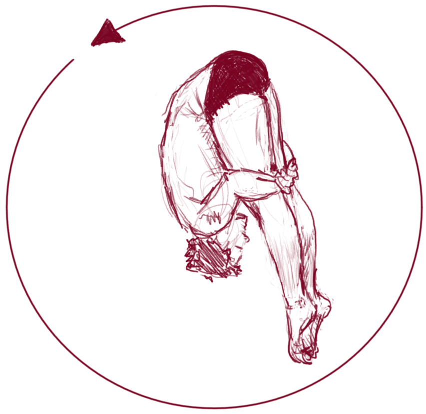
sont les solutions des deux équations trigonométriques ci-après.

(a) $a\sin(bx) = c$

(b) $a\cos(bx) = c$

1.12 Équations trigonométriques (2) : Tourner !

Lorsque nous avons étudié les fonctions trigonométriques **sinus** et **cosinus**, présentes dans votre calculatrice, nous avons vu que l'**argument** de ces fonctions **sont des nombres exprimant des angles**.
Sans aller plus loin dans l'étude des angles dans cette partie du cours (ce sera fait dès la semaine 23), et de manière tout à fait pragmatique, on constate que la notion d'angle est présente dans le langage courant. On la retrouve dans le sport, dans l'aéronautique, dans les magasins qui vendent de l'équipement HI-FI, audio et vidéo, ainsi que des ordinateurs ; et bien sûr en sciences.



Dans tous ces domaines il est question **tourner autour d'un centre**. Pour le sport (vélo acrobatique, snowboard, ski acrobatique, skateboard, gymnastique artistique, en natation : le plongeon) on **désigne une rotation** du sportif autour de lui-même au moyen d'un nombre : 180, 360, 720 . . ., pour dire **un demi-tour**, **un tour**, **deux tours**, respectivement.
Sans donner des exemples dans tous les autres domaines, on peut cependant dire que dans **tous** les cas, **un tour** est représenté par un angle de **360** degrés. On utilise le symbole ° pour désigner le degré et on écrit 360°.

1.12.1 Bases théoriques

Dans cette section nous verrons les solutions générales et complètes des équations trigonométriques.

Aux solutions données la semaine précédente, s'ajoute la notion de **tour**. En effet, la fonction sinus (tout comme le cosinus) donne la même valeur pour α et $\alpha + 360$.

Il faut comprendre que **tous les 360°** le sinus est le même. C'est la **période** de la fonction. C'est-à-dire que nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \sin(\alpha + 360) \\
&= \sin(\alpha + 2 \cdot 360) \\
&= \sin(\alpha + 3 \cdot 360) \\
&= \ldots \\
&= \sin(\alpha + (-3) \cdot 360) \quad \text{rotation dans le sens opposé} \\
&= \sin(\alpha + (-2) \cdot 360) \quad \text{rotation dans le sens opposé} \\
&= \ldots \\
&= \sin(\alpha + n \cdot 360)
\end{aligned}$$

avec $n \in \mathbb{Z}$.

Important : Argument des fonctions sinus et cosinus

L'argument α des fonctions **sin** et **cos** peut être une expression plus élaborée qu'un simple angle :

$$\sin(2\beta + 360) \qquad \cos\left(\frac{2\beta}{5} + 360\right)$$

ou encore

$$\sin\left(\frac{11\beta}{6} + 360\right) \qquad \cos\left(\frac{3\beta}{2} + 360\right)$$

Et puisque nous avons aussi l'égalité importante suivante

$$\boxed{\sin(\alpha) = \sin(180 - \alpha)}$$

lorsque l'on résout une équation trigonométrique impliquant des sinus, nous devons tenir compte des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \sin(\alpha + n \cdot 360) \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \\
\sin(180 - \alpha) &= \sin(180 - \alpha + n \cdot 360) \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

et les faire figurer dans la **solution générale** de l'équation trigonométrique.

Nous avons ce même comportement pour la fonction cosinus :

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(\alpha + 360) \\
&= \cos(\alpha + 2 \cdot 360) \\
&= \cos(\alpha + 3 \cdot 360) \\
&= \ldots \\
&= \cos(\alpha + (-2) \cdot 360) \quad \text{rotation dans le sens opposé} \\
&= \cos(\alpha + (-3) \cdot 360) \quad \text{rotation dans le sens opposé} \\
&= \ldots \\
&= \cos(\alpha + n \cdot 360)
\end{aligned}
$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi que l'égalité importante

$$\boxed{\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)}$$

et les égalités dont il faut tenir compte au moment de donner la solution générale :

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(\alpha + n \cdot 360) \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \\
\cos(-\alpha) &= \cos(-\alpha + n \cdot 360) \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

1.12.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.12.1 : Exemple 1

Résoudre l'équation $3\sin(x) = 2$.

Solution
Pour isoler x on doit appliquer la fonction inverse du sinus, mais pour cela il faut d'abord isoler la fonction sin(...).

Voici la suite des opérations à effectuer. Remarquer que c'est la même suite d'opérations que nous avons fait la semaine dernière, à la différence près que cette semaine nous donnons la solution générale, autrement dit, toutes les solutions à l'équation.

Cette solution est **la solution générale avec le détail des étapes**. Vous pouvez aussi utiliser les formules déjà montrées pour aller directement aux solutions générales, sans donner les détails, après avoir identifié les a, b et c, et vérifié que le déterminant, ici c/a appartient à l'intervalle $[-1; 1]$.

$$\begin{aligned} 3\sin(x) &= 2 \\ \Leftrightarrow \quad \sin(x) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

À partir d'ici introduisons toutes les solution, il faut pour cela résoudre deux équations simultanément, en gras les ajouts à l'équation de base :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x\boldsymbol{+n\cdot 360}) = \dfrac{2}{3} \quad \text{avec } \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}} \\ \sin(\boldsymbol{180-}x\boldsymbol{+n\cdot 360}) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + n\cdot 360 = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \\ 180 - x + n\cdot 360 = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) - n\cdot 360 \\ 180 - x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) - n\cdot 360 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) - n\cdot 360 \\ -x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) - n\cdot 360 - 180 \end{cases}$$

Solution générale

$$\begin{cases} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) + n\cdot 360 \\ x = 180 - \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) + n\cdot 360 \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sans les détails, on identifie $a = 3$, $b = 1$ et $c = 2$. Puisque $c/a = 2/3$ est compris dans l'intervalle $[-1; 1]$, on peut directement appliquer les formules donnant toutes les solutions, à savoir

Solution générale

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin^{-1}(c/a)}{b} + n \cdot \dfrac{360}{b} \\ x = \dfrac{180}{b} - \dfrac{\sin^{-1}(c/a)}{b} + n \cdot \dfrac{360}{b} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) + n \cdot 360 \\ x = 180 - \sin^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) + n \cdot 360 \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemple 1.12.2 : Exemple 2

Résoudre l'équation $2\sin(3x) = 1$.

Solution

On procède comme avant. Attention ici l'argument du sinus est $3x$, ce qui veut dire qu'il faut isoler $3x$, et ensuite TOUT diviser par 3.

$$\begin{aligned} 2\sin(3x) &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad \sin(3x) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

À partir d'ici introduisons toutes les solution, il faut pour cela résoudre deux équations simultanément, en gras les ajouts à l'équation de base :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(3x \boldsymbol{+ n \cdot 360}) = \dfrac{1}{2} \quad \textbf{avec } \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}} \\ \sin(\mathbf{180 -} 3x \boldsymbol{+ n \cdot 360}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + n \cdot 360 = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) \\ 180 - 3x + n \cdot 360 = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \text{mais } \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 30°$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 30 - n \cdot 360 \\ 180 - 3x = 30 - n \cdot 360 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 30 + n \cdot 360 \\ 3x = 180 - 30 + n \cdot 360 \end{cases} \quad \text{on divise tout par 3}$$

Solution générale

$$\begin{cases} x = 10 + n \cdot 120 \\ x = 50 + n \cdot 120 \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1.12.3 Exercices

Dans cette section toutes les solutions doivent être données. Cela veut dire que la présence de la variable $n \in \mathbb{Z}$ est indispensable dans votre réponse.

Élémentaire

Résoudre. Arrondir vos résultats (si nécessaire) au dix-millième.

1097. (a) $\sin(x) = 0{,}35$
(b) $\sin(2x) = 0{,}35$
(c) $\sin(\frac{x}{2}) = 0{,}5$
(d) $\sin(x) = 1,5$

1098. (a) $2\sin(x) = 2$
(b) $0{,}4\sin(x) = 0{,}5$
(c) $\sin(x) \cdot 3 = 1$
(d) $\frac{5}{2}\sin(x) = 1$

1099. (a) $2{,}5\sin(2{,}5x) = 2$
(b) $\frac{\sin(0{,}1x)}{3} = 0{,}1$
(c) $4\sin(\frac{x}{4}) = 2$
(d) $\frac{\sin(4x)}{4} = 0{,}2$

1100. (a) $7\sin(2x) = -7$
(b) $5\sin(x) = -\frac{5}{2}$
(c) $120\sin(60x) = -110$
(d) $0{,}12\sin(-x) = -0{,}1$

1101. (a) $-1 + \sin(x) = -1$
(b) $2 - \sin(2x) = 3$
(c) $\sin(x) - 1 = -2$
(d) $-\sin(x) - 1 = 2$

Intermédiaire

Pas de problèmes dans ce niveau cette semaine.

Avancé

Pas de problèmes dans ce niveau cette semaine.

1.13 Équations trigonométriques (3) : Comportement opposé

La semaine dernière, nous avons étudié les équations trigonométriques impliquant des sinus. Cette semaine ce sera le tour des équations trigonométriques impliquant des **cosinus**.

Mais quelle est la différence entre le **sinus** et le **cosinus** d'un angle ?

À ce niveau de vos études on ne peut pas répondre à cette question. Par contre on peut dire que, pris sur le même intervalle d'angles, les valeurs retournées par ces deux fonctions varient en "sens opposé".

En effet, en étudiant une table de valeurs on peut aisément constater ce comportement.

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
0	0,000 000 0	1,000 000 0
10	0,173 648 2	0,984 807 8
20	0,342 020 1	0,939 692 6
30	0,500 000 0	0,866 025 4
40	0,642 787 6	0,766 044 4
50	0,766 044 4	0,642 787 6
60	0,866 025 4	0,500 000 0

On voit bien que lorsque l'angle augmente, la valeur du sinus augmente aussi et celle du cosinus diminue.

Questions

(1) Est-ce un comportement qui continue indéfiniment ?

(2) Existe-t-il une valeur pour laquelle le $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$?

1.13.1 Bases théoriques

Il n'y a pas de bases théoriques à ajouter cette semaine. Il faut relire les formules déjà vues dans les semaines précédentes, c'est elles que l'on va utiliser cette semaine.

1.13.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 1.13.1 : Exemple 1

Résoudre l'équation $5\cos(x) = 1$.

Solution La façon classique de résoudre est d'isoler x, mais pour ce faire on applique la fonction inverse du cosinus. À cette fin, on isole la fonction cos(. . .) :

$$5\cos(x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(x) = \frac{1}{5}$$

Contrairement à ce que nous avons fait pour l'équation impliquant des sinus, ici on peut résoudre une seule ligne. Cependant, on doit tout de même ajouter $n \cdot 360$ dès maintenant, puis un $\pm$ à la solution finale.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \cos(x + n \cdot 360) &= \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow \quad x + n \cdot 360 &= \cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) \approx 78{,}463 \end{aligned}$$

Solution générale

$$\boxed{x \approx \pm 78{,}463 + n \cdot 360 \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}}$$

Exemple 1.13.2 : Exemple 2

Résoudre l'équation $7\cos(2x) = 5$.

Solution
On procède comme avant. Attention ici l'argument du cosinus est $2x$, ce qui veut dire qu'il faut isoler $2x$, et ensuite TOUT diviser par 2.

$$7\cos(2x) = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(2x) = \frac{5}{7}$$

À partir d'ici introduisons toutes les solution :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \cos(2x + n \cdot 360) &= \frac{5}{7} \\ \Leftrightarrow \quad 2x + n \cdot 360 &= \cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) \approx 44{,}415 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &\approx 44{,}415 + n \cdot 360 \\ \Leftrightarrow \quad x &\approx 22{,}208 + n \cdot 180 \end{aligned}$$

Solution générale

$$\boxed{x \approx \pm 22{,}208 + n \cdot 180 \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}}$$

1.13.3 Exercices

Élémentaire

Résoudre. Arrondir vos résultats (si nécessaire) au dix-millième.

1102. (a) $\cos(x) = 0{,}53$
(b) $\cos(2x) = 0{,}53$
(c) $\cos(\frac{x}{2}) = 0{,}5$
(d) $\cos(x) = 1,5$

1103. (a) $5\cos(x) = 2$
(b) $0{,}4\cos(x) = 0{,}5$
(c) $\cos(x) \cdot 3 = 1$
(d) $\frac{6}{3}\cos(x) = 1$

1104. (a) $5{,}2\cos(2{,}5x) = 2$
(b) $\dfrac{\cos(0{,}1x)}{5} = 0{,}1$
(c) $4\cos(\frac{x}{4}) = 2$
(d) $\dfrac{\cos(4x)}{4} = 0{,}2$

1105. (a) $7\cos(2x) = -7$
(b) $5\cos(x) = -\frac{5}{2}$
(c) $120\cos(60x) = -110$
(d) $0{,}12\cos(-x) = -0{,}1$

1106. (a) $-1 + \cos(x) = -1$
(b) $2 - \cos(2x) = 3$
(c) $\cos(x) - 1 = -2$
(d) $-\cos(x) - 1 = 2$

Intermédiaire

Pas de problèmes dans ce niveau cette semaine.

Avancé

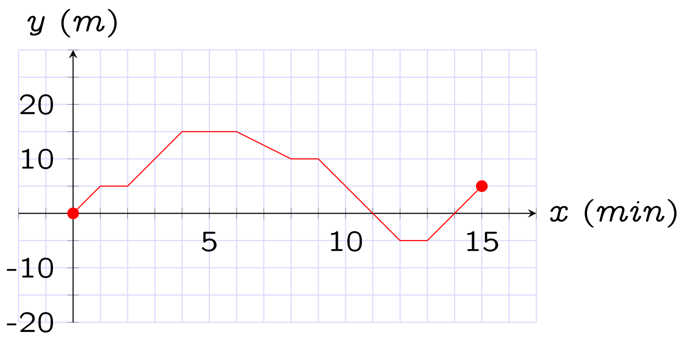
Pas de problèmes dans ce niveau cette semaine.

Objectifs

(A) utilisation de la notion de fonction, et notamment
   (1) en donner le domaine de définition ;
   (2) en déterminer algébriquement une pré-image, une image, l'ordonnée à l'origine et les zéros ;
(B) étudier la fonction quadratique, qui consiste à
   (1) faire une étude de la parabole ;
   (2) résoudre un problème en lien avec une parabole ;
   (3) résoudre algébriquement et graphiquement l'intersection d'une droite et d'une parabole ou de deux paraboles ;
(C) étudier les fonctions trigonométriques simples, c'est-à-dire
   (1) représenter graphiqment et reconnaître des fonction de la forme $y = a \cdot \sin(\omega \cdot x)$ et $y = a \cdot \cos(\omega \cdot x)$;
   (2) connaître la notion d'amplitude, $A = |a|$;
   (3) connaître les notions ainsi que le lien entre la péfiode T et la pulsation ω.

2.1 Généralités sur les fonctions (1) : La course

Deux amis Adrien et Benicio font une course à vélo. Le graphique décrit le nombre de mètres d'avance qu'a Benoît par rapport à André après x minutes de course.



Lorsque qu'on veut décrire la relation qu'il existe entre deux grandeurs qui sont "connectées", on parle de **fonction**.

Et lorsqu'on veut *montrer* ce lien particulier, on peut le faire en traçant un graphique, comme ci-dessus. Mais ce n'est pas la seule manière de décrire ce lien.

On peut aussi décrire la fonction par la phrase suivante :

> Nombre de mètres d'avance qu'a Benicio par rapport à Adrien x minutes après le début de la course

ou encore dresser un tableau de valeurs.

Dans tous les cas, on peut se poser les questions suivantes :

(1) Pour quelles valeurs de x il existe des valeurs pour y ?
(2) Pour quelles valeurs de y il existe des valeurs pour x ?
(3) Quelle est la valeur de y lorsque $x = 3$? Comment peut-on l'écrire en utilisant la notation mathématique des fonctions ?
(4) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $y = 10$?

2.1.1 Bases théoriques

Commençons par une définition essentielle

Définition 2.1.1 : Fonction

Une **fonction** est une **relation particulière** entre **deux grandeurs**.

Et rappelons la définition d'une équation

Définition 2.1.2 : Equation

Une **équation** est la donnée de trois objets mathématiques

1. Deux expressions algébriques
2. séparées par une égalité ($=$)
3. et contenant une inconnue (ou plusieurs), souvent notée x.

Une fonction peut aussi être décrite par un ensemble de points. Ces points seront alors représentés par des coordonnées. Ces coordonnées peuvent être écrites dans un tableau à deux entrées.

En général, on note x l'une des grandeurs et y l'autre. C'est toujours, dans ce cas, x qui est la grandeur indépendante, et y la grandeur dépendante.

Cependant, du point de vue des fonctions, $y = f(x)$. Toujours. Et dès qu'on peut donner (car on ne peut pas toujours) la définition de la fonction par une formule, on écrit $f(x)$ à la place de y. Mais les deux sont interchangeables.

Voici le tableau décrivant la relation de la fonction de l'exemple d'introduction :

x	0	1	2	4	6	8	9	12	13	15
$y = f(x)$	0	1	1	3	3	2	2	-1	-1	1

Dans la pratique, on appelle l'ensemble des valeurs de la première ligne le *domaine* et la seconde ligne l'*image* de la fonction.

Définition 2.1.3 : Domaine

On appelle **domaine** de définition d'une fonction, l'ensemble des valeurs possibles pour x.

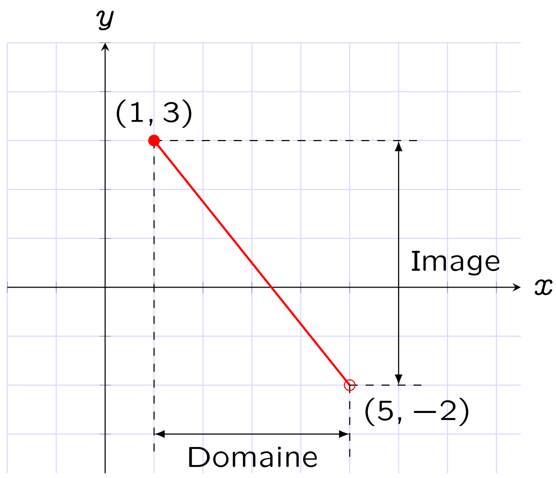
Définition 2.1.4 : Image

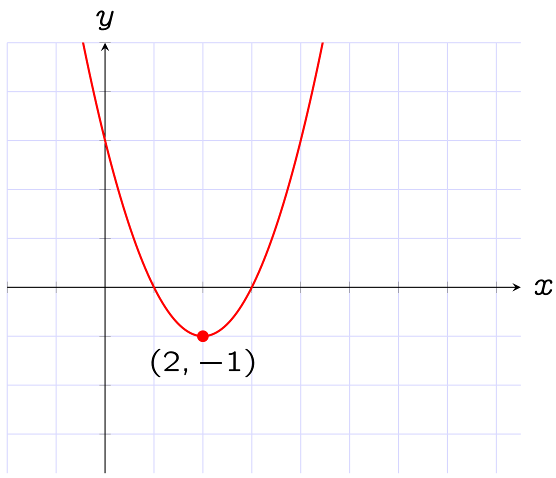
On appelle ensemble **image** d'une fonction, l'ensemble des valeurs possibles pour y.

Par extension on y est appelée l'image de x par la fonction f.
De même, x est appelée la pré-image de y par la fonction f.

On peut décrire de plusieurs manières ces deux ensembles. La manière la plus plus utilisée ce sont les intervalles. Mais on peut aussi utiliser les raccourcis que sont les noms des ensembles de base avec leur modificateurs ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, . . ., cf. Semaine 1 pour plus de détails.)

Par exemple





Pour cette fonction on a

Domaine : $\mathscr{D} = [1; 5[$

Image : $\mathscr{I} =]-2; 3]$

Pour cette fonction on a

Domaine : $\mathscr{D} = \mathbb{R}$

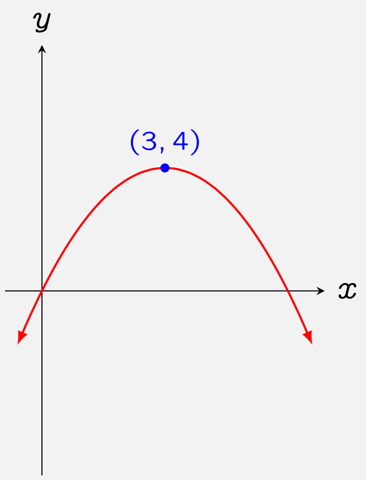
Image : $\mathscr{I} =]-1; +\infty[$

2.1.2 Exercices résolus (exemples)

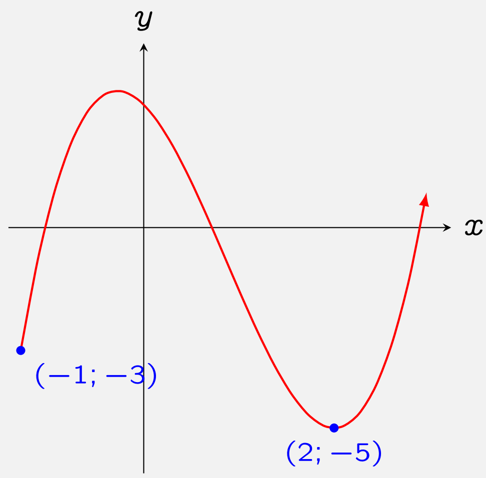
Exemple 2.1.1 : Exemple 1

Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.

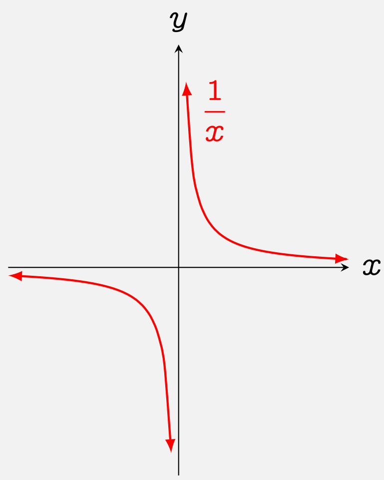
(a)



(b)



(c)



Solution

Il s'agit de faire trois lectures de graphique.

a. Nous avons une parabole. Nous pouvons lire qu'il y a un point, dont les coordonnées sont $(3; 4)$ qui est au plus haut de la courbe, le sommet. On observe qu'il n'y a pas de point plus haut. Donc, verticalement il ne va pas plus haut. La lettre qui véhicule la coordonnée verticale est y. Nous avons vu que c'est la lettre qui correspond aux **images**, on a donc trouvé une *borne maximale* pour l'ensemble des images.

   Nous constatons que les x sont *tous concernés* par la courbe. En effet, les deux "bras" de la courbe vont vers le bas (dans le sens des flèches) et poursuivent leur course vers la gauche pour l'un et vers la droite, mais toujours vers le bas. Dans ces conditions, *tous* les x sont concernés. On a donc trouvé l'ensemble **domaine**, autrement dit le **domaine de définition** de ce graphe : $\mathbb{R}$.

Comme le graphe s'étend vers le bas, les y concernés, les images, vont de 4 à $-\infty$. On a donc trouvé le second ensemble, **ensemble image**. Le domaine de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, et l'**image** est $\mathscr{I} = [4; -\infty[$.

b. Pour ce graphique on observe que les x ont un minimum, à savoir -1, car c'est la coordonnée du point le plus à gauche du graphique (il n'y a pas de flèche et on indique bien un point). Et comme la courge évolue vers la droite et vers le haut, toutes les valeurs de x tendent vers $+\infty$. On a donc trouvé le domaine de définition.

   On observe aussi que les y on un minimul, en la "personne" du point $(2; -5)$. Parce que la partie droite de la courbe évolue vers le haut, toutes le valeurs de y vont de -5 vers $+\infty$. Nous avons trouvé l'ensemble image.

   Le domaine de définition est $\mathscr{D} = [-1; +\infty[$, et l'**image** est $\mathscr{I} = [-5; +\infty[$.

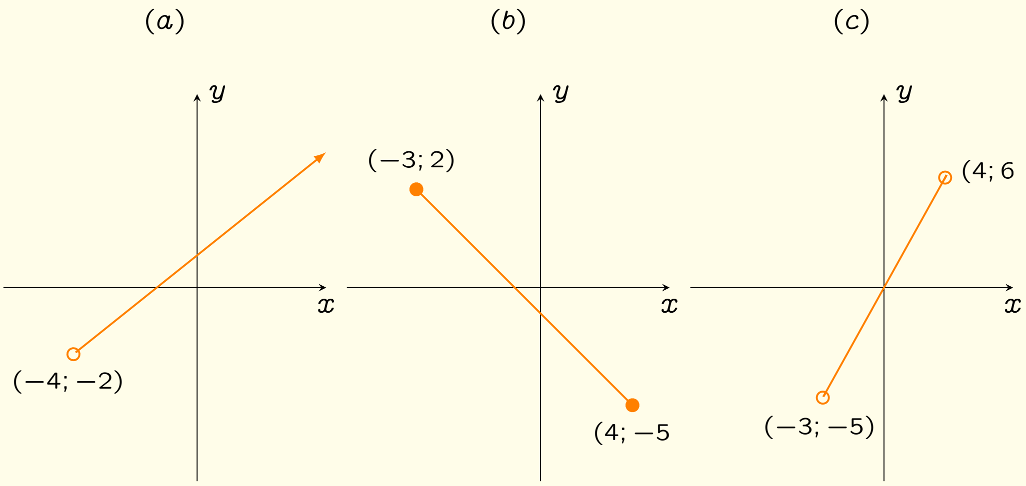
c. Pour ce graphique on ne nous donne pas de points. Par contre on a la définition de la fonction $\frac{1}{x}$. Donc la seule valeur qui est à *éviter* est le 0. Sinon, tous les nombres peuvent être utilisés pour donner une image par la fonction. On a donc trouvé les deux ensembles. En effet, comme le numérateur est toujours différent de zéro, les y ne peuvent prendre la valeur 0. Et comme la division par zéro est interdite, les x ne peuvent pas non plus prendre la valeur zéro.

   Le domaine de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$, et l'**image** est $\mathscr{I} = \mathbb{R}^*$.

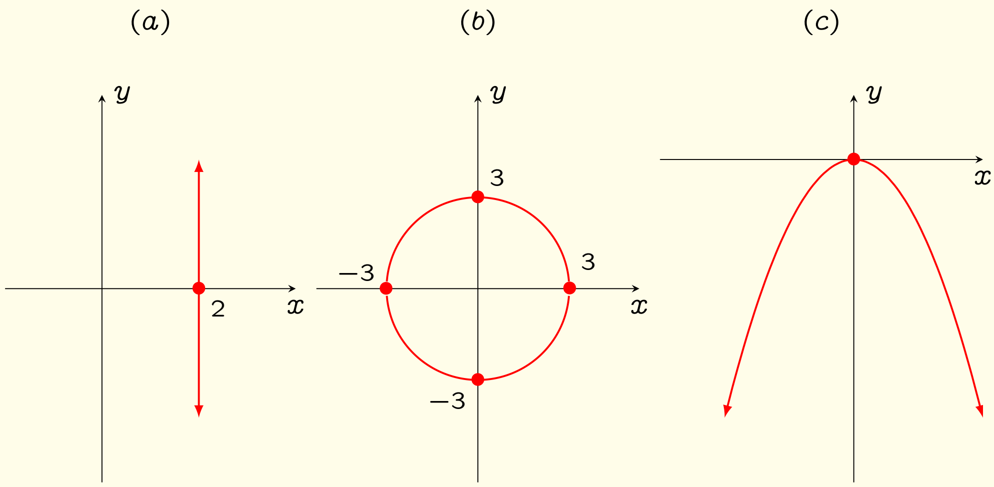
2.1.3 Exercices

Élémentaire

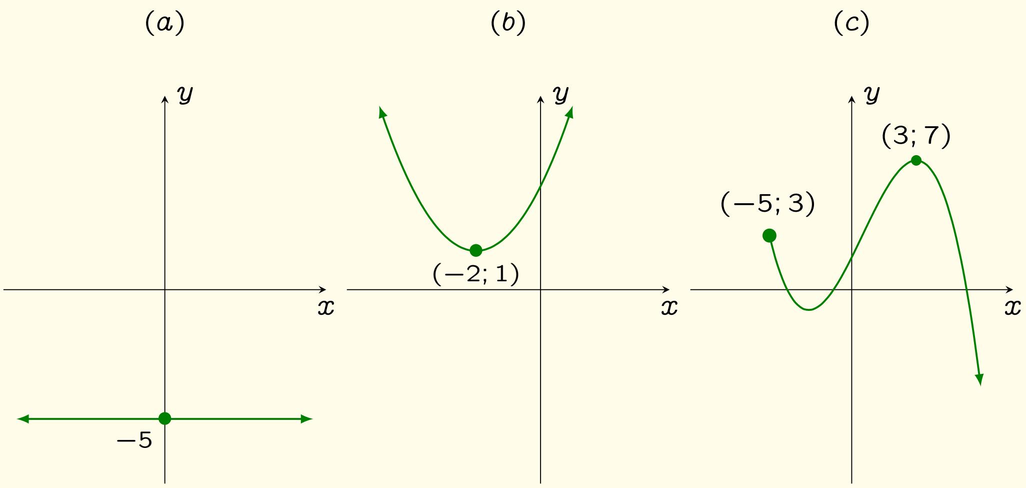
2001. Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.



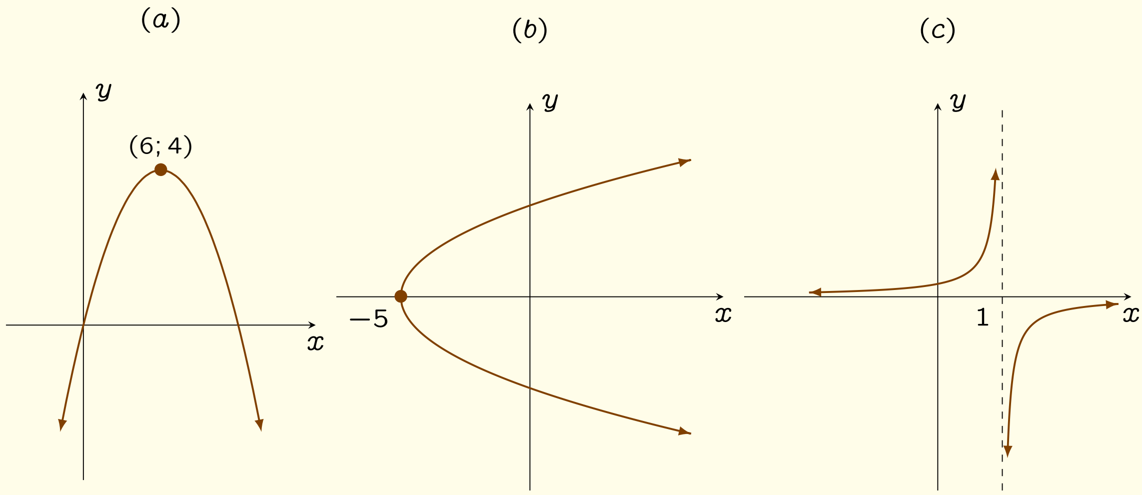
2002. Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.



2003. Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.



2004. Pour chaque graphique ci-dessous donner les ensembles **Domaine** et **Image**.



Intermédiaire

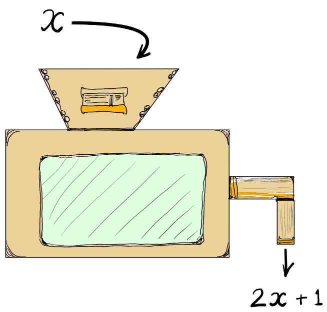
Pas de problèmes dans ce niveau cette semaine.

Avancé

Pas de problèmes dans ce niveau cette semaine.

2.2 Généralités sur les fonctions (2) : La machine

Nous utilisons parfois une ''machine fonction'', une espèce de boîte hermétique, pour illustrer comment travaille une fonction. Par exemple la machine ci-dessous, a été programmée pour doubler toutes les entrée numériques, additionner 1 au produit et enfin restituer le résultat.



Une telle machine peut être **décrite** à l'aide d'une expression algébrique. Cette machine devient alors une **fonction** et reçoit un **nom** qui en général est **une lettre minuscule**. Lorsqu'on veut utiliser cette fonction on se sert de **parenthèses** pour dire **sur quel nombre on veut travailler**.

Ainsi, si nous appelons f une telle fonction, nous pouvons la définir comme suit

$$f: \; x \; \mapsto \; 2 \cdot x + 1$$

Cependant, dans la pratique nous utiliserons plutôt cette forme

$$f(x) = 2x + 1$$

Des exemples de telles fonctions se trouvent sur vos calculatrices :

sin et cos

en sont deux exemples.

2.2.1 Bases théoriques

Soit f une fonction.

Définition 2.2.1

Dans l'expression

$$f(x)$$

x est appelé l'**argument** de la fonction, mais aussi **pré-image** de la fonction.

$f(x)$ est appelée l'**image** de x par la fonction f.

Si l'on veut connaître l'image de $x = a$ par la fonction f, alors on calcule $f(a)$. Si ce calcul donne la valeur k on écrira

$$f(a) = k$$

et on dit que k est l'image de a par f.

Définition 2.2.2

Une fonction prend ses **arguments** dans son **domaine** et les valeurs qu'elle produit appartiennent à son ensemble **image**.

Ainsi, une fonction prend ses valeurs dans le domaine $\mathscr{D}$ et envoi ses productions dans l'ensemble image $\mathscr{I}$. Ceci est écrit mathématiquement comme suit :

$$\boxed{f : \mathscr{D} \to \mathscr{I}}$$

Définition 2.2.3 : Ordonnée à l'origine d'une fonction

Soit f une fonction.

Alors le nombre $\boldsymbol{f(0)}$ est appelé **ordonnée à l'origine de** $\boldsymbol{f}$. Ce nombre représente la coordonnée vertical du point d'intersection de f avec l'axe des ordonnées (l'axe des y).

Définition 2.2.4 : Zéros d'une fonction

Soit f une fonction.

Alors les **solutions** de l'équation

$$f(x) = 0$$

sont appelées les **zéros** de f. Ces nombres représentent les coordonnées horizontales de l'intersection de f avec l'axe des abscisses (l'axe des x).

2.2.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.2.1 : Exemple 1

Trouver le domaine de définition, ou simplement, le **domaine** de

1. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$

Solution 1

1. On doit donc chercher les valeurs pour x qui *ne sont pas interdites* par la définition de la fonction. Cette dernière est composée d'une fraction et d'une racine carrée. Donc, comme on ne peut pas diviser par zéro, le dénominateur doit être différent de zéro, mais comme la racine carrée (le dénominateur) donne toujours une valeur positive ou nulle, il suffit de trouver tous les x qui vérifient :
$$\begin{array}{rrcl} & \sqrt{x+3} & > & 0 \\ \Leftrightarrow & x+3 & > & 0 \\ \Leftrightarrow & x & > & -3 \end{array}$$
Ensuite, l'argument de toute racine carrée doit être un nombre positif ou zéro, ainsi
$$\begin{array}{rrcl} & x+3 & \geq & 0 \\ \Leftrightarrow & x & \geq & -3 \end{array}$$
Mais comme -3 est interdit pour le dénominateur de la fraction, on doit l'exclure de l'ensemble résultat. Finalement, l'ensemble des valeurs permises est :
$$\mathscr{D}_f =]-3; +\infty[$$

2. Ici, pas de fraction. Par contre on a deux racines carrés. D'après ce qui précède
$$x \geq 0$$
et
$$5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$$
en définitive x est encadré par les entiers 0 et 5 et l'ensemble de définition est :
$$\mathscr{D}_f = [0;\ 5]$$

2.2.3 Exercices

Élémentaire

2005. Trouver le domaine de définition de

(a) $f(x) = 2x$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

2006. Trouver le domaine de définition de

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-5x+4}$

2007. Trouver le domaine de définition de

(a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(b) $f(x) = \sqrt{3-x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$

2008. Trouver le domaine de définition de

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{4-x}}$

Intermédiaire

2009. Trouver le domaine de définition de

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x^3+2}{\sqrt{x+2}}$

(c) $f(x) = \dfrac{(x-7)\cdot(2-x)}{x^2+1}$

Avancé

Pas de problèmes de ce niveau cette semaine.

2.3 Généralités sur les fonctions (3)

2.3.1 Exemple d'introduction

Le fait de considérer une grandeur comme fonction d'une autre grandeur nous est maintenant familière.
Nous pouvons constater que cette *idée de fonction*, si elle est accompagnée d'une notation convenable, est un instrument très utile pour décrire et résoudre un certain nombre de problèmes mathématiques, mais pas seulement.
Dans ce qui suit, vous trouverez essentiellement des définitions et des exemples mettant en avant cette notion de **fonction** et ses notations et représentations.

2.3.2 Bases théoriques

Voici une autre définition de fonction, un peu plus mathématique que celle déjà donnée dans ce cours. Dans celle-ci on met en avant la notion d'*ensemble*.

Définition 2.3.1 : Fonction, ensembles de départ et d'arrivée, image, pré-image

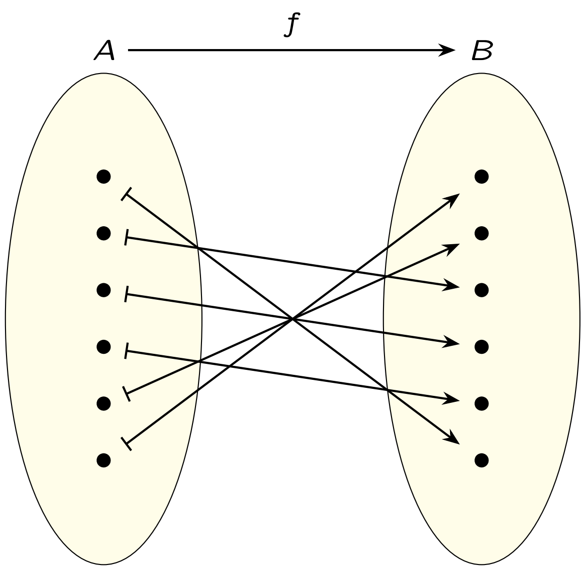
Soient deux ensembles A et B, distinct ou non.

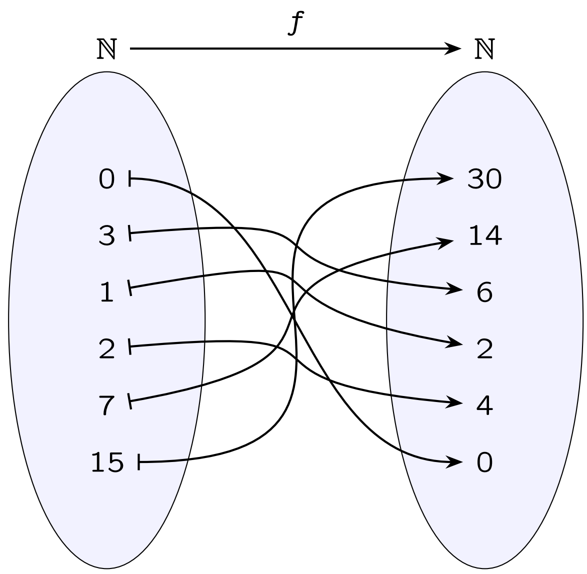
Une correspondance de A vers B qui associe à tout élément de A *exactement un élément* de B est une **fonction** de A vers B et est notée

$$\begin{array}{cccc} f & : & A & \rightarrow & B \\ & & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

où $a \in A$ et $f(a) \in B$ et où

- f désigne le nom de la fonction ;
- A l'**ensemble de départ** (ou domaine) de la fonction ;
- B l'**ensemble d'arrivée** (ou image) ;
- $f(a)$ (qui se lit "f de a") désigne **l'image de** a par la fonction f ;
- et finalement a désigne **la pré-image de** $f(a)$.





Lorsqu'on veut donner une fonction, il suffit de donner ses ensembles de départ A et d'arrivée B, ainsi qu'un moyen, procédure, pour associer chaque élément de A à un seul élément de B, autrement dit, un moyen de déterminer l'image de chaque élément de A.

Par exemple, le dessin de droite montre l'idée de *doubler un nombre entier*. Cette fonction peut être nommée f et donnée en spécifiant $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{N}$, ainsi que la règle s'appliquant à tout élément de A : $f(a) = 2 \cdot a$.

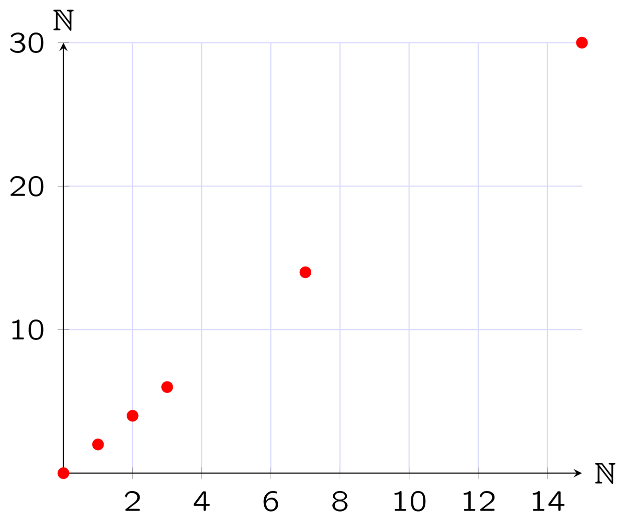
On peut aussi donner une correspondance des couples $(a; b)$ pour $a \in A$ et $b \in B$:

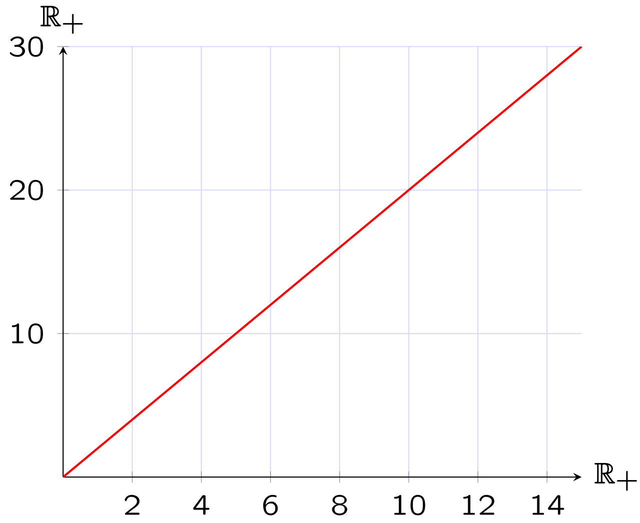
$$f: \begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & 0 \\ 3 & \mapsto & 6 \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 4 \\ 7 & \mapsto & 14 \\ 15 & \mapsto & 30 \end{array} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f(3) & = & 6 \\ f(1) & = & 2 \\ f(2) & = & 4 \\ f(7) & = & 14 \\ f(15) & = & 30 \end{array}$$

Il est aussi possible de donner un ensemble de couples

$$\{(0;0),\ (3;6),\ (1;2),\ (2;4),\ (7;14),\ (15;30),\ldots\}$$

Cet ensemble représente la fonction f.
Une autre manière de la représenter est de tracer des points sur un graphique :





Le graphique de droite montre l'**extension** de la fonction à l'ensemble des nombres réels positifs. Après tout, il semble naturel d'étendre la fonction "doubler un nombre" à l'ensemble des réels.

Notion de variable

Définition 2.3.2 : Variable

Une **variable** sur un ensemble A est une lettre qu'on se donne le droit de remplacer par chacun des éléments de A. Cette substitution peut être effective ou par la pensée.

Supposons que x soit une variable sur l'ensemble $\mathbb{R}$, alors on peut retrouver x dans les expressions ci-dessous :

$$-x \qquad x^3 - 9 \qquad \sin(x) \qquad x \mapsto x^2 \qquad x^2 - x - 1 = 0$$

Comme c'est une variable, nous pouvons la remplacer par n'importe quel nombre, par exemple 2,5. Ainsi on obtient les expressions suivantes

$$-2{,}5 \qquad (2{,}5)^3 - 9 \qquad \sin(2{,}5) \qquad 2{,}5 \mapsto (2{,}5)^2 \qquad (2{,}5)^2 - 2{,}5 - 1 = 0$$

Définition 2.3.3 : Variable réelle

Une variable sur $\mathbb{R}$ est appelée **variable réelle**.

Fonction réelle de variables réelles

Définition 2.3.4 : Fonction réelle

On appelle **fonction réelle** d'une variable réelle toute fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction "À tout nombre réel on associe son carré diminué de 5", peut être définie de manière brève et précise par l'expression suivante :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 5 \end{array}$$

Cette notation signifie que pour trouver l'image d'un nombre de l'ensemble $\mathbb{R}$ il suffit de remplacer la variable x par ce nombre. Donc, si $x = -6$ alors, son image est donnée par $(-6)^2 - 5$.
On dira que la "fonction f prends en -6 la valeur $(-6)^2 - 5 = 31$, ce qui revient à écrire

$$f(-6) = (-6)^2 - 5 = 31$$

ou de manière générale

$$f(x) = x^2 - 5$$

La fonction vue plus haut qui "à tout nombre entier associe son double", peut s'écrire :

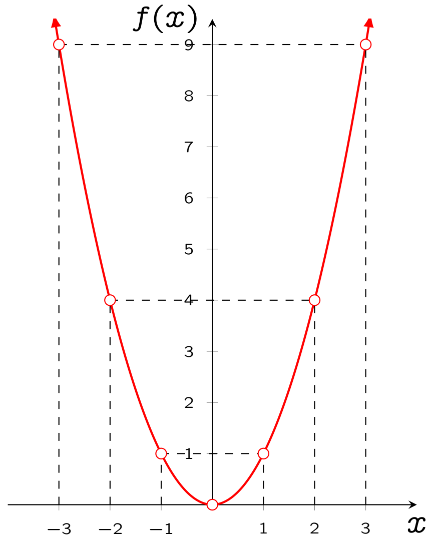
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$

Représentation graphique

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut être représentée dans un plan où figurent une paire d'axes, en général, orthonormées (à angle droit et graduées de la même manière).
On calcule les images d'un certain nombre d'éléments bien choisis. Chaque nombre (x) et son image (y) sont les coordonnées (dites cartésiennes) d'un point du graphique.

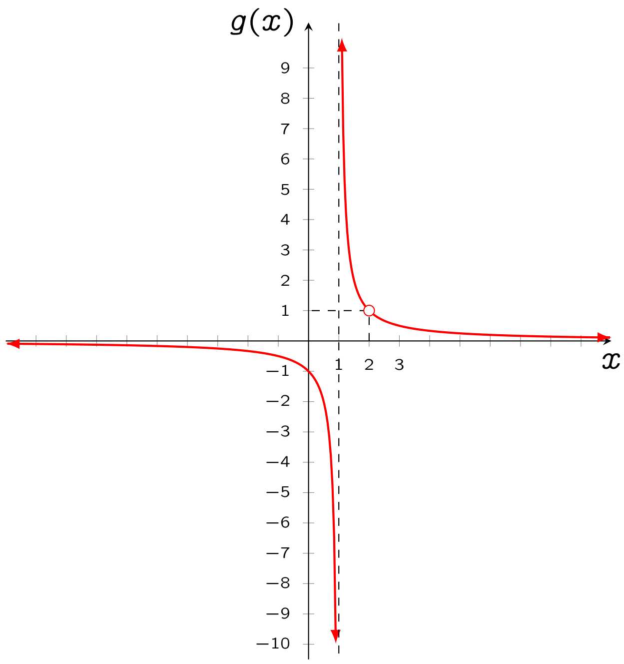
Voici la représentation de la fonction
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$.

x	$f(x) = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Voici une autre représentation
$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$

x	$g(x) = \dfrac{1}{x-1}$
-3	$-0{,}25$
-1	$-0{,}5$
0	-1
0,5	-2
0,9	-10
1,1	10
1,5	2
2	1
3	0,5



Si nous voulions évaluer l'image du nombre 1 par la fonction g, on serait amené à écrire une division par zéro ! En effet,

$$g(1) = \frac{1}{0}$$

ne correspond à aucun nombre réel et de ce fait **n'a pas de sens** pour nous. Ceci montre le bien fondé du choix de l'**ensemble de départ** de la fonction : $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On dira que g **n'est pas définie en** 1.

Asymptote

Dans le graphique de la fonction g ci-dessus, apparaît une droite verticale en pointillés à hauteur de $x = 1$. C'est ce qu'on appelle une **asymptote**.

Définition 2.3.5 : Asymptote

Une **asymptote** est une droite dont une courbe s'approche *sans jamais la toucher*.

Cette asymptote ne fait pas partie du graphique considéré et agit comme une limite du tracé de la courbe considérée. Dans le graphe de g, plus on prend des x proches de 1 plus on tends soit vers $-\infty$ soit vers $+\infty$.

Domaine de définition

Il existe dans l'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, deux opérations qui peuvent ne pas donner de nombre, ne pas "aboutir" à une valeur bien définie. Il s'agit de la **division** et de l'extraction de la **racine carrée**. Par exemple $\frac{13}{0}$ ou encore $\sqrt{-2}$ ne représentent pas de nombres réels.

On doit donc prendre un certain nombre de précautions au moment de définir une fonction, étant donné que nous seront amené à calculer des images.

Par exemple, si on définit deux fonction f et g comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{x+8}$$

On observe que f n'est pas définie si l'on remplace x par 3, et que g n'est pas définie pour les x inférieurs à -8. En conséquence l'ensemble de départ de ces fonctions ne peut pas être $\mathbb{R}$ tout entier, et qu'il faudra *enlever* un certain nombre d'éléments.

On a donc identifié le **domaine de définition** d'une fonction.

Définition 2.3.6 : Domaine de définition

L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ pour lesquels une expression est définie s'appelle le **domaine de définition** de cette expression. Cet ensemble est noté $\mathscr{D}$.

Par exemple, le domaine de définition de l'expression $\frac{1}{x-3}$ est $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, tandis que le domaine de définition de l'expression $\sqrt{x+8}$ est l'ensemble des nombres supérieurs ou égaux à -8 : $\mathscr{D} = [-8;\ +\infty[$

Définition 2.3.7 : Ensemble de départ

'**ensemble de départ** d'une fonction réelle est une partie du domaine de définition de l'expression qui lui est associée.

Par exemple, pour la fonction ci-dessus, $f(x) = \frac{1}{x-3}$, l'ensemble de départ est une partie du domaine de définition de f, autrement dit, un sous-ensemble de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. On peut choisir

$$\mathbb{Z}_- \quad \text{ou} \quad \mathbb{R}_- \quad \text{ou encore} \quad \{0;\ 1;\ 2;\ 4;\ 5\}$$

2.3.3 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.3.1 : Exemple 1

2.3.4 Exercices

Élémentaire

2010. Trouver le domaine de définition de

Intermédiaire

2011. Trouver le domaine de définition de

Avancé

Pas de problèmes de ce niveau cette semaine.

2.4 Fonction quadratique (1)

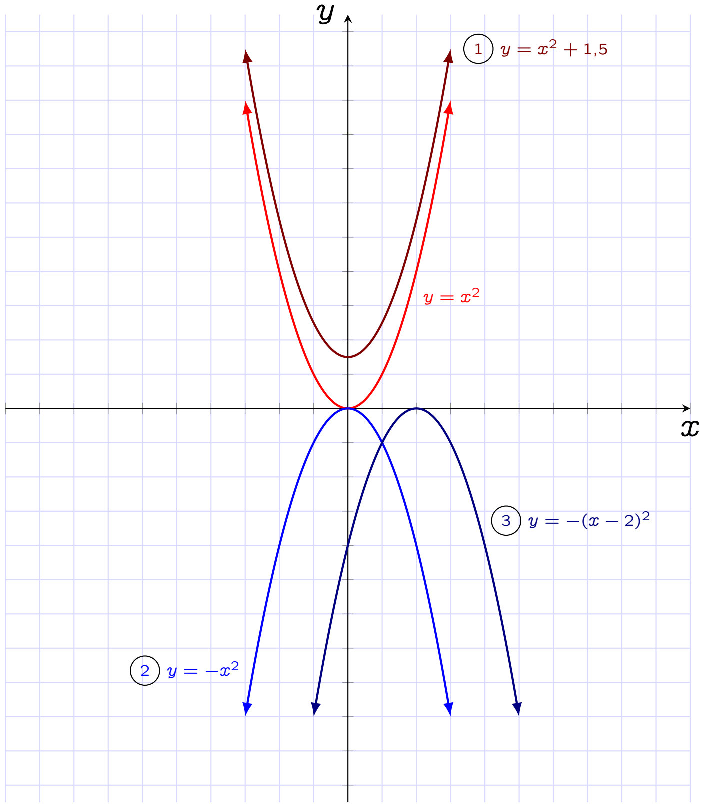
Nous allons étudier les fonctions de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On verra que le graphique de cette fonction est obtenu par translation verticale ou horizontale du graphique de la fonction de base

$$f(x) = ax^2$$

Dans ce qui suit nous utiliserons indifféremment $\boldsymbol{y} = ax^2$ ou $\boldsymbol{f(x)} = ax^2$, dans la notation du nom de la fonction de laquelle on parle puisque $y = f(x) = ax^2$.



Sur le graphique ci-dessus, nous avons la parabole de base, $y = ax^2$, et trois de ses modifications possibles :

1. ajouter 1 à x^2 et cela fait monter tout le tracé de la parabole ;
2. multiplier toute le parabole (x^2) par -1 et cela renverse la parabole ;
3. ajouter -2 à x, puis élever au carré et multiplier par -1 : cela déplace x^2 de deux unités (2) vers la droite et renverse la parabole.

Nous verrons dans les semaines qui suivent comment peut-on tracer de telles paraboles.

L'étude de cette fonction se justifie par le fait que nous la retrouvons dans un grand nombre de phénomènes, comme par exemple le lancer de projectiles et la recherche de minimums et maximums.

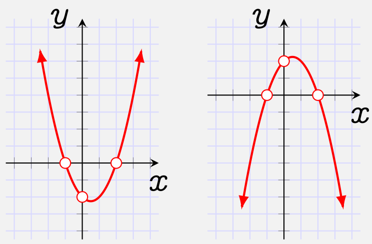
2.4.1 Bases théoriques

Définition 2.4.1 : Fonction quadratique

Une fonction f est une fonction **quadratique** ou encore **fonction du deuxième degré** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

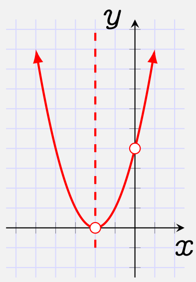


Définition 2.4.2 : Axe de symétrie

On appelle **axe de symétrie** la droite verticale d'équation

$$x_S = \frac{-b}{2a}$$

Elle est présente sur toutes les paraboles.

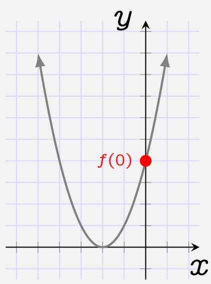


Définition 2.4.3 : Ordonnée à l'origine

On appelle **ordonnée à l'origine** l'image de 0 par la fonction f, et on l'obtient en calculant

$$f(0)$$

C'est le lieu de croisement de la parabole et l'axe des y.



Évaluer une fonction en zéro, quelque soit la fonction, nous donne l'ordonnée à l'origine de la fonction.

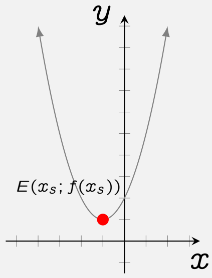
Définition 2.4.4 : Extremum

On appelle **extremum** le point de la parabole dont la coordonnée verticale (y) est extrême (soit la plus petite, soit la plus grande des coordonnées verticales pour la fonction, à ne pas confondre avec l'infini.).

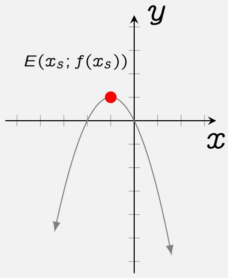
Ses coordonnées sont

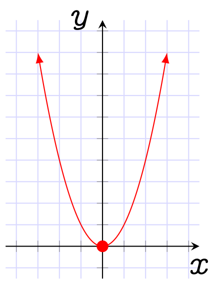
$$E = (x_S;\ f(x_S))$$

Lorsque $a > 0$ cet extremum est le point le plus bas de la parabole. Et on dit que f a un **minimum** en $x = x_S$.



Lorsque $a < 0$ cet extremum est le point le plus haut de la parabole. Et on dit que f a un **maximum** en $x = x_S$.



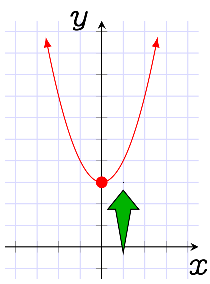


On a vu plus haut que si $b = c = 0$ alors la fonction f perd ses deux derniers termes :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \xrightarrow{b=c=0} \quad f(x) = ax^2$$

et le graphique est une parabole de base passant par l'origine.

Dans le cas où $b = 0$ et $c \neq 0$ alors on a $f(x) = ax^2 + c$ et le graphique est une parabole de base (ax^2) ayant une translation verticale (c).

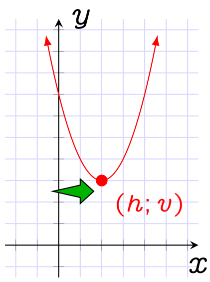


Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ et que $b \neq 0$ alors en **complétant le carré** nous pouvons faire apparaître un nombre, h, qui est la valeur de la translation horizontale de la parabole de base (ax^2). Ainsi f devient

$$f(x) = a(x - \boldsymbol{h})^2 + \boldsymbol{v}$$

où h et v sont deux nombres obtenus lors du procédé expliqué plus bas.

Les deux nombres h et v sont respectivement les déplacements horizontal et vertical de l'extremum de la parabole de base.



Procédé 2.4.1

Soit f une fonction quadratique (une parabole). Si on écrit f sous la forme

$$f(x) = a(x - \boldsymbol{h})^2 + \boldsymbol{v}$$

alors

$$\boldsymbol{h} = \frac{-b}{2a} = x_S$$

et

$$\boldsymbol{v} = f(x_S) = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Et donc le point extremum peut aussi s'écrire

$$E = (\boldsymbol{h};\ \boldsymbol{v})$$

Démonstration. On a

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

en complétant le carré on trouve

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} \\
&= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

et on pose $h = \frac{-b}{2a}$ et $v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

Ce qui est bien ce qu'il fallait montrer

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + v.$$

□

2.4.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.4.1 : Exemple 1

Si $f(x) = 3x^2 + 24x + 50$, exprimer $f(x)$ sous la forme $a(x-h)^2 + v$.

Solution
On va utiliser la technique de complétion du carré vu un peu plus tôt dans ce cours. Avant de commencer, il faut **mettre en évidence** le facteur de x^2, ici le 3 **seulement pour les deux premiers termes de** f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 \\ &= 3(x^2 + 8x + \qquad) + 50 \end{aligned}$$

Comme déjà expliqué, nous complétons le carré pour l'expression $x^2 + 8x$ en additionnant le carré de la moitié du coefficient de x, à savoir $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$. Ce faisant, il ne faut pas oublier d'ajouter et d'enlever cet ajout ! Cela donne

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 \\ &= 3(x^2 + 8x + \mathbf{16}) + (50\mathbf{-48}) \end{aligned}$$

où les -48 représente le 16 multiplié par 3, puisque nous avons mis en évidence ce 3 tout au début. Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 24x + 50 \\ &= 3(x^2 + 8x + 16) + 2 \\ &= 3(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2) + 2 \\ &= 3(x+4)^2 + 2 \end{aligned}$$

cette dernière expression utilise l'identité remarquable $(m+n)^2 = m^2 + 2 \cdot mn + n^2$. À chaque fois nous nous servirons de cette identité pour compléter le carré, ou bien de celle qui utilise le signe $-$: $(m-n)^2 = m^2 - 2 \cdot mn + n^2$.
On peut donc dire que la parabole de base, a subit une translation horizontale de -4 et verticale de 2.

Exemple 2.4.2 : Exemple 2

Chercher l'équation d'une parabole qui a pour sommet $E(2;\ 3)$, et qui passe par le point $(5; 1)$.

Solution Pour déterminer l'équation de la parabole, on utilise la forme

$$f(x) = a(x-h)^2 + v$$

Et puisque $E(h;\ v) = E(2;\ 3)$ sont les coordonnées du sommet, on peut les remplacer dans la fonction ci-dessu, pour obtenir

$$f(x) = a(x-2)^2 + 3$$

Il ne reste plus qu'a utiliser les coordonnées de l'autre point pour trouver la valeur de a. Comme la parabole passe par le point de coordonnées $(5;\ 1)$ **c'est que ces deux points sont en relation par la fonction** f. Autrement dit, on peut ramplacer x de l'équation de la fonction par 5 et y par 1 et **l'égalité sera**

encore vraie. Alors comme $f(x) = y$, on a

$$1 = a(5-2)^2 + 3$$

et il ne reste plus qu'à isoler a, ce qui donne

$$a = \frac{-2}{9}$$

et l'équation s'écrit

$$f(x) = \frac{-2}{9}(x-2)^2 + 3$$

Bien évidemment, on peut nous demander de développer et de réduire, alors on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-2}{9}(x^2 - 4x + 4) + 3 \\ &= \frac{-2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{-8}{9} + 3 \\ &= \frac{-2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{-8+27}{9} \\ &= \frac{-2}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{19}{9} \end{aligned}$$

2.4.3 Exercices

Élémentaire

2012. Donner l'équation des paraboles dont le sommet est donné.

(1) $E(-3;1)$
(2) $E(4;-2)$
(3) $E(0;-3)$
(4) $E(-2;0)$

2013. Donner la valeur de a des équation de l'exercice précédent, passant par les points (NB : le numéro de l'item correspond à celui de l'équation de l'exerice précédent.) :

(1) $(0;-1)$
(2) $(0;3)$
(3) $(2;0)$
(4) $(0;2)$

Intermédiaire

2014. Exprimer les fonctions suivantes sous la forme $f(x) = a(x-h)^2 + v$.

(1) $f(x) = -x^2 - 4x - 8$

(2) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

(3) $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

(4) $f(x) = 5x^2 + 20x + 17$

2015. Exprimer les fonctions suivantes sous la forme $f(x) = a(x-h)^2 + v$.

(1) $f(x) = -3x^2 - 6x - 5$

(2) $f(x) = -4x^2 + 16x - 13$

(3) $f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + 9x - 34$

(4) $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{23}{5}$

2016. Donner, à l'aide des formules de Viète les zéros de la fonction suivante, ainsi que les coordonnées de l'extremum et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 11$$

Avancé

2017. Quelle doit être la valeur du paramètre k dans

$$f(x) = x^2 - kx + 2$$

pour que cette parabole admette deux zéros réels ?

2018. Quelle doit être la valeur du paramètre m dans

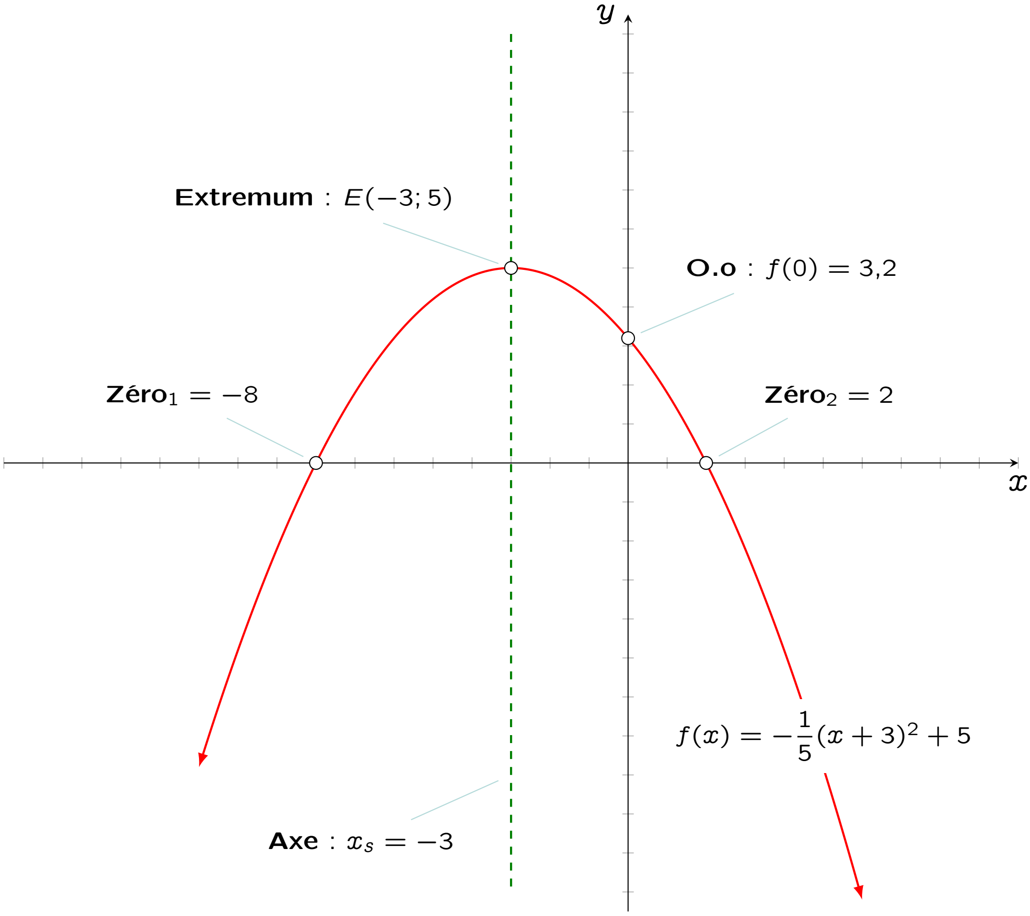
$$f(x) = x^2 - 2mx + 2$$

pour que cette parabole admette une extremum en $(3; -7)$?

2.5 Fonction quadratique (2)

2.5.1 Déterminer E, $f(0)$ et les zéros

Il arrive que l'on doive analyser (étudier) une fonction quadratique afin de résoudre un problème.
En effet, nous verrons plus loin, que les fonctions quadratiques sont utilisées pour déterminer des maximums et/ou des minimums. Lorsque cela est possible, on trace le graphique de la parabole et il est dès lors plus facile de déterminer ou de visualiser, les informations recherchées.



Une des tâches que l'on demande à l'élève de maîtriser, est la description de paraboles. Autrement dit, la recherche des informations remarquables des paraboles. Celles écrites en **gras** sur le graphique. Dans les exercices on appelle cette recherche *étude de fonction*.

2.5.2 Bases théoriques

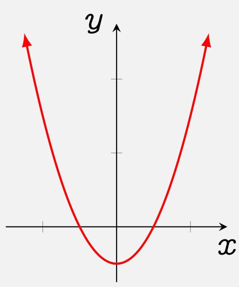
On va définir la **courbure** de la parabole. Autrement dit la forme de la courbe de la fonction quadratique. En clair quelle est l'orientation des deux "bras" de la parabole, si vers le haut ou vers le bas.

Définition 2.5.1 : Convexe et concave

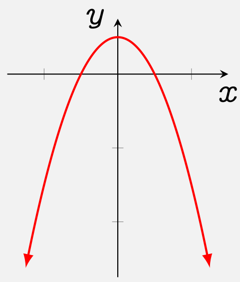
Soit f une fonction quadratique définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Si $\boldsymbol{a > 0}$ alors la parabole est dite **convexe**.



Si $\boldsymbol{a < 0}$ alors la parabole est dite **concave**.



Pour les définitions de l'axe de symétrie, de l'ordonnée à l'origine et de l'extremum voir les définitions de la section précédente : 2.4.1, 2.4.1 et 2.4.1.

Nous rappelons ici la définition des zéros d'une fonction.

Définition 2.5.2 : Zéros d' une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

On appelle les **zéros** de f, les pré-images de 0. Autrement-dit, il s'agit de toutes les solutions de l'équation

$$f(x) = 0$$

2.5.3 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.5.1 : Exemple 1

Tracer la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 5$, puis donner

1. l'ordonnée à l'origine
2. l'équation de l'axe de symétrie
3. les coordonnées de l'extemum
4. et les zéros.

Solution

1. L'**ordonnée à l'origine** est le terme constant du *polynôme du deuxième degré*. Il s'obtient en calculant $f(0)$:

$$\boldsymbol{f(0) = -5}$$

2. l'**équation de l'axe de symétrie** est donnée par la formule $\frac{-b}{2a}$ et s'écrit

$$\boldsymbol{x_S} = \frac{-3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \boldsymbol{-3}$$

3. pour les **coordonnées de l'extremum**, on a déjà la coordonnée horizontale : x_S, il faut encore calculer la coordonnées verticale, c'est $f(x_S)$: (ou bien appliquer l'algorithme de la *complétion du carré*) :

$$f(-3) = \frac{(-3)^2}{2} + 3(-3) - 5 = \frac{9}{2} - 9 - 5 = \frac{9}{2} - 14 = -\frac{19}{2}$$

Et donc l'extremum a pour coordonnée $\boldsymbol{E(-3; -\frac{19}{2})}$

4. **les zéros** s'obtiennent en appliquant les formules de Viète (Propriété 1.4.1, p. 36 ; ou en résolvant avec la complétion du carré) :

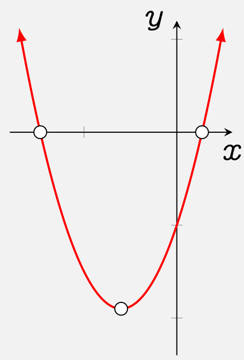
$$0 = \frac{x^2}{2} + 3x - 5$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = 3, \quad c = -5$$

$$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-5) = 19$$

$$\Rightarrow \quad x = -3 \pm \sqrt{19}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S = \{-3 \pm \sqrt{19}\}}$$



2.5.4 Exercices

Élémentaire

2019.

Intermédiaire

2020.

Avancé

2021.

2.6 Fonction quadratique (3)

2.6.1 Exemple d'introduction

2.6.2 Intersection droite-parabole, parabole-parabole

2.6.3 Bases théoriques

2.6.4 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.6.1 : Exemple 1

Solution

2.6.5 Exercices

Élémentaire

2022.

Intermédiaire

2023.

Avancé

2024.

2.7 Fonction quadratique (4)

2.7.1 Exemple d'introduction

2.7.2 Lecture de graphique et interprétation

Faire l'étude de la parabole $f(x) = x^2 + 2x - 3$,
$a = \dots\dots\dots$; $b = \dots\dots\dots$; $c = \dots\dots\dots$

(1) **orientation** : $a = \dots\dots\dots$

l'orientation est ....

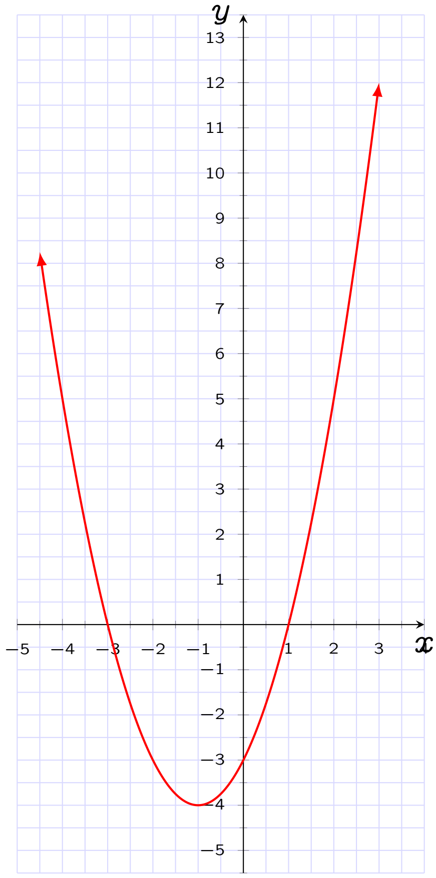
(2) **ordonnée à l'origine** : $c = \dots\dots\dots$

(3) **axe de symétrie** : $x_S = \dots\dots\dots\dots$

(4) **extremum** : $E(\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots)$

c'est un ....

(5) **zéros** : $\Delta = \dots\dots\dots\dots$



2.7.3 Bases théoriques

Soit une fonction du deuxième degré

$$\boldsymbol{f : x \mapsto ax^2 + bx + c} \qquad \text{avec } a \neq 0$$

Le graphique de ce type de fonction sera toujours une ....

Pour **étudier une parabole** on doit suivre les **5** étapes suivantes

1. L'orientation

Pour étudier l'orientation on regarde le **signe** de $\boldsymbol{a}$

si $a > 0$, l'orientation est ....

si $a < 0$, l'orientation est ....

2. L'ordonnée à l'origine

Il nous est très utile de savoir à quel endroit la courbe coupe les axes des coordonnées du plan où elle est tracée. Cette information figure dans l'équation de la parabole. Elle est notée ***c***, et représente la position à laquelle la parabole coupe l'axe

....

3. L'axe de symétrie

Cet axe, qui est une droite, a pour équation

$$x_S =$$

4. Le point extremum

Il est noté *E* et c'est le sommet de la parabole :

$$E(\ldots\ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots)$$

si $a > 0$, alors c'est un ....

si $a < 0$, alors c'est un ....

5. Les zéros

Ce sont les points d'intersection de la courbe avec l'axe ....

Mais, on ne donne que leurs coordonnées horizontales, c'est-à-dire les "$\boldsymbol{x}$". Ceci est dû à ce que pour **tous** les zéros, la coordonnée des "$\boldsymbol{y}$" de ces points vaut **toujours zéro**.
On calcule $\Delta =$ .... et

- si $\Delta > 0$, alors la parabole possède ...... zéros

$$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et } x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- si $\Delta = 0$, alors la parabole possède ...... zéro(s)

$$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- si $\Delta < 0$, alors la parabole ...... possède ...... zéro :

  elle ne .... l'axe des x.

2.7.4 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.7.1 : Exemple 1

Solution

2.7.5 Exercices

Élémentaire

2025. Faire l'étude des paraboles suivantes et tracer un croquis de celles-ci.

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

(b) $f(x) = 4x^2 + 20x + 25$

(c) $f(x) = -2x^2 + 2x - 3$

2026. Faire l'étude des paraboles suivantes et tracer un croquis de celles-ci.

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

(b) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

(c) $f(x) = x^2 + x + 4$

2027. Faire l'étude des paraboles suivantes et tracer un croquis de celles-ci.

(a)	$f(x) = x^2 - 2x + 1$	
(b)	$f(x) = -x^2 + 4x - 12$	

(c) $f(x) = 2x^2 + 4x - \dfrac{5}{2}$

Intermédiaire

2028.

Avancé

2029.

2.8 Fonction quadratique (5)

2.8.1 Exemple d'introduction

2.8.2 Applications

2.8.3 Bases théoriques

2.8.4 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.8.1 : Exemple 1

Solution

2.8.5 Exercices

Élémentaire

2030.

Intermédiaire

2031.

Avancé

2032.

2.9 Fonctions trigonométriques (1) :

2.9.1 Bases théoriques

2.9.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.9.1 : Exemple 1

Solution

2.9.3 Exercices

Élémentaire

2033. blabla

Intermédiaire

2034. blabla

Avancé

2035.

2.10 Fonctions trigonométriques (2) :

2.10.1 Bases théoriques

2.10.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.10.1 : Exemple 1

Solution

2.10.3 Exercices

Élémentaire

2036. blabla

Intermédiaire

2037. blabla

Avancé

2038.

2.11 Fonctions trigonométriques (3) :

2.11.1 Bases théoriques

2.11.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 2.11.1 : Exemple 1

Solution

2.11.3 Exercices

Élémentaire

2039. blabla

Intermédiaire

2040. blabla

Avancé

2041.

Objectifs

(A) utiliser les propriétés trigonométriques des triangles rectangles, afin de
   (1) choisir les formules trigonométriques adéquates pour résoudre une situation donnée ;
   (2) maîtriser l'utilisation de la fonction inverse des fonctions trigonométriques ;

(B) généraliser ce qui précède avec des triangles quelconques, pour notamment
   (1) appliquer les théorèmes du sinus et du cosinus et
   (2) résoudre des problèmes d'application.

3.1 Trigonométrie appliquée aux triangles rectangles (1) :

3.1.1 Bases théoriques

Mesure des angles

Diviser un cercle en 360 parties afin de définir le **degré**, est une excellente idée.

En effet, c'est l'idée qu'un illustre babylonien anonyme a eue il y a environs mille ans.

Mais **pourquoi 360** ? D'abord parce que 360 admet un grand nombre de diviseurs

$$D_{360} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360\}$$

et de ce fait on a plus de chances de tomber sur un diviseur de 360 lorsqu'on fait des calculs, et donc de tomber sur des nombres entiers ou des fractions connues.

Par exemple : *sachant qu'un tour complet du cercle fait* 360° *combien de degrés fait un cinquième de tour ?* La réponse :

$$\frac{360}{\mathbf{5}} = \mathbf{72}$$

comme 5 est un diviseur de 360 on a en retour un nombre entier : 72 qui est aussi un diviseur de 360.

Ensuite, les babyloniens divisaient l'année en 360 jours, suite à des observations du ciel étoilé. Bien qu'il savaient que l'année comportait 365 jours, il était plus pratique de définir un tour complet ou un cycle complet en 360 parties égales qu'en 365 : ceci à cause du grand nombre de diviseur du nombre.
Donc, la mesure d'un **angle** se fait en **degrés**. Et on définit un angle comme **la fraction d'un tour**, étant entendu qu'un tour mesure 360°. On écrit ainsi une proportionnalité

$$\frac{1\text{ tour}}{360^\circ} = \frac{t}{\alpha} \iff \frac{360^\circ}{1\text{ tour}} = \frac{\alpha}{t}$$

où t est mesurée en tours et α en degrés.

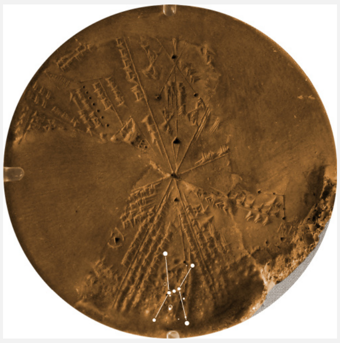


Figure 3.1 – Tablette d'argile Asyrienne (K.8538) décrivant des constellations, on y voit notamment la constellation d'Orion, en blanc.

Notation des angles

Les angles sont notés comme le montre la figure ci-contre. Un angle peut être noté soit par une lettre, grecque en général, α par exemple, soit par la donnée de trois points du plan, $\widehat{AOB}$ par exemple, surmontés par un grand "circonflexe" et dont le point central, ici, O correspond au sommet de l'angle. On rencontre aussi la notation $\widehat{O}$, le nom du sommet surmonté d'un "circonflexe". Cependant elle peut porter à confusion lorsqu'on est en présence d'angles adjacents (cf. Fig. **??**).

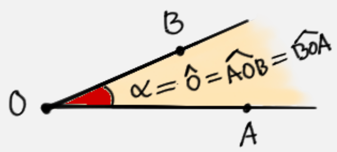


Figure 3.2 – Notation et croquis d'un angle.

$\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOA}$ définit alors ce qu'on appelle un secteur de sommet O et on parle de l'angle d'un secteur, comme on parle de la longueur d'un segment.

Angles particuliers

Un **angle** étant, comme définit plus haut, une fraction de **rotation** autour d'un centre, tous les angles particuliers ci-dessous sont des secteurs de sommet O :

Angle nul

On appelle **angle nul** l'angle que a pour mesure 0 degré.

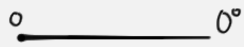


Figure 3.3 – Angle nul.

Angle aigu

On appelle **angle aigu** un angle qui a une mesure comprise entre 0° et 90°.

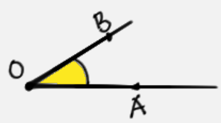


Figure 3.4 – Angle aigu.

Angle droit

On appelle **angle droit** un angle qui a pour mesure 90°.

Figure 3.5 – Angle droit.

Angle obtus

On appelle **angle obtus** un angle qui a une mesure comprise entre 90° et 180°.

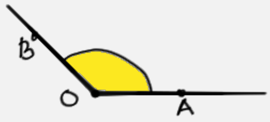


Figure 3.6 – Angle obtus.

Angle plat

On appelle **angle plat** un angle qui a pour mesure 180°.

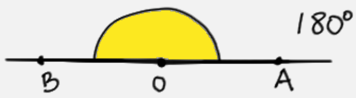


Figure 3.7 – Angle plat.

Angle rentrant

On appelle **angle rentrant** un angle qui a une mesure comprise entre 180° et 360°.

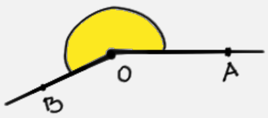


Figure 3.8 – Angle rentrant.

Angle plein

On appelle **angle plein** un angle qui a pour mesure 360°.

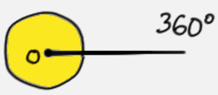


Figure 3.9 – Angle plein.

Rappels importants

Deux angles sont **complémentaires** lorsque la somme de leurs mesures est **90°** et ils sont dits **supplémentaires** lorsque la somme de leurs mesures est **180°**.

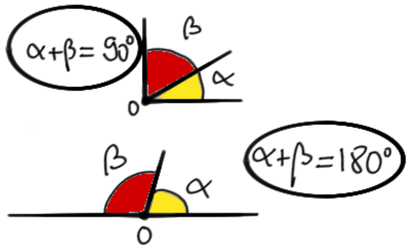


Figure 3.10 – Complémentaires/supplémentaires.

Deux angles **adjacents** ont un sommet commun, un côté commun et sont situés de part et d'autre de ce côté.

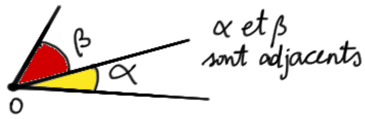


Figure 3.11 – Adjacents.

Deux angles **opposés par le sommet** ont le même sommet et deux côtés dans le prolongement l'un de l'autre. Et donc, **si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont même mesure**.

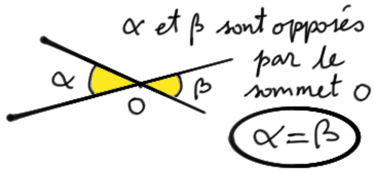


Figure 3.12 – Opposés par le sommet.

Dans la figure ci-contre, les droites d_1 et d_2 sont parallèles et sont traversées par la sécante s qui les coupe en A et B. Alors

- Deux angles **alternes-internes** ont pour sommets A et B, sont situés de part et d'autre de la droite s et sont dans la zone située entre les deux droites d_1 et d_2.

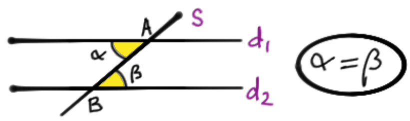


Figure 3.13 – Alternes internes.

- Deux angles **correspondants** ont pour sommets A et B, sont situés d'un même côté de la droite s et un seul des deux est dans la zone située entre les deux droites d_1 et d_2.

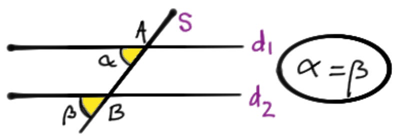


Figure 3.14 – Correspondants.

Le triangle

La plus simple figure géométrique ayant une surface n'est pas le cercle.
C'est le **triangle équilatéral**. En effet, avec ses trois côtés égaux et ses trois angles égaux, c'est une forme statique facile à tracer : il suffit de choisir une longueur, puis de tracer trois segments de cette même longueur en veillant à les "coller" par leur extrémités.

À partir de là, on prouve que **la somme des angles** d'un triangle, quelconque, vaut **180°**.

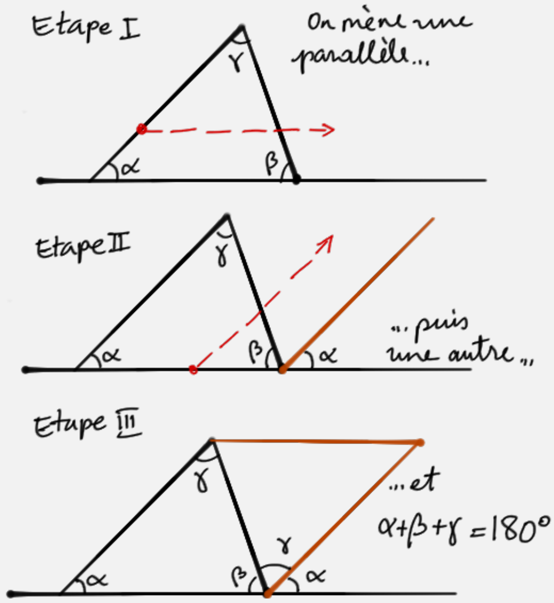


Figure 3.15 – Preuve "visuelle" de la somme des angles d'un triangle.

Inégalité du triangle

Une **très** importante relation, assez intuitive d'ailleurs, lie la longueur des côtés de tout triangle. On l'appelle l'**inégalité du triangle**.

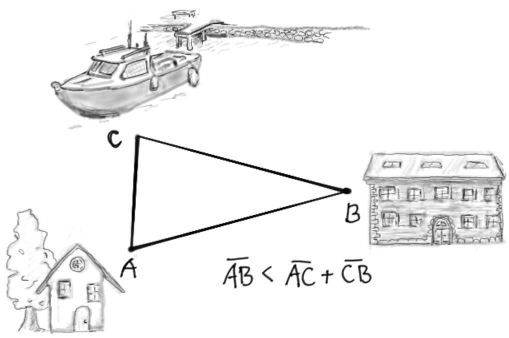


Figure 3.16 – Inégalité du triangle.

Elle consiste à observer que si chacun des sommets représente un lieu différent (par exemple le point A la maison, le point B l'école et le point C la rive du lac) la distance de A à B est **toujours inférieure strictement** à la distance de A à B **via** C

$$\overline{\mathbf{AB}} < \overline{\mathbf{AC}} + \overline{\mathbf{CB}}$$

$$\overline{\mathbf{BC}} < \overline{\mathbf{BA}} + \overline{\mathbf{AC}}$$

$$\overline{\mathbf{CA}} < \overline{\mathbf{CB}} + \overline{\mathbf{BA}}$$

Le point essentiel est que cette relation est toujours vraie lorsque les points A, B et C sont les sommets d'un triangle. L'inégalité devient non stricte si les trois points sont alignés. Cette dernière propriété est très utilisée dans les exercices et problèmes.

Les triangles particuliers

Dans un triangle, une égalité de longueur de côtés entraîne une égalité d'angles et inversement.

Triangle isocèle

Un **triangle isocèle** est un triangle dont deux côtés ont même longueur. Le côté qui se distingue des deux autres est la base du triangle et le sommet opposé, ici A, est utilisé pour parler du triangle : on dit alors que le triangle ABC est un triangle isocèle en A.
La **médiatrice** (droite coupant un segment en deux parties de même longueur) de la base passe par A et définit un point à la base, H et on appelle $\overline{AH}$ la hauteur du triangle puisque l'angle $\widehat{AHC}$ est un angle droit.

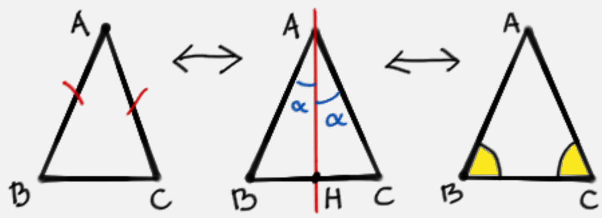


Figure 3.17 – Triangle isocèle.

Finalement, dans ce triangle $\overline{AB} = \overline{AC}$ entraîne (cela veut dire implique) que les angles β et γ sont égaux.

Triangle équilatéral

Un **triangle équilatéral** est un triangle dont les trois côtés ont même longueur. Il est donc triplement isocèle. En effet, les trois médiatrices de ses trois côtés définissent trois points H_A, H_B et H_C en coupant les trois côtés en leur milieu. C'est donc trois hauteurs, et chacune des droites passant par elles est un axe de symétrie du triangle.

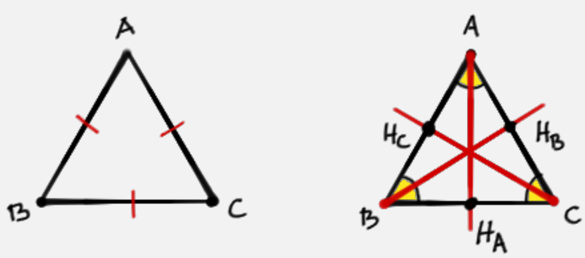


Figure 3.18 – Triangle équilatéral.

Il est à remarquer que dans **tout triangle équilatéral** les angles sont égaux et mesurent chacun **60°**.

Triangle rectangle

Un **triangle rectangle** est un triangle dont deux côtés sont perpendiculaires, c'est-à-dire que l'angle aigu définit par les deux côtés est un **angle droit**.

Ces deux côtés reçoivent le nom de **cathète** et le troisième, faisant toujours face à l'angle droit, est nommé l'**hypoténuse**.

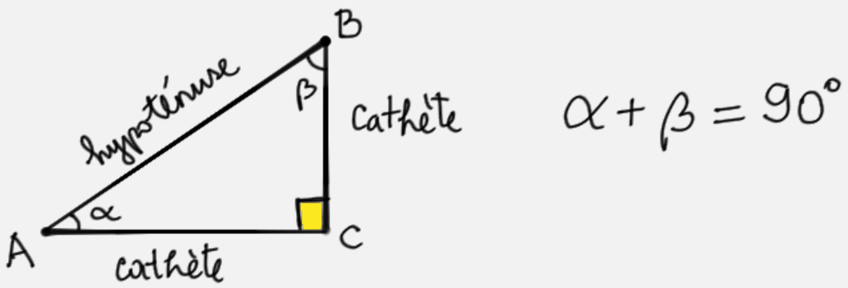


Figure 3.19 – Triangle rectangle.

Lorsqu'on parle du triangle ABC, et s'il est rectangle, ont dit sur quel sommet se trouve l'angle droit, dans le dessin ci-contre on voit un triangle rectangle en C. Remarquer que l'on "code" l'angle droit sur le croquis par un petit carré.

3.1.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 3.1.1 : Exemple 1

Solution

3.1.3 Exercices

Élémentaire

3001. blabla

Intermédiaire

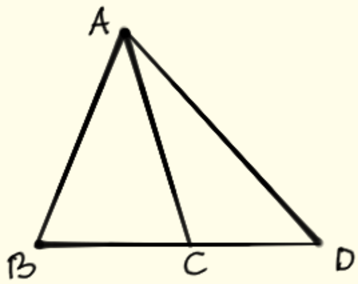
3002. Anita a mesuré les angles de deux triangles ABC et MNP. Dans chaque cas, dire si cela est possible :

(a) $\widehat{ABC} = 50°$; $\widehat{ACB} = 57°$; et $\widehat{BAC} = 74°$

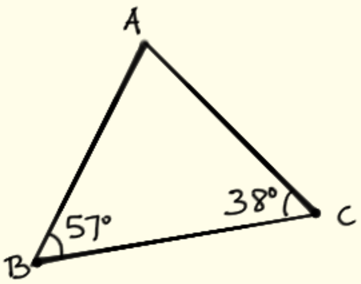
(b) $\widehat{MNP} = 120°$; $\widehat{MPN} = 11°$; et $\widehat{NMP} = 49°$

3003. Sur cette figure, C est un point du segment BD. Que penses-tu du raisonnement de Julien ?:

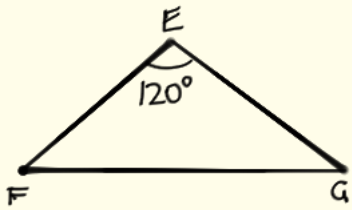
Julien : *“La somme des mesures des angles de chacun des triangles ABC et ACD est $180°$, donc la somme des mesures des angles du triangle ABD est $360°$”*



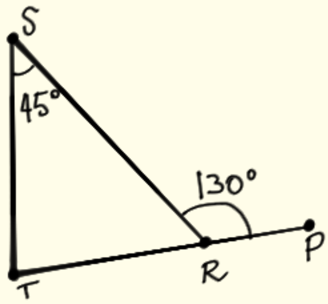
3004. Calcule la mesure de l’angle $\widehat{BAC}$ ci-dessous.



3005. Calculer la somme des mesures des angles $\widehat{EFG}$ et $\widehat{EGF}$ du triangle ci-dessous.



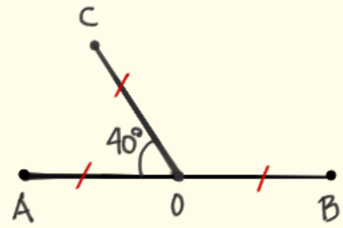
3006. Sur la figure ci-dessous, les points P, R, T sont alignés. Calculer la mesure de l’angle $\widehat{RTS}$



3007. Sur le croquis ci-contre, les points A, O et B sont alignés.

Que peut-on dire des droites (AC) et (CB) ? Prouver vos affirmations par un calcul ou un raisonnement.

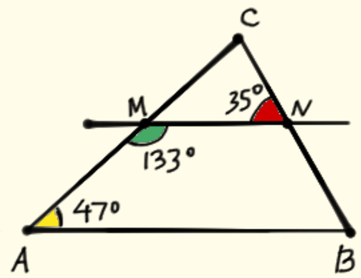
(Notation la droite (AC) est celle passant à la fois par les deux points$A$ et B. Alors que (AC) désigne une droite, AB désigne un segment.)



3008. Avec les informations codées sur la figure ci-contre

(a) Dire si les droites (MN) et (AB) sont parallèles. **Justifier**.

(b) Quelle est alors la mesure de l'angle $\widehat{ABN}$?



Avancé

3009.

3.2 Trigonométrie appliquée aux triangles rectangles (2) :

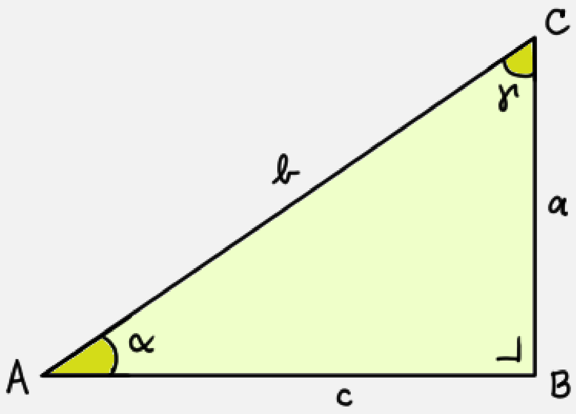
Dans ce qui suit, nous allons entraîner la “résolution de triangles rectangles” :

Résolution d'un triangle rectangle

Résoudre un triangle rectangle, c'est calculer tous les éléments dudit triangle qui ne sont pas donnés dans l'énoncé, c'est-à-dire

(1) longueur des côtés ;
(2) mesure des angles ;
(3) l'aire et
(4) le périmètre.

Pour ce faire nous faisons appel aux fonctions trigonométriques, bien qu'ici et là nous puissions aussi utiliser d'autres techniques (comme par exemple, le théorème de Pythagore ou encore Thalès).



Périmètre $P = a + b + c$

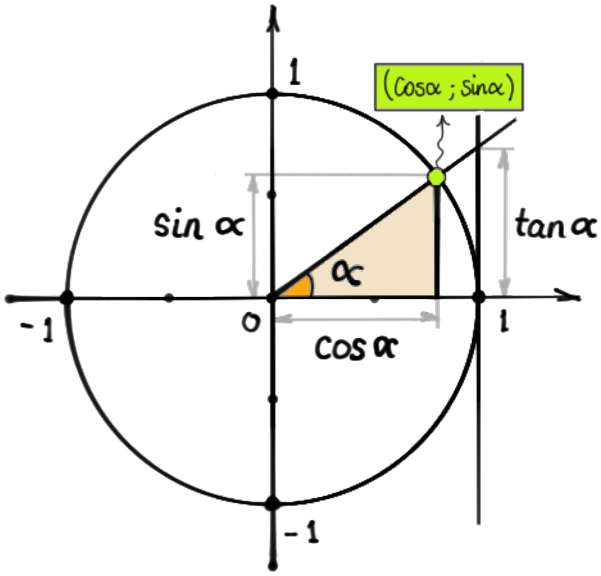
Aire $A = \dfrac{a \cdot c}{2} = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2}$

3.2.1 Bases théoriques

Définition des fonctions trigonométriques

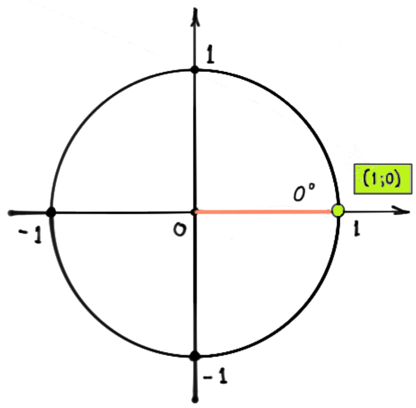
Les fonctions trigonométriques : **sinus**, **cosinus**, et **tangente** sont définies comme les **coordonnées d'un point quelconque du cercle unité**. Ce cercle unité est connu sous le nom de **cercle trigonométrique**. C'est le seul cercle de rayon égal à 1 centré à l'origine.

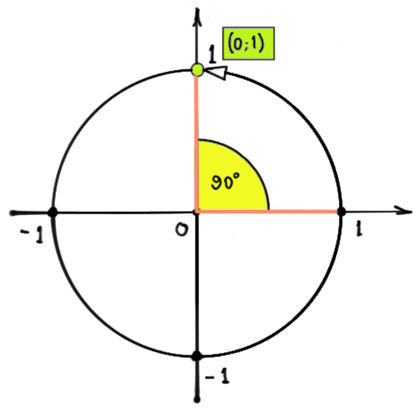
En tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir du point (1; 0) du cercle trigonométrique, on peut définir un angle α (Figure ci-contre).

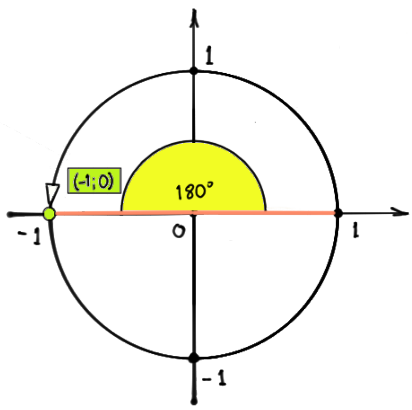


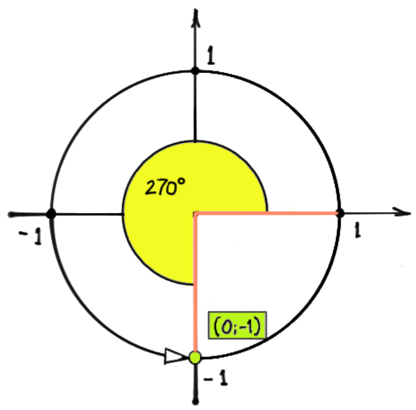
Ainsi, lorsqu'on relève les coordonnées du point dans le repère orthonormé (système d'axes à angle droit), apparaît naturellement un triangle rectangle. La longueur de l'hypoténuse de ce dernier vaut 1. La **longueur de la cathète horizontale** est définie comme le **cos(α)** et la **longueur de la cathète verticale** est définie comme le **sin(α)**.

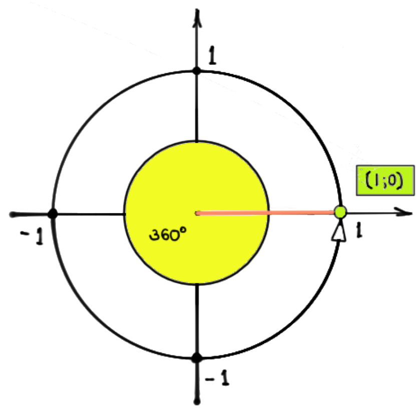
Ci-contre les valeurs des sinus et cosinus des angles remarquables comme coordonnées d'un point sur le cercle trigonométique.











Les fonctions trigonométriques mettent en relation des longueurs et des angles. Il est donc plus naturel de les définir comme des rapports de longueurs.

Puisque l'on peut inscrire dans le cercle unité un triangle rectangle semblable à tout autre triangle rectangle, on définit les fonctions trigonométriques sur un triangle rectangle quelconque.

Définition 3.2.1 : Fonctions trigonométriques dans un triangle rectangle

Soit un **triangle rectangle** dont les longueurs des côtés sont a, b et c, où c est l'hypoténuse :

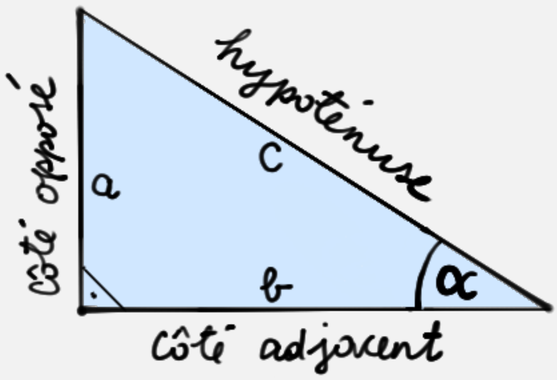


Figure 3.20 – Vocabulaire du triangle rectangle.

On définit le **sinus** de l'angle α comme le rapport

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{hypoténuse}} = \frac{a}{c}}$$

le **cosinus** de l'angle α comme le rapport

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\textbf{côté adjacent}}{\textbf{hypoténuse}} = \frac{b}{c}}$$

et la **tangente** de l'angle α comme le rapport

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\textbf{côté opposé}}{\textbf{côté adjacent}} = \frac{a}{b}}$$

Il est impossible d'utiliser les fonctions trigonométriques sans l'aide des calculatrices. Avant la généralisation de leur utilisation, les scientifiques et ingénieurs se servaient de tables numériques pour faire leurs calculs.

Nous utiliserons donc 6 fonctions trigonométriques présentes dans vos calculatrices, à savoir

cos sin tan arccos arcsin arctan

Les trois dernière sont les fonctions réciproques des trois fonctions de base :

Définition 3.2.2 : Fonctions trigonométriques réciproques

$$\boxed{\sin(\alpha) = x \iff \mathbf{arcsin}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{sin}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boxed{\cos(\alpha) = x \iff \mathbf{arccos}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{cos}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boxed{\tan(\alpha) = x \iff \mathbf{arctan}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{tan}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}}$$

Relations entre sin, cos, tan

On admet les relations suivantes sans démonstration.

Les rapports trigonométriques de l'angle α sont liés par les relations suivantes :

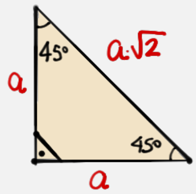
$$\boxed{(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1}$$

et

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

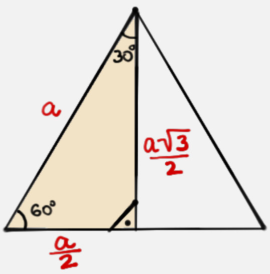
Angles particuliers

Dans un triangle **rectangle isocèle**, c'est-à-dire un triangle qui a un angle droit (**rectangle**) et dont deux côtés sont de même longueur (**isocèle**) -en fait "un carré divisé par une de ses diagonales"-, les rapports sont **toujours**



$$\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan(45°) = 1$$

Dans un demi-triangle **équilatéral** on a **toujours**



$$\cos(30°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

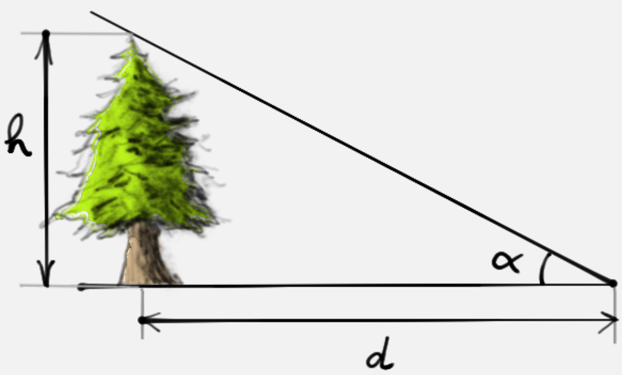
$$\cos(60°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \tan(60°) = \sqrt{3}$$

Application pour déterminer des longueurs inaccessibles

La situation dans laquelle les fonctions trigonométriques sont le plus utiles est la suivante[a] :
On souhaite déterminer la hauteur h d'un arbre après avoir mesuré la longueur d de son ombre portée. On mesure pour cela l'angle α (que l'on appelle l'*élévation du soleil* au moment considéré) et on a alors

$$h = d \cdot \tan(\alpha)$$



a. Ce n'est pas tout à fait exacte, car en fait il y en a plein. Cependant, cette situation peut être prise comme modèle, comme un exemple permettant de donner du sens à ces fonctions trigonométriques.

3.2.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 3.2.1 : Exemple 1

Trouver la mesure de l'angle α, en degrés et arrondi au centième, sachant que son sinus vaut 0,854 3.

Solution 1
Puisque

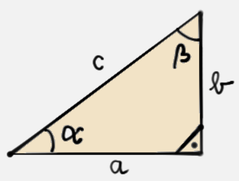
$$\sin(\alpha) \cong 0{,}854\ 3$$

il suffit d'appliquer la fonction réciproque du sinus pour réussir à isoler l'inconnue, α, et ainsi calculer sa valeur avec la fonction arcsin de la calculatrice :

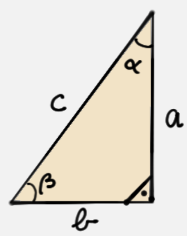
$$\alpha = \arcsin(0{,}854\ 3) = \sin^{-1}(0{,}854\ 3) \cong 58{,}68$$

Exemple 3.2.2 : Exemple 2

Donner la valeurs des sinus, cosinus et tangente des angles α et β sur les triangles ci-après :



1. $\sin(\alpha) =$ $\qquad$ $\sin(\beta) =$
2. $\cos(\alpha) =$ $\qquad$ $\cos(\beta) =$
3. $\tan(\alpha) =$ $\qquad$ $\tan(\beta) =$



Solution 2

1. $\sin(\alpha) = \dfrac{b}{c}$ $\qquad$ $\sin(\beta) = \dfrac{a}{c}$
2. $\cos(\alpha) = \dfrac{a}{c}$ $\qquad$ $\cos(\beta) = \dfrac{b}{c}$
3. $\tan(\alpha) = \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $\tan(\beta) = \dfrac{a}{b}$

3.2.3 Exercices

Élémentaire

3010. Avec la calculatrice donner les valeurs suivantes. Arrondir vos résultats à 3 décimales.

(a) $\sin(30°) = \ldots\ldots\ldots$ $\cos(30°) = \ldots\ldots\ldots$

$\tan(30°) = \ldots\ldots\ldots$

(b) $\sin(15°) = \ldots\ldots\ldots$ $\cos(15°) = \ldots\ldots\ldots$

$\tan(15°) = \ldots\ldots\ldots$

(c) $\sin(0°) = \ldots\ldots\ldots$ $\cos(0°) = \ldots\ldots\ldots$

$\tan(0°) = \ldots\ldots\ldots$

(d) $\sin(110°) = \ldots\ldots\ldots$ $\cos(110°) = \ldots\ldots\ldots$

$\tan(110°) = \ldots\ldots\ldots$

(e) $\sin(90°) = \ldots\ldots\ldots$ $\cos(90°) = \ldots\ldots\ldots$

$\tan(90°) = \ldots\ldots\ldots$

3011. Avec la calculatrice donner la valeur des angles α, β et γ (arrondir à deux décimales) :

(a) $\sin(\alpha) \cong 0{,}785$

(b) $\cos(\beta) \cong 0{,}123$

(c) $\tan(\delta) \cong 1{,}8$

Intermédiaire

3012. Trouver le cosinus et la tangente d'un **angle aigu** dont le sinus vaut $\frac{1}{3}$.

3013. Construire l'angle dont le sinus est 0,65.

3014. Construire l'angle dont la tangente est $\frac{4}{7}$.

3015. Soit un triangle ABC rectangle en A tel que

$$\overline{AB} = 5\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad \widehat{C} = 33^\circ$$

Calculer la longueur des segments BC et CA.

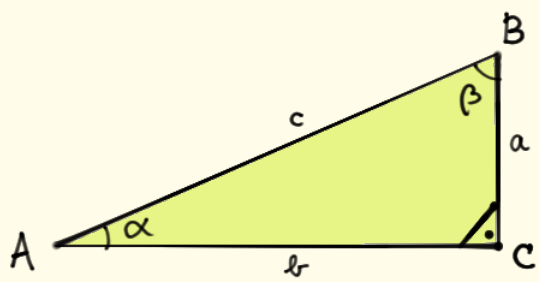
3016. Soit ABC un triangle rectangle en A.

On donne $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ et $\tan(\widehat{B}) = \frac{1}{2}$.

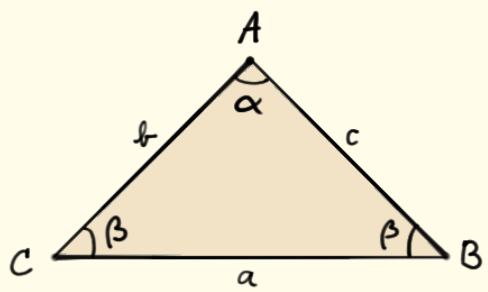
Calculer $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\cos(\widehat{B})$ et $\sin(\widehat{B})$.

3017. Considérons un triangle ABC rectangle en C. Résoudre ce triangle, connaissant :

(a) $c = 4{,}75$ $\quad \beta = 65{,}8^\circ$
(b) $c = 12{,}21$ $\quad \alpha = 40{,}23^\circ$
(c) $a = 22{,}3$ $\quad b = 46{,}8$
(d) $b = 42{,}8$ $\quad A = 1\ 040{,}26$
(e) $\alpha = 38{,}45^\circ$ $\quad A = 8{,}28$



3018. Considérons un triangle ABC **isocèle** en A. Résoudre ce triangle, connaissant :

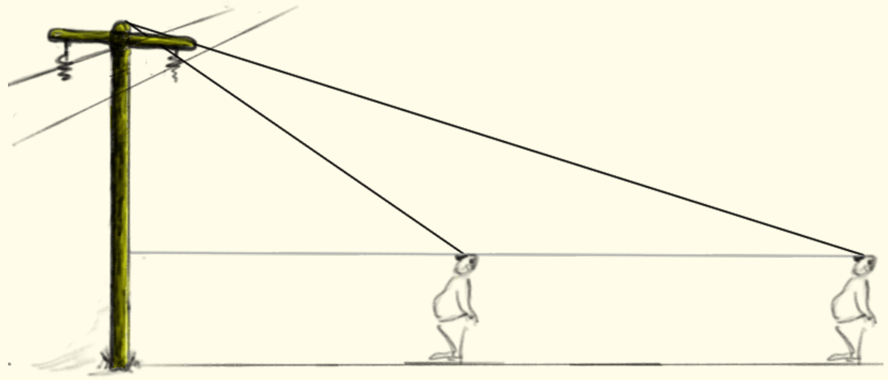


(a) $\alpha = 48{,}5^\circ$ $\quad a = 22{,}8$
(b) $\alpha = 103{,}48^\circ$ $\quad b = c = 4{,}24$
(c) $\beta = 72{,}4^\circ$ $\quad a = 8{,}5$
(d) $\beta = 32{,}89^\circ$ $\quad b = c = 18{,}72$
(e) $a = 56{,}7$ $\quad A = 624{,}34$

3019. Dans un triangle ABC rectangle en C, montrer qu'on a la relation :

$$\sin(\beta) \cdot \tan(\beta) = \frac{b^2}{a \cdot c}$$

3020. Un homme, mesurant 1,8 m de hauteur, aperçoit le sommet d'un poteau électrique sous un angle de 18,3°. Lorsqu'il avance de 25 m il aperçoit le sommet cette fois sous un angle de 38,6°.
Quelle est la hauteur du poteau et à quelle distance de ce dernier se trouvait l'homme au début de l'expérience ?



3021. La voûte d'un tunnel routier est un arc de cercle d'angle au centre de 220°. Calculer le rayon r de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 12 m. Calculer aussi la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

Avancé

3022. Un observateur, placé à une hauteur de 252 m au-dessus du niveau de la mer, a trouvé que le rayon visuel aboutissant à l'horizon sensible faisait avec la verticale un angle de $89{,}49\,^{\circ}$. On demande de calculer, d'après cette mesure, le rayon terrestre.

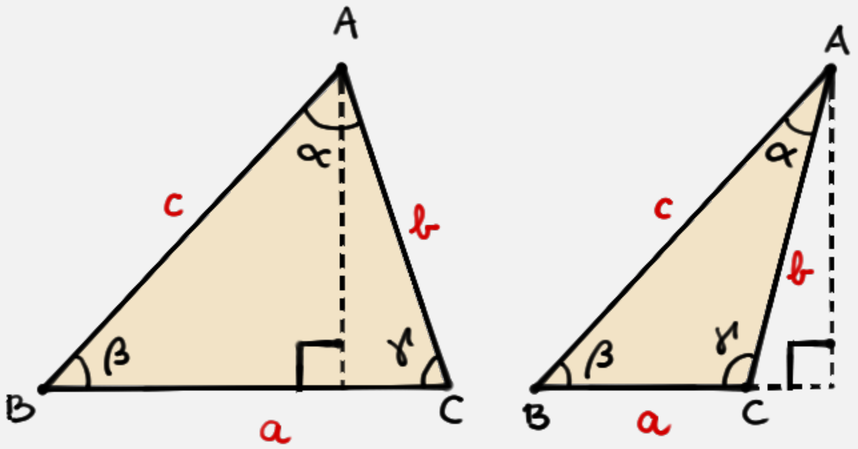
3.3 Trigonométrie appliquée aux triangles quelconques (1) :

3.3.1 Bases théoriques

Théorème du sinus

Dans un triangle, les longueurs des côtés du triangle sont proportionnelles aux sinus des angles opposés respectifs. C'est-à-dire

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



Théorème du cosinus

Avec les mêmes notations utilisées pour la figure précédente.

Dans un triangle quelconque on la relation suivante entres les côtés du triangle. Ce théorème est aussi appelé le **théorème de Pythagore généralisé** (pourquoi ?)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

3.3.2 Exercices résolus (exemples)

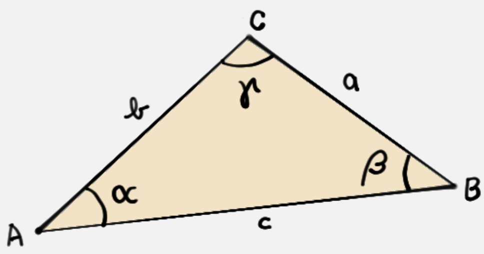
Exemple 3.3.1 : Exemple 1

En utilisant les formules ci-dessus, donner

$$\boldsymbol{\alpha}, \ \boldsymbol{\gamma} \text{ et } \boldsymbol{b}$$

sachant que

$$a = 85{,}80; \ c = 57{,}29 \text{ et } \beta = 117{,}81°$$



Solution On ne peut pas utiliser le théorème des sinus : en effet, il nous manque le côté correspondant à l'angle β.

Par contre on peut utiliser le **théorème du cosinus** :

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \\ &= 85{,}80^2 + 57{,}29^2 - 2 \cdot 85{,}80 \cdot 57{,}29 \cdot \cos(117{,}81) \\ &\approx 7\ 361{,}64 + 3\ 282{,}14 - 2 \cdot 4\ 915{,}48 \cdot (-0{,}467) \\ &\approx 15\ 230{,}33 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{b \approx 123{,}41}$$

Et maintenant on peut appliquer une fois le **théorème du sinus** :

$$\begin{aligned} & \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \\ \Longleftrightarrow \quad & \sin(\gamma) = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{b} \\ \Longleftrightarrow \quad & \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{c \cdot \sin(\beta)}{b}\right) \\ \Longrightarrow \quad & \gamma \approx \sin^{-1}\left(\frac{57{,}29 \cdot \sin(117{,}81)}{123{,}41}\right) \approx \sin^{-1}(0{,}411) \\ \Longrightarrow \quad & \boldsymbol{\gamma \approx 24{,}24°} \end{aligned}$$

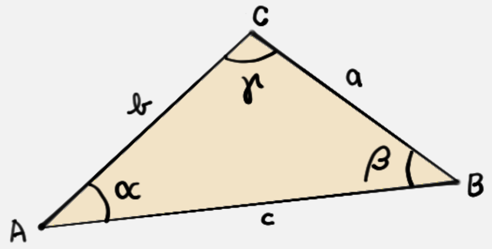
Finalement, on peut appliquer une soustraction pour trouver α :

$$\begin{aligned} & \alpha + \beta + \gamma = 180° \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha = 180 - (\beta + \gamma) \\ \Longrightarrow \quad & \alpha \approx 180 - 142{,}05 \\ \Longrightarrow \quad & \boldsymbol{\alpha \approx 37{,}95°} \end{aligned}$$

3.3.3 Exercices

Élémentaire

NB : Sauf avis contraire, la notation des sommets, angles et longueurs est standard.



3023. Résoudre le triangle quelconque ABC, dont on ne connaît que les trois infomations suivantes :

$a = 70{,}24 \qquad b = 82{,}12 \qquad \gamma = 30{,}69\,°$

3024. Résoudre le triangle quelconque ABC, dont on ne connaît que les trois infomations suivantes :

$a = 85{,}67 \qquad \beta = 123{,}18\,° \qquad \gamma = 24{,}54\,°$

3025. Résoudre le triangle quelconque ABC, dont on ne connaît que les trois infomations suivantes :

$a = 41{,}94 \qquad b = 96{,}92 \qquad c = 107{,}26$

3026. Résoudre le triangle connaissant son aire $\mathcal{A} = 12{,}52\,\text{cm}^2$ ainsi que les angles $\alpha = 54{,}08\,°$ et $\beta = 88{,}94\,°$.

3027. Calculer le côté a dn triangle ABC dont on donne les côtés $b = \sqrt{2}$ et $c = \sqrt{3}$ et l'angle $\gamma = 60\,°$.

Intermédiaire

3028. D'un parallélogramme $ABCD$, on donne les côtés $AB = 30$ cm, $BC = 20$ cm et l'angle $\beta = 60\,°$ en B. Calculer la longueur des diagonales AC et BD, ainsi que l'angle aigu θ qu'elles forment entre elles.

3029. Un point B est inaccessible et **invisible** depuis un point A. Pour déterminer la distance AB, on a choisi deux points C et D alignés avec A et d'où l'on voit les points A et B.

On a mesuré les distances $AD = 432{,}3$ m et $AC = 521{,}8$ m ainsi que les angles $\widehat{ADB} = 55{,}3\,°$ et $\widehat{ACB} = 41{,}6\,°$.

Calculer la distance AB lorsque le point A est situé entre C et D.

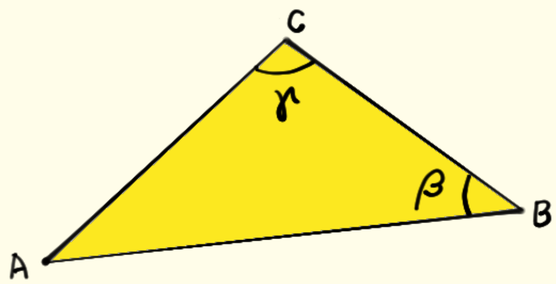
3030. On considère le triangle ABC ci-contre.

On connaît les côtés

$AB = 10$ cm et $BC = 5$ cm

ainsi que l'angle

$$\beta = 43\,°$$



Calculer :

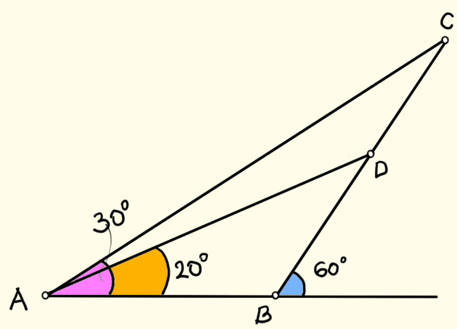
(a) la longueur du côté AC ;
(b) la mesure de l'angle γ à l'aide du **Théorème du sinus** ;
(c) la mesure du même angle γ à l'aide du **Théorème du cosinus** ;
(d) comment expliquez-vous ces 2 valeurs différentes ? Laquelle est correcte ?

3031. On considère la figure suivante

où la longueur du segment $AB = 22{,}8$

Calculer les longueurs manquantes, à savoir

BC, BD, DC, AD et AC.



3032. Les côtés dn triangle valent respectivement x^2+x+1, $2x+1$ et x^2-1, où x désigne un nombre réel supérieur à 1. Montrer (par un calcul) que l'angle opposé au premier côté a pour mesure $120\,°$.

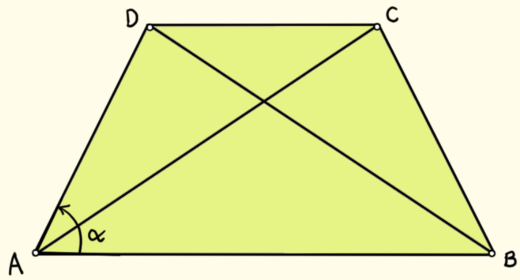
Avancé

3033. Résoudre le triangle ABC sachant que ses hauteurs mesurent $h_a = 3$, $h_b = 4$ et $h_c = c$.

3034. On considère le trapèze isocèle $ABCD$ suivant.

Calculer BC et l'angle α en fonction de

$AB = a$, $\quad CD = b$ et $AC = d$.



3.4 Trigonométrie appliquée aux triangles quelconques (2) :

3.4.1 Bases théoriques

Le théorème de Thalès

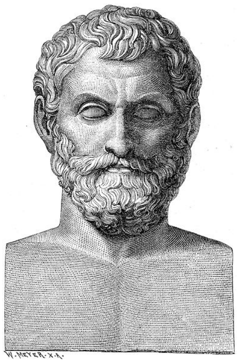


Figure 3.21 – Thalès de Milet

Thalès était un mathématicien grec qui aurait vécu au $VI^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C. dans la ville d'Ionie de Milet, actuellement située sur la côte de la mer Égée en Turquie.

Il était aussi commerçant, astronome, ingénieur et philosophe.

Une légende veut que Thalès, lors d'un voyage en Égypte, soit allé visiter les pyramides construites plusieurs siècles plus tôt. Alors qu'il admirait ces monuments, il fut mis au défi d'en calculer la hauteur.

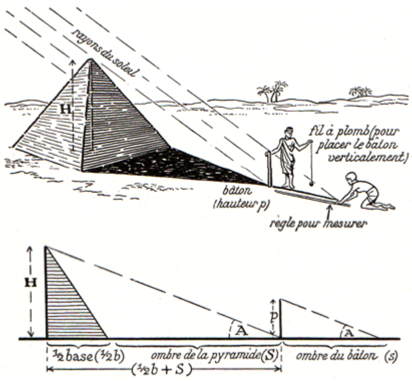


Figure 3.22 – Calcul de la hauteur d'une pyramide par Thalès

Toujours selon cette légende, Thalès aurait calculé la hauteur d'une pyramide en mesurant la longueur de son ombre au sol et la longueur de l'ombre d'un bâton de hauteur donnée.

Le Théorème

En comparant les côtés d'un triangle avec les côtés d'un autre triangle, soit dans la configuration "droites" (cf. Figure 3.23), composé de

- deux droites **sécantes** s_1 et s_2
- et de droites **parallèles**, ici d_1 et d_2, qu'on note $d_1//d_2$;

soit dans la configuration "triangles" (cf. Fig. 3.24), composée de deux **triangles semblables**, ici superposés.

Le théorème dit, qu'alors les trois rapports des longueurs ci-dessous sont égaux, c'est-à-dire que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

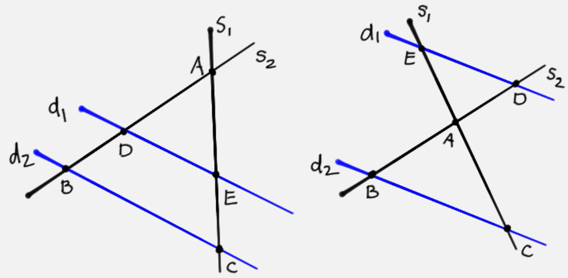


Figure 3.23 – Les deux possibilités de la configuration "droites" du théorème

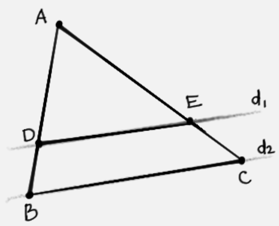


Figure 3.24 – Configuration "triangles" du théorème

Rappels

Droites sécantes

Deux droites sont **sécantes** lorsqu'elles ne sont pas parallèles. Autrement dit, elles se coupent en un seul point.

Droites parallèles

Deux droites du plan sont **parallèles** si et seulement si elles n'ont aucun point commun ou si elles sont confondues. Deux droites ayant un et un seul point commun sont dites sécantes.

Triangles semblables

Deux triangles sont **semblables**

— si deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre

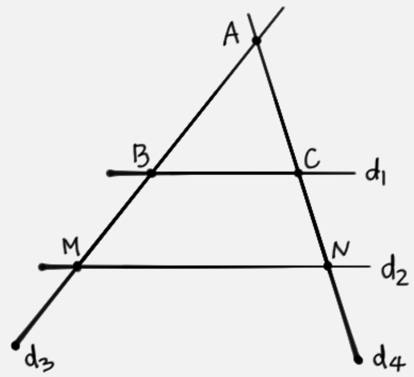
ou

— si deux côtés de l'un sont proportionnels à deux côtés de l'autre (cas exploité ici).

3.4.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 3.4.1 : Exemple 1

Sur la figure ci-contre, les droites d_1 et d_2 sont parallèles. On connaît les longueurs suivantes $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$, $\overline{AN} = 4\,\text{cm}$ et $\overline{AM} = 7\,\text{cm}$. Calculer la longueur $\overline{AC}$.



Solution 1 Les droites d_3 et d_4 sont sécantes en A et les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}$$

c'est-à-dire, en remplaçant par les longueurs connues,

$$\frac{3}{7} = \frac{\overline{AC}}{4} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}$$

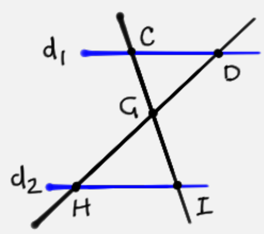
En faisant une petite manipulation algébrique (*multiplier par 4 les deux côtés de la première égalité*), on a

$$\overline{AC} = \frac{3 \cdot 4}{7} = \frac{12}{7}$$

Et finalement la solution est $\overline{AC} = \dfrac{12}{7}$ cm.

Exemple 3.4.2 : Exemple 2

Sur la figure ci-contre, les droite d_1 et d_2 sont parallèles. On donne $\overline{DG} = 25\,\text{mm}$, $\overline{GH} = 45\,\text{mm}$, $\overline{CG} = 20\,\text{mm}$ et $\overline{HT} = 27\,\text{mm}$. Calculer $\overline{GT}$ et $\overline{CD}$.



Solution 1 Les droites passant par le segment DH et CT sont sécantes. Les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Donc, on peut **appliquer** le théorème de Thalès, et on a les égalités suivantes

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{GT}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{HT}}$$

c'est-à-dire, en remplaçant par les longueurs connues,

$$\frac{20}{\overline{GT}} = \frac{25}{45} = \frac{\overline{CD}}{27}$$

Pour calculer $\overline{GT}$ on considère la première égalité : après avoir fait deux multiplications, une par $\overline{GT}$ et l'autre par 45 des deux côtés du signe égal on trouve

$$45 \cdot 20 = 25 \cdot \overline{GT}$$

puis en divisant par 25 des deux côtés de l'égalité on a

$$\overline{GT} = \frac{45 \cdot 20}{25} = 36$$

et la solution est $\overline{GT} = 36\,\text{mm}$.

Pour calculer $\overline{CD}$ on considère la seconde égalité, et après avoir multiplié par 27 des deux côtés de l'égalité on trouve

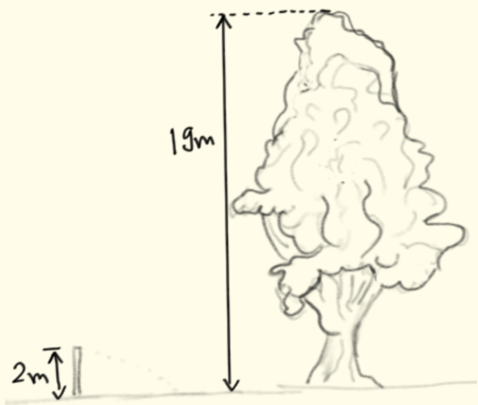
$$\overline{CD} = \frac{25 \cdot 27}{45} = 15$$

donc la solution est $\overline{CD} = 15\,\text{mm}$.

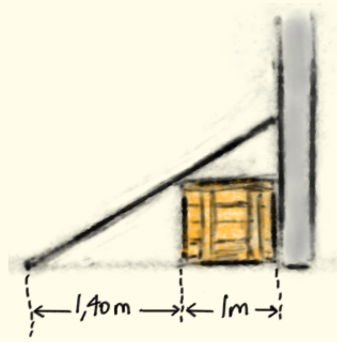
3.4.3 Exercices

Élémentaire

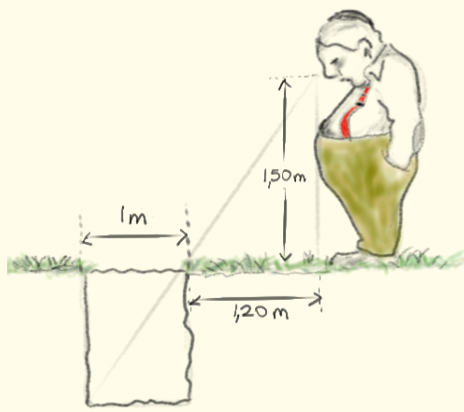
3035. Un piquet de 2 m de haut, planté à la verticale dans le sol, projette une ombre de 4,5 m. Quelle sera la longueur de l'ombre projetée par un arbre de 19 m de hauteur ?



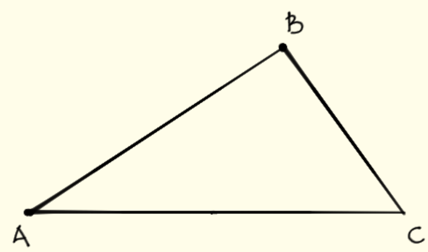
3036. Une échelle est posée contre un mur et une caisse cubique de 1 m de côté. La distance entre le bas de l'échelle et la caisse est de 1,40 m. Calculer, si possible, la distance entre le haut de l'échelle et le sol.



3037. Calculer la profondeur du puits sur l'illustration ci-contre.



3038. Dans le triangle ABC rectangle en B, la hauteur issue de B détermine deux triangles semblables.



(a) Tracer la hauteur issue de B et marquer l'intersection avec AC par H.

(b) Dire pourquoi les deux triangles ainsi déterminés sont semblables (expliquer, justifier).

(c) Exprimer le carré de $\overline{BH}$ en fonction de $\overline{AH}$ et de $\overline{CH}$.

(d) Peux-tu encore exprimer $\overline{BC}^2$ en fonction de $\overline{HC}$ et de $\overline{AC}$; $\overline{AB}^2$ en fonction de $\overline{AH}$ et de $\overline{AC}$?

3.5 Trigonométrie appliquée aux traingles quelconques (3) :

3.5.1 Bases théoriques

3.5.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 3.5.1 : Exemple 1

Solution

3.5.3 Exercices

Élémentaire

3039. blabla

Intermédiaire

3040. blabla

Avancé

3041.

3.6 Trigonométrie appliquée aux triangles quelconques (4) :

3.6.1 Bases théoriques

3.6.2 Exercices résolus (exemples)

Exemple 3.6.1 : Exemple 1

Solution

3.6.3 Exercices

Élémentaire

3042. blabla

Intermédiaire

3043. blabla

Avancé

3044.