ECG Ella-Maillart

MATH

EM

ATIQUE

3^{e}

Robinson Cartez
2024-2025 v0.1
Genève

Table des matières

1.1 Exponentielles

1.1.1 Propriété des puissances

Il est indispensable de connaître les propriétés suivantes afin de manipuler avec aisance les expressions travaillées dans ce chapitre.

Propriété 1.1.1 : Propriété des puissances

Soient a et b deux nombres réels positifs, et soient m et n deux nombres réels. Alors les cinq égalités suivantes sont vraies

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{PP1} & a^m \cdot a^n & = & a^{m+n} \\
\textbf{PP2} & \dfrac{a^m}{a^n} & = & a^{m-n} \\
\textbf{PP3} & (a^m)^n & = & a^{m\cdot n} \\
\textbf{PP4} & a^n \cdot b^n & = & (a \cdot b)^n \\
\textbf{PP5} & \dfrac{a^n}{b^n} & = & \left(\dfrac{a}{b}\right)^n
\end{array}$$

Il est de même important de connaître les quatre suivantes, qui sont en réalité des cas particuliers

Propriété 1.1.2

Si $a > 0$ et si m et n sont des entiers positifs, alors

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{PP6} & a^0 & = & 1 \\
\textbf{PP7} & a^{-n} & = & \dfrac{1}{a^n} \\
\textbf{PP8} & a^{\frac{1}{n}} & = & \sqrt[n]{a} \\
\textbf{PP9} & a^{\frac{m}{n}} & = & \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}
\end{array}$$

Important

Noter que $a \neq 0$ et que les propriétés 6 et 7 sont vraies même si $a < 0$.

1.1.2 Équations exponentielles

Considérons l'équation

$$2^x = 16$$

C'est ce qu'on appelle une **équation exponentielle** dans sa forme la plus simple. En effet, l'inconnue x se trouve à la place de l'exposant, d'où son nom.

Exemple 1.1.1

Résoudre chacune des équations suivantes

(1) $2^x = 16$

(2) $5^{2y} \cdot 3^y = \dfrac{1}{75}$

Solution

(1)

$$\begin{aligned} 2^x &= 16 \\ \Leftrightarrow 2^x &= 2^4 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (5^2)^y \cdot 3^y &= \frac{1}{75} && \textbf{Propriété 3} \\ \Leftrightarrow 25^y \cdot 3^y &= 75^{-1} \\ \Leftrightarrow (25 \cdot 3)^y &= 75^{-1} && \textbf{Propriété 4} \\ \Leftrightarrow 75^y &= 75^{-1} \\ \Leftrightarrow y &= -1 \end{aligned}$$

Challenge

Résoudre ces équations dans $\mathbb{R}$.

(1) $3^x = 243$

(3) $4^y = \dfrac{1}{8}$

(2) $6^{1-k^2} = 1$

(4) $2^{2z} \cdot 3^z = \dfrac{1}{144}$

En général pour résoudre une équation exponentielle **et lorsque les deux membres** de l'équation sont de **même** base, on utilise la propriété suivante

Propriété 1.1.3 : Égalité des puissances

Si
$$a^x = a^n \qquad (\text{où } a \neq -1; a \neq 0 \text{ et } a \neq 1)$$
alors
$$x = n$$

Que pensez-vous ?

1. Qu'arrive-t-il dans le cas où on sait que $a^x = a^n$, mais que $a = -1$ ou $a = 0$ ou $a = 1$?
2. Sachant que $a > 0$, existe-t-il des valeurs pour x pour lesquelles a^x est égal à zéro ou bien un nombre négatif ? (Essayez quelques exemples, par exemple 2^3; 5^0; 4^{-2}, etc.)

De manière générale, si la base est un nombre positif, alors la puissance de cette base est toujours un nombre positif. Nous verrons cela lorsque nous étudierons les fonctions exponentielles.

Propriété 1.1.4

Si la base $a > 0$ alors
$$a^x > 0$$
pour tout nombre réel x.

Exemple 1.1.2

Résoudre l'équation suivante, en utilisant la substitution

$$9^{x+1} = 1 - 8 \cdot (3^x)$$

Solution

$$\begin{aligned} & 9^{x+1} = 1 - 8 \cdot (3^x) \\ \Leftrightarrow\ & 9^x \cdot 9^1 + 8 \cdot (3^x) - 1 = 0 \quad \textbf{(Propriété 1)} \\ \Leftrightarrow\ & (3^2)^x \cdot 9 + 8 \cdot (3^x) - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (3^x)^2 \cdot 9 + 8 \cdot (3^x) - 1 = 0 \quad \textbf{(Propriété 3)} \end{aligned}$$

Posons $y = 3^x$. Alors

$$\begin{aligned} & 9y^2 + 8y - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (9y-1)(y+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 9y - 1 & = 0 \\ y + 1 & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} y & = \frac{1}{9} \\ y & = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x & = \frac{1}{9} \\ 3^x & = -1 \quad \textbf{Ici pas de solution !(pourquoi ?)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3^2} = 3^{-2} \quad \textbf{Propriété 7} \\ & \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Challenge

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$4^{x+1} = 2 - 7 \cdot (2^x)$$

(2) En utilisant la substitution $w = 3^x$

(a) exprimer l'équation $27^x + 2 \cdot (3^x) + 1 = 13$ en fonction de w (ce sera une expression ayant des w^3) ;

(b) montrer que $w = 2$ est solution de cette nouvelle équation ;

(c) résoudre l'équation $27^x + 2 \cdot (3^x) + 1 = 13$.

1.1.3 Exercices

1001. Résoudre les équations suivantes.

(a) $5^x = 625$

(b) $9^y = \frac{1}{27}$

(c) $7^{p^2-4} = 1$

(d) $2^{2x} \cdot 9^x = \frac{1}{6}$

1002. Résoudre les équations suivantes.

(a) $3^y + 3^{y+2} = 90$

(b) $2^{t+4} - 2^t = 120$

(c) $4^n + 2^{2n-3} = \frac{3^2}{2^3}$

(d) $5^{z^2-4} - 125^z = 0$

1003. *Résoudre les équations suivantes.

(a) $2 \cdot (25^x) = 3 - 5^x$

(b) $3^{8y} + 3^2 = 10 \cdot (3^{4y})$

(c) $7^{2z+1} - 7^z = 7^{z+1} - 22 \cdot (7^z)$

1.1.4 Racines

La propriété des puissances **Propriété 8** ci-dessus nous dit que

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Par exemple

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

et aussi

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

On remarquera que $\sqrt{4} = 2$ est un nombre rationnel, alors que $\sqrt[3]{5}$ ne l'est pas. Pour rappel un nombre est irrationnel lorqu'il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction. On constate que $2 = \frac{2}{1}$ et est donc un nombre rationnel.

Dans ce qui suit, nous travaillons seulement les racines carrés.

Recherche

Avec l'aide de votre calculette, répondez aux questions suivantes

1. Est-ce que les égalités suivantes sont vraies ?

   (a) $\sqrt{16+9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} + \sqrt{9}$

   (b) $\sqrt{16 \cdot 9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$

   (c) $\sqrt{16-9} \stackrel{?}{=} \sqrt{16} - \sqrt{9}$

   (d) $\sqrt{\frac{9}{16}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{9}{16}}$

2. En utilisant les propriétés des puissances 4 et 5, donner une forme générale des égalités ci-dessus. (Utiliser a à la place de 16 et b à la place de 9, par exemple. Tenire compte des conditions des propriétés 4 et 5.)
3. Évaluer $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$.

Le résultat de la recherche précédente suggère ce qu'on va appeler les propriétés des racines :

Propriété 1.1.5 : Propriétés des racines

Si a et b sont des nombres positifs, alors

PR1 $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

PR2 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

En particulier, si $a = b$ on a

PR3 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a = \left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2}$
si $a > 0$.

Il faut cependant faire très attention avec une ERREUR trop souvent commise par les étudiants :

Important

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Exemple 1.1.3

Simplifier les expressions suivantes (calculer) :

1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$
2. $\sqrt{18}$

Solution

1. $$\begin{aligned} &\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \\ &= \sqrt{2 \cdot 8} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &\sqrt{18} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \\ &= 3 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Challenge

Simplifier les expressions suivantes sans l'aide de la calculatrice.

1. $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$
2. $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$
3. $\sqrt{12}$
4. $\dfrac{\sqrt{80} \cdot \sqrt{12}}{\left(\sqrt{16}\right)^2}$

Exemple 1.1.4

Calculer $\sqrt{32} + \sqrt{50}$ sans l'aide de la calculatrice.

Solution

$$\begin{aligned} \sqrt{32} + \sqrt{5} &= \sqrt{2 \cdot 16} + \sqrt{2 \cdot 25} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{16} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} \qquad \textbf{(PR1)} \\ &= 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \\ &= 9\sqrt{2} \qquad \textbf{(similaire à } 2x + 3x = 5x\textbf{)} \end{aligned}$$

Challenge

Simplifier, sans l'aide de la calculatrice

1. $\sqrt{75} + \sqrt{108}$
2. $\sqrt{80} - \sqrt{20}$
3. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{216}$

Exemple 1.1.5

Simplifier, sans l'aide de la calculatrice, l'expression $\left(3+5\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right)$

Solution

$$\left(3+5\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right) \quad \textbf{(appliquer la double distributivité)}$$
$$= 12-3\sqrt{2}+20\sqrt{2}-10 \quad \textbf{(car } 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=10\textbf{)}$$
$$=2+17\sqrt{2}$$

Challenge

Simplifier sans l'aide de la calculatrice.

1. $(7+2\sqrt{3})(5-\sqrt{3})$
2. $(4-3\sqrt{2})^2$
3. $(3+2\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})$
4. $(3\sqrt{6}+4\sqrt{2})^2$

Identités remarquables utiles

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

Définition 1.1.1 : Quantité conjuguée

La **quantité conjuguée** est une expression obtenue à partir de la somme ou de la différence de termes comportant des racines carrées en changeant la somme en différence ou vice-versa.

Par exemple $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ sont des expressions conjuguées.

Généralement, si p, q et a sont des nombres rationnels et que $a>0$, alors le produit de deux expression **conjugueés** est un nombre rationnel.

Propriété 1.1.6

Le produit de deux irrationnels conjugués, $p+q\sqrt{a}$ et de $p-q\sqrt{a}$, est un nombre rationnel.

Pour trouver le produit de deux conjugués, on utilise l'identité remarquable suivante

$$(x+y)(x-y) = x^2-y^2$$

Challenge

Est-ce que le produit suivant est donne un nombre rationnel (on suppose p, q et a comme ci-dessus) ?

$$(q\sqrt{a}+p)(q\sqrt{a}-p)$$

1.1.5 Rationnaliser un dénominateur

$\alpha\beta$
L'utilité première du **conjugué** est de permettre la rationnalisation du dénominateur d'une écriture fractionnaire. Pour faciliter les calculs, on préfère "ôter" les racines des dénominateurs. Cela permet, entre autres, de calculer des dénominateurs communs et d'untiliser les propriétés des nombres entiers, comme par exemple le fait d'être multiple entier d'un nombre, crières de divisibilité etc.

Le prodécé qui permet d'éliminer les racines des dénominateurs s'appelle la rationnalisation du dénominateur.

Exemple 1.1.6

Rationnaliser le dénominateur des expressions suivantes

1. $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$
2. $\dfrac{7}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Solution

1.
$$\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{2}} &= \frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} && \textbf{(Multiplier par } 1\textbf{)}\\ &= \frac{6\sqrt{2}}{2} && \textbf{(car } \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\textbf{)}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\frac{7}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} &= \frac{7}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} && \textbf{(Utilisation du conjugué)}\\ &= \frac{7(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} && \textbf{(utiliser } (x+y)(x-y)=x^2-y^2\textbf{)}\\ &= \frac{14-7\sqrt{3}}{4-3}\\ &= 14-7\sqrt{3}\end{aligned}$$

Challenge

1. Sans utiliser votre calculatrice, simplifier les expressions suivantes
   (a) $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$
   (b) $\dfrac{22}{4+\sqrt{5}}$
   (c) $\dfrac{5}{2\sqrt{6}-3}$
   (d) $\dfrac{5}{4-3\sqrt{3}}+\dfrac{7}{3\sqrt{3}+4}$
2. Écrire $(4-\sqrt{6})^2-\dfrac{6}{3-\sqrt{6}}$ sous la forme $a+b\sqrt{6}$, où a et b sont des nombres entiers.
3. Sachant que $\sqrt{h+k\sqrt{5}}=\dfrac{4}{(3-\sqrt{5})^2}$, où h et k sont des nombres rationnels, trouver la valeurs de h et de k.

Exemple 1.1.7

Sachant que la solution de l'équation $x\sqrt{12} = x\sqrt{7} + \sqrt{3}$ est de la forme $\dfrac{p+\sqrt{q}}{5}$, trouver la valeur de p et de q (sans l'aide de la calculatrice).

Solution

$$\begin{aligned}
x\sqrt{12} &= x\sqrt{7} + \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow x\sqrt{12} - x\sqrt{7} &= \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow x(\sqrt{12} - \sqrt{7}) &= \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{12}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}+\sqrt{7}} && \textbf{(rationnalisation)} \\
&= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}+\sqrt{3}\sqrt{7}}{(\sqrt{12})^2-(\sqrt{7})^2} && \textbf{(identité remarquable)} \\
&= \frac{\sqrt{36}+\sqrt{21}}{12-7} \\
&= \frac{6+\sqrt{21}}{5}
\end{aligned}$$

En comparant avec $\dfrac{p+\sqrt{q}}{5}$, on trouve que $p = 6$ et $q = 21$.

Challenge

La solution de l'équation $x\sqrt{8} = x\sqrt{6} + \sqrt{2}$ est $p + \sqrt{q}$. Sans l'aide de la calculatrice, trouver la valeur de p et q.

Exemple 1.1.8

L'aire d'un triangle est de $(3-\sqrt{2})$ cm^2. Si la longueur de sa base est $(\sqrt{2}-1)$ cm, trouver sa hauteur sous la forme $(a+b\sqrt{2})$ cm, où a et b sont des nombres entiers.

Solution
On commence par relire l'énoncé.
Puis on pose h : la hauteur du triangle, c'est notre inconnue.
Puis on se souviens de la formule de l'aire d'un triangle :

$$\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur}$$

et on exploite les informations de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
3-\sqrt{2} &= \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot h \\
\Leftrightarrow 6-2\sqrt{2} &= (\sqrt{2}-1)\cdot h \\
\Leftrightarrow h &= \frac{6-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{6-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\
&= \frac{6\sqrt{2}+6-2\sqrt{2}\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2} \\
&= \frac{6\sqrt{2}+6-4-2\sqrt{2}}{2-1} \\
&= 2+4\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Donc, la hauteur du triangle est $(2+4\sqrt{2})$ cm. Et ainsi $a=2$ et $b=4$.

Challenge

1. L'aire d'un rectangle est $(7-\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2$. Sachant qu'il a une longueur de $(5+\sqrt{3})$ cm, trouver la largeur du rectangle sous la forme $(a+b\sqrt{3})$ cm, où a et b sont des nombres entiers.
2. Un parallélépipède rectangle a une base carrée. La longueur des côtés de ce carré est $(2+\sqrt{3})$ cm et le volume du parallélépipède rectangle est de $(15+6\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^3$. Trouver la hauteur de ce volume sous la forme $(p+q\sqrt{3})$ cm, où p et q sont des nombres entiers.

Exemple 1.1.9

Résoudre l'équation $\sqrt{x^2+3}=2x$.

Solution

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+3} = 2x \\
&\Leftrightarrow x^2+3 = (2x)^2 \qquad \text{(élevé au carré des deux côtés)} \\
&\Leftrightarrow x^2+3 = 4x^2 \\
&\Leftrightarrow x^2-4x^2 = -3 \\
&\Leftrightarrow -3x^2 = -3 \\
&\Leftrightarrow 3x^2 = 3 \\
&\Leftrightarrow x^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \\
&\Leftrightarrow x = \pm 1 \\
&\Rightarrow S = \{1\}
\end{aligned}
$$

Puisqu'il s'agit de l'égalité d'une racine carrée (positive) et du produit $2x$, il faut exclure le -1. En effet, **la valeur d'une racine carré est toujours un nombre POSITIF**.

Important

Il faut vérifier les solutions obtenues soit en raisonnant, comme on vient de le faire, soit en substituant la valeur obtenue dans l'équation de départ et comparer le résultat du membre de gauche à celui du membre de droite.

Challenge

Résoudre les équations suivantes

1. $\sqrt{40-x^2} = 3x$
2. $\sqrt{3-4x} = 2x$
3. $\sqrt{3x-6} - 3\sqrt{x-4} = 0$

1.1.6 Exercices

1004. Simplifier l'écriture des expressions suivantes, sans l'aide de la calculatrice.

(a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$

(b) $\dfrac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}}$

(c) $\sqrt{63}$

(d) $\dfrac{\sqrt{75} \cdot \sqrt{72}}{\sqrt{24}}$

1005. Simplifier l'écriture des expressions suivantes, sans l'aide de la calculatrice.

(a) $\sqrt{112} + \sqrt{28}$

(b) $\sqrt{48} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$

(c) $\sqrt{240} - \sqrt{12} \cdot \sqrt{45}$

(d) $\dfrac{\sqrt{245} - \sqrt{20}}{\sqrt{500}}$

1006. Simplifier l'écriture des expressions suivantes, sans l'aide de la calculatrice.

(a) $(5 + \sqrt{2})(6 - 3\sqrt{2})$

(b) $(3 + 2\sqrt{6})^2$

(c) $(9 - 2\sqrt{5})(9 + 2\sqrt{5})$

(d) $(2\sqrt{7} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{7} - 3\sqrt{5})$

1007. Rationnaliser le dénominateur de chaque expression.

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

(b) $\dfrac{4}{3\sqrt{8}}$

(c) $\dfrac{7}{2 + \sqrt{3}}$

(d) $\dfrac{4}{8 - 2\sqrt{6}}$

1008. *Simplifier l'écriture des expressions suivantes, sans l'aide de la calculatrice.

(a) $\dfrac{5}{4\sqrt{3} - 2}$

(b) $\dfrac{4}{2\sqrt{6} + 7}$

(c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5} + 8}$

(d) $\dfrac{8}{2\sqrt{5} + 3} - \dfrac{4}{2\sqrt{5} - 3}$

1009. *L'aire d'un rectangle est de $\sqrt{24}\,\text{cm}^2$. Sachant que sa largeur est de $(3-\sqrt{6})$ cm, trouver sa longueur sous la forme $(a + b\sqrt{6})$ où a et b sont des nombres entiers.

1010. *Sans utiliser votre calculatrice, simplifier les expressions suivantes.

(a) $\dfrac{3}{\sqrt{8}} + \dfrac{5}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{32}}{3}$

(b) $\dfrac{4}{\sqrt{27}} - \dfrac{\sqrt{18}}{4} + \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{4}{\sqrt{12}} + \dfrac{\sqrt{27}}{3}\right)$

(d) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{\sqrt{8}} - \dfrac{\sqrt{128}}{3}\right)$

1011. *Sachant que $h = 3 + \sqrt{2}$, exprimer l'expression $\dfrac{h^2 + 1}{h - 2}$ sous la forme $p + q\sqrt{2}$, où p et q sont des nombres entiers.

1012. *Résoudre les équations suivantes.

(a) $\sqrt{11x^2 + 45} = 4x$

(b) $\sqrt{3x + 2} = 3x$

(c) $\sqrt{2x - 3} - 5\sqrt{x + 2} = 0$

1013. **Rationnaliser le dénominateur de chaque expression.

(a) $\dfrac{13}{\left(\sqrt{3}+4\right)^2}$

(b) $\dfrac{3}{\left(\sqrt{2}+6\right)^2}+\dfrac{5}{\left(\sqrt{2}-6\right)^2}$

(c) $\dfrac{3\sqrt{2}-6}{6+3\sqrt{2}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{48}-\sqrt{50}}{\sqrt{27}-\sqrt{8}}$

1014. **Si $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $b=\dfrac{1+a}{1-a}$, simplifier les expressions suivantes.

(a) b

(b) $b-\dfrac{1}{b}$

1015. **La solution de $x\sqrt{7}=x\sqrt{2}+\sqrt{32}$ est $\dfrac{a+b\sqrt{14}}{5}$. Sans utiliser la calculatrice, trouver la valeur des entiers a et b.

1016. **Un cylindre a un volume de $(6+2\sqrt{3})\cdot\pi\,\text{cm}^3$ et dont la base a un rayon de $(1+\sqrt{3})$ cm. Trouver la hauteur sous la forme $(a+b\sqrt{3})$ cm, où a et b sont des nombres entiers.

1017. **Un étudiant résout une équation du second degré à coefficients rationnels et trouve que les solutions sont $2-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$. Expliquer pourquoi sa solution n'est pas la bonne.

1.2 Logarithmes

1.2.1 Pourquoi étudier les logarithmes ?

Nous avons étudié plus haut la manière de résoudre des équations exponentielles. Pour ce faire nous devions écrire les deux membres de l'équation dans la même base, et grâce à une propriété des fonctions exponentielles conclure :

$$\begin{aligned} 10^x &= 100 \\ \Leftrightarrow 10^x &= 10^2 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Cependant, cette méthode n'est pas générale. Il arrive parfois que l'on ne puisse pas écrire les deux membres de l'équation avec la même base. Par exemple, comment résoudre l'équation ci-dessous ?

$$10^x = 50$$

puisque $10^1 = 10$ et $10^2 = 100$, le x de $10^x = 50$ doit être compris entre 1 et 2.

On sait donc que $1 < x < 2$. Mais comment trouver la bonne valeur de x ?

Soit $x = \log_{10}(50)$, qui se lit "x égal, logue en base dix de cinquante", où "logue" est le diminutif de Logarithme. Pour l'heure vous devez savoir que c'est une fonction présente sur votre calculatrice, à l'instar de la fonction $\sqrt{}$.

Si vous utilisez votre calculatrice pour calculer x, vous trouverez la valeur de l'exposant de 10 qui donne 50. Essayez !

$$x = 1.698970004336018804786261105275\ldots$$

Le résultat d'un logarithme est presque tout le temps un nombre irrationnel.

Pour la petite histoire, le mathématicien John Napier (1550-1617) a inventé les logarithmes pour trouver justement la valeurs des exposants des puissances. Le but premier de la fonction logarithme est de trouver la valeur de ces exposants, lorsqu'ils sont inconnus. De cette manière il pouvait multiplier de très grands nombres, générés par l'observation des astres (distances, vitesses, etc.).

Vous venez d'avoir un aperçu d'une correspondance très importante : c'est que

$$10^x = 50 \qquad \text{peut être écrite comme} \qquad x = \log_{10}(50)$$

1.2.2 Conversion exponentiel ⟷ logarithme

Dans ce qui suit nous allons voir comment passer d'une forme d'écriture d'équation exponentielle à sa forme logarithmique **équivalente**. Pour ce faire nous allons utiliser la propriété fondamentale suivante :

Propriété 1.2.1 : Propriété fondamentale

Soit $a \neq 0$ et $a > 0$ un nombre réel, alors

$$\boldsymbol{\log_a(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = y}$$

où a est une **base** et x un **exposant**.

Exemple 1.2.1

Transformer $10^x = 70$ dans sa forme logarithmique.

Solution

Étape 1 identifier la base : ici 10

Étape 2 identifier l'exposant : ici x (mais cela peut être une expression plus compliqueé)

Étape 3 dans sa forme logarighmique, l'exposant est tout seul d'un côté du signe $=$. Tandis que la base devient la base du logarithme, et s'écrit en bas à droite du mot log. Puis vient le nombre, ou le reste qui figure comme argument de la fonction logarithme.

Réponse on a donc

$$x = \log_{10}(70)$$

Challenge

Convertir les expressions suivantes en forme logarithmique.

1. $1000 = 10^3$
2. $4^x = 10$
3. $80 = 10^x$
4. $a^k = 2$

Exemple 1.2.2

Écrire $x = \log_2(3)$ sous forme exponentielle.

Solution

Étape 1 identifier la base : ici 2

Étape 2 identifier l'exposant : ici x

Étape 3 dans sa forme exponentielle, on écrit un logarithme en commençant par la base suivie de l'exposant d'un côté du signe $=$. Puis, de l'autre côté le reste de l'expression.

Réponse on a donc

$$2^x = 3$$

Challenge

1. Écrire les logarithmes suivants sous forme exponentielle.

   (a) $x = \log_8(5)$

   (b) $\log_3(x) = \frac{1}{7}$

   (c) $-2 = \log_4(\frac{1}{16})$

   (d) $x = \log_a(y)$

2. Si $\log_a = x$, $\log_{81}(b) = y$ et $\frac{a}{b} = 3^c$, écrire c en fonction de x et de y.

1.2.3 Conditions de définition d'un logarithme

Nous savons déjà qu'un logarithme se compose du nom « log », d'un nombre appelé la **base** et d'une valeur, appelée l'**argument**, qui est la valeur passée à la fonction logarithme (comme 4 dans $\sqrt{4}$, où 4 est l'argument passé à la fonction "racine carrée").

Quelles sont alors les conditions qui font que $x = \log_a(y)$ soit défini ?

Puisque $x = \log_a(y)$ est équivalent à $a^x = y$, les conditions qui font que l'exponentielle $a^x = y$ soit définie, seront les mêmes pour que le logarithme $x = \log_a(y)$ soit défini. En effet les conditions portent sur les valeurs que peut prendre a, mais aussi y. Les deux expressions utilisent les mêmes lettres (!).

Sujet de recherche

Conditions pour qu'un logarithme soit défini

1. Dans l'expression $y = a^x$, pensez-vous que a puisse être un nombre positif, négatif ou 0 ? La base a peut-elle être égale à 1 ? (Considérer ce qu'il se passe si l'exposant x est également négatif, 0 ou $\frac{1}{2}$)
2. Pour $y = a^x$, peut y être positif, négatif ou 0 lorsque $a > 0$?
3. Comme il y a équivalence entre les deux formes (dans $x = \log_a(y)$), peut-on prendre le logarithme de 0 ou le logarithme d'un nombre négatif ?

Donc, la conclusion de votre recherche est que, pour que

$$x = \log_a(y)$$

soit défini,

$a >$ _______ et $a \neq$ _______ et $y >$ _______

1.2.4 Logarithme en base 10

Les logarithmes en base 10, sont aussi appelés, logarithmes communs et se trouvent dans toutes les calculatrices scientifiques, soit sous la touche notée $\lg x$, $\log x$ ou encore LOG. Ce sont tous des logarithmes en base 10.

Exemple 1.2.3

Avec votre calculatrice, trouver le logarithme de 7 (en base 10).

Solution

Suivant le modèle de votre calculatrice, la séquence des touches à appuyer sera différente. Cependant le résultat est

$$\log_{10}(7) = 0{,}845$$

arrondi aux trois premières décimales, c'est-à-dire au millième.

Challenge

Utiliser une calculatrice pour calculer

1. lg(3)
2. lg(1)
3. $\lg(\frac{1}{1000})$
4. log(123 456)

1.2.5 Logarithme en base *e*

Il existe un logarithme qui a une place toute particulière en sciences : le logarithme en base *e*, noté ln

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

La base de ce logarithme est un nombre irrationnel, comme la constante π. Nous savons que cette constante π vaut (très) approximativement 3,142.

De son côté le nombre *e* vaut (très) approximativement 2,718. Et comme π, il s'agit d'une constante.

L'importance de la constante *e* est donnée par le fait qu'on la retrouve dans beaucoup de domaines différents au moment de faire des calculs. Découverte par le mathématicien Jacob Bernoulli (1654-1705), mais baptisé de sa lettre *e* par le fameux mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783).

Exemple 1.2.4

À l'aide de votre calculatrice, chercher la valeur de e^2.

Solution

Selon votre calculatrice, les touches et la séquence de touches à utiliser peut varier. Cependant vous devez obtenir

$$e^2 \approx 7{,}39$$

Challenge

Utiliser votre calculatrice pour donner les valeurs suivantes

1. e^3
2. e^0
3. $e^{\frac{1}{2}}$
4. e^{-5}

Recherche

1. Est-ce que la valeur de e^x peut être 0, ou un nombre négatif ?
2. Quelle allure peut avoir le graphique de cette fonction ?
3. Grâce à vos réponses, essayez de donner l'ensemble image de la fonction, c'est-à-dire quels sont toutes les valeurs produites par la fonction $f(x) = e^x$

1.2.6 Le logarithme naturel

Avec la constante e comme base, nous pouvons construire un logarithme.
Ce logarithme, noté $\ln(x)$ ou encore $\log_e(x)$ est nommé **logarithme Népérien** (d'après son inventeur, John Napier (1550-1617)) ou encore **logarithme naturel**.

Comme les autres fonctions vues dans ce chapitre, les calculatrices scientifiques ont aussi une fonction spéciale pour cette fonction. On peut trouver les noms suivants : ln, LN ou encore $\log_e$.

Comme pour les logarithmes de base 10 nous avons

$$\boxed{\ln(x) = \log_e(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x}$$

1.2.7 Équations logarithmiques

Voici des exemples d'équations logarithmiques simples.

Exemple 1.2.5

Résoudre les équations suivantes

1. $\ln(2x) = 3$
2. $\log_a(16) = 2$

Solution

1.

$$\begin{aligned} &\ln(2x) = 3 \\ \Leftrightarrow\ &2x = e^3 && \text{(passge à la forme exponentielle)} \\ \Leftrightarrow\ &x = \frac{e^3}{2} \\ &\approx 10{,}0 && \text{(arrondi au dixième)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\log_a(16) = 2 \\ \Leftrightarrow\ &16 = a^2 && \text{(passge à la forme exponentielle)} \\ \Leftrightarrow\ &a = \pm 4 && \text{(D'après ce qu'on a vu, le domaine de définition de la fonction exponentielle implique que la solution est positive.)} \\ \Rightarrow\ &a = 4 \end{aligned}$$

Challenge

Résoudre les équations suivantes.

1. $\ln(3x) = 7$
2. $\log_a(36) = 2$
3. $\log_z(2 - z) = 2$

Discussion

Que pensez-vous ?

1. de la valeur de $\log_a(1)$? Cette valeur est-elle constante quelque soit la valeur de la base a ? (expliquez)
2. du résultat de $\log_a(a)$?

Donc, de manière générale nous pouvons écrire les deux propriétés suivantes sur les logarithmes

Propriété 1.2.2 : Propriétés sur les logarithmes

PL 1 $\log_a(1) = 0$

PL 2 $\log_a(a) = 1$

En particulier, si $a = e$ nous avons

$$\boxed{\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1}$$

Challenge

Sans l'aide de la calculatrice, simplifier les expressions suivantes.

1. $\log_2(1) + 3 \cdot \log_4(4)$
2. $5(\log_a(a))^7 - 8 \cdot \ln(1) + 9 \cdot \ln(e)$

1.2.8 Exercices

1018. Passez de la forme exponentielle à la forme logarithmique

(a) $10^x = 40$
(b) $10 = 5^x$
(c) $4 = 16^{\frac{1}{2}}$
(d) $x = a^y$

1019. Passez de la forme logarithmique à la forme exponentielle

(a) $x = \log_2(7)$
(b) $\log_4(x) = \dfrac{1}{5}$
(c) $-3 = \log_3(\dfrac{1}{27})$
(d) $\log_{0,25}(k) = n$

1020. À l'aide de votre calculatrice, évaluer les expressions suivantes

(a) $\lg(\pi)$
(b) $\log(100)$
(c) e^4
(d) $e^{\frac{1}{3}}$
(e) $\log(10)$
(f) $\log(4{,}38 \cdot 10^9)$
(g) e^{-1}
(h) $e^{-2{,}25}$

1021. Sans l'aide de votre calculatrice, simplifier

(a) $\log_3(3) - 4 \cdot \log_7(1) + 2 \cdot \log(10)$
(b) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{2} + 3 \cdot \log_{0,4} \dfrac{2}{5} - 2 \cdot \ln(1)$
(c) $4(\log_b b)^{2013} + 7 \cdot \log_\pi 1 - 8 \cdot \ln e$
(d) $\dfrac{8(\log_b 1)^b - 6 \cdot \log 10}{3\,(\ln e)^2}$

1022. *Résoudre.

(a) $\ln(8x) = 5$
(b) $3\log(2y) = -6$
(c) $\ln(11) \cdot \log(1 - 2y) = 8$
(d) $\log_a(64) = 2$
(e) $\log_5(y) = -4$
(f) $\log_b(3b - 2) = 2$
(g) $\log_{2-3k}(125) = 3$
(h) $\log_y \left(\dfrac{y - y^2}{2}\right) = 3$
(i) $(\log_3 x)^2 = 4 \cdot \log_3 x$

1023. *Si l'on sait que $\log_4 x = p$ et que $\log_{\sqrt{2}} y = q$, exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de p et q.

(a) x^3y^2
(b) $\dfrac{\sqrt{x}}{y^4}$

1024. **Résoudre.

(a) $\log_3(log_2 x) = 2$
(b) $\ln(\log x) = \log 2$
(c) $\log_{\sqrt{10}}(\ln y) = 3$
(d) $\log_{\sqrt[3]{2}}(\log_y \dfrac{1}{64}) = 3$
(e) $\log_{3-4k} 625 = 4$
(f) $\log_{27} 3^{2-5z} = z^2$

1.2.9 Formule de changement de base

Nous commençons par une petite activité.

Recherche

Quelle valeur pensez-vous que donne $\log 20 + \log 30$? Est-ce que c'est égal à $\log 5$ ou à $\log 600$?

Pour répondre à cette question, répondons aux deux tâches ci-dessous.

1. Compléter le tableau ci-dessous en vous aidant de votre calculatrice, arrondir au millième.

x	y	$x+y$	xy	$\log x$	$\log y$	$\log x + \log y$	$\log(x+y)$	$\log(xy)$
20	30							
50	40							
2	7							
10	100							

2. Comparer les trois dernières colonnes du tableau ci-dessus. Qu'est-ce que vous remarquez ?

Ceci est la **règle du logarithme d'un produit**

En général, cette règle du logarithme d'un produit est valable dans n'importe quelle base :

Propriété 1.2.3 : Logarithme d'un produit

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

si $x, y, a > 0, a \neq 1$.

Exemple 1.2.6

Simplifier l'expression suivante : $\log 33 + \log 61$, sans utiliser votre calculatrice.

Solution

$$\log 33 + \log 61 = \log(33 \cdot 61) \qquad \textbf{(règle du logarithe des produits)}$$
$$= \log(2\ 013)$$

Challenge

Simplifier les quatre expressions suivantes.

1. $\log 2 + \log 3$
2. $\log 20 + \log 20$
3. $\log 5 + \log \frac{1}{2}$
4. $\log m + \log n$

Important : À NE PAS REPRODUIRE

Vous ne pouvez additionner QUE des logarithmes de même base. Les deux lignes suivantes sont des INEGALITES :

$$\log_a(x+y) \neq (\log_a x)(\log_a y)$$
$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$

Challenge

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\log_2 3 + \log_2 7$
2. $\ln(2p) + \ln q + \ln(5q)$
3. $\log_5 8 + \log_6 9$
4. $\log_4 0{,}5 + \log_4 8$

Pouvez-vous montrer l'égalité $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$ en utilisant la **propriété fondamentale** et les **propriétés des puissances** ?

Comme pour la somme, dont le logarithme la transforme en produit, la soustraction se voit transformée en quotient par la fonction logarithme. Il en résulte aussi une règle :

Propriété 1.2.4 : Logarithme d'un quotient

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

si $x, y, a > 0, a \neq 1$.

Important : À NE PAS REPRODUIRE

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a(x-y)$$

$$\log_a x - \log_a y \neq \log_a(x-y)$$

Exemple 1.2.7

Simplifier l'expression suivante : $\log_3 18 - \log_3 6$.

Solution

$$\begin{aligned}\log_3 18 - \log_3 6 &= \log_3 \frac{18}{16} \qquad \textbf{(logarithme d'un quotient)}\\ &= \log_3 3\\ &= 1 \qquad \textbf{(PL 2)}\end{aligned}$$

Challenge

Simplifier, si possible, chacune des expressions suivantes :

1. $\log_5 20 - \log_5 4$
2. $\log_a(8m) - \log_a(2m) + \log_a 9$
3. $\log_7 3 - \log 6$

Considérons maintenant l'expression suivante : $\log 2^3$

Avec votre calculatrice, comparer le résultat de $\log 2^3$ et $(\log 2)^3$.

Ces deux résultats sont-ils égaux ?

Algébriquement, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\log 2^3 &= \log(2\cdot 2\cdot 2)\\ &= \log 2 + \log 2 + \log 2 \qquad \textbf{(logarithme d'un produit)}\\ &= 3\cdot \log 2\end{aligned}$$

Essayez avec $\log_2 7^4$. Qulle est votre résultat ? Pouvez-vous utiliser votre calculatrice ?

Il en résulte la propriété suivante :

Propriété 1.2.5 : Logarithme d'une puissance

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

si $x, a > 0, a \neq 1$

Important : À NE PAS REPRODUIRE

Le logarithme d'une puissance n'est pas égal à une puissance de logarithme :

$$\log_a x^r \neq (\log_a x)^r$$

Exemple 1.2.8

Simplifier l'expression $\log_4 64$

Solution

$$\begin{aligned} \log_4 64 &= \log_4 4^3 \\ &= 3 \cdot \log_4 4 \qquad \textbf{(logarithme d'une puissance)} \\ &= 3 \qquad \textbf{(PL 2)} \end{aligned}$$

Challenge

Évaluer les expressions suivantes sans l'aide de votre calculatrice.

1. $\log_3 81$
2. $5 \cdot \log_3 9 - 2 \cdot \log_3 27$
3. $\log_5 \sqrt{3} + \log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{6}$
4. $2\log(3 \cdot \frac{1}{3}) + 3\log 0{,}4 - 2\log \frac{2}{75}$

Concernant l'exemple suivant, lorque nous avons besoin d'un logarithme qui n'est pas présent dans l'expression proposée, on peut utiliser la propriété **PL 2** : $\log_a a = 1$ pour le faire "apparaître". C'est la même chose que lorsque l'on utilise l'égalité $1 = a^0$, quand on a besoin d'un puissance de base a, par exemple une puissance de 17 : $1 = 17^0$, ou encore un puissance de 2 : $1 = 2^0$.

Exemple 1.2.9

Exprimer $4 + \log_3 5$ comme un seul terme impliquant des logarithmes.

Solution

On va appliquer des transformations d'écriture en utilisant les propriétés vues précédemment.

$$\begin{aligned}
4 + \log_3 5 &= 4 \cdot \log_3 3 + \log_3 5 \\
&= \log_3 3^4 + \log_3 5 \qquad \textbf{(logarithme d'une puissance)} \\
&= \log_3 81 + \log_3 5 \\
&= \log_3(81 \cdot 5) \qquad \textbf{(logarithme d'un produit)} \\
&= \log_3 405
\end{aligned}$$

Il en résulte la propriété suivante :

Propriété 1.2.6

$$\boldsymbol{n \quad = \quad n \cdot \log_a a}$$

si $a > 0, a \neq 1$.

Challenge

Exprimer sous la forme d'un seul logarithme.

1. $3 + \log_2 7$
2. $2 - \ln \dfrac{1}{3}$
3. $\log_a a^4 + \log_3 0{,}2$

Nous sommes prêts à établir la **formule de changement de base**.
Comment peut-on calculer le logarithme de base 4 avec notre calculatrice ?

Notre calculatrice n'ayant pas une telle fonction, nous devons utiliser la formule qui suit.

Pour la comprendre, prenons $\log_4 64$. Nous savons que $64 = 4^3$ et donc nous pouvons écrire $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3 \cdot \log_4 4 = 3$, sans faire appel à la calculatrice.

Qu'en est-il de $\log_4 24$? Et bien, 24 n'est pas une puissance de 4, et nous ne pouvons donc pas utiliser la même méthode.

Écrivons $x = \log_4 24$. En utilisant la **propriété fondamentale** nous obtenons

$$x = \log_4 24 \quad \Longleftrightarrow \quad 4^x = 24$$

sur cette dernière expression nous pouvons prendre, par exemple, le logarithme népérien ($\ln(x)$) étant donné que des deux côtés du signe égalité nous avons des nombres qui sont strictements plus grands que zéro. Il vient

$$
\begin{aligned}
\ln 4^x &= \ln 24 \\
\Leftrightarrow x \ln 4 &= \ln 24 \qquad \text{(logarithme d'une puissance)} \\
\Leftrightarrow x &= \frac{\ln 24}{\ln 4} \qquad \text{(on peut utiliser la calculatrice)} \\
\Leftrightarrow x &= 2{,}29 \qquad \text{(arrondi au centième)}
\end{aligned}
$$

Que se passe-t-il si, au lieu de prendre le logarithme népérien, on prend le logarithme en base 10 (aussi présent sur notre calculatrice) ?

Il en résulte la formule de changement de base suivante :

Propriété 1.2.7 : Formule de changement de base

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

si $a, b > 0$, $a \neq 1$.

Exemple 1.2.10

Donner la valeur numérique de $\log_5 0{,}2$

Solution

$$
\begin{aligned}
\log_5 0{,}2 &= \frac{\ln 0{,}2}{\ln 5} \qquad \text{(on peut aussi prendre } \log x\text{)} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Challenge

Avec votre calculatrice, donner la valeur numérique des expressions suivantes.

1. $\log_2 7{,}16$
2. $\log_4 e$
3. $\log_8 \frac{3}{2}$
4. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$

Cette formule de changement de base est valable pour toute base > 0 et différente de 1 (pourquoi ?) :

Propriété 1.2.8 : Formule de changement de base (forme générale)

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

si $a, b, c > 0; a, c \neq 1.$

Dans le cas où c égal à b nous avons le cas particulier suivant :

Important : Cas particulier

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a)}$$

si $a, b > 0; a, b \neq 1.$

Exemple 1.2.11

Trouver la valeur numérique de $\log_3(16) \cdot \log_4(10) \cdot \log(3)$, sans utiliser votre calculatrice.

Solution

$$\begin{aligned}
\log_3(16) \cdot \log_4(10) \log(3) &= \frac{\log(16)}{\log(3)} \cdot \frac{\log(10)}{\log(4)} \cdot \log(3) \\
&= \log(4^2) \cdot \frac{1}{\log(4)} \qquad (\log 10 = 1) \\
&= 2 \cdot \log 4 \cdot \frac{1}{\log 4} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Challenge

Trouver la valeur de chacune des expressions suivantes, sans utiliser votre calculatrice.

1. $\log_5(8) \cdot \log_2(10) \log(5)$
2. $\dfrac{\log_7 4 \cdot \log_2 9}{\log_{49} \sqrt{3}}$
3. $\log_5(3) \cdot 4 \cdot \log_3(5)$
4. $\ln(8) \cdot 5 \cdot \log_2(e)$
5. $\log_2(10) \cdot \log(\sqrt[3]{2})$
6. $\log_a(9) \cdot \log_{27}(a)$

Exemple 1.2.12

Trouver la valeur de $\log_2(45)$, sachant qu $\log_2(3) \approx 1{,}585$ et que $\log_2(5) \approx 2{,}322$. Donner votre résultat avec 3 chiffres significatifs.

(Solution)

$$\begin{aligned}
\log_2(45) &= \log_2(9 \cdot 5) \\
&= \log_2(9) + \log_2(5) && \textbf{(logarithme d'un produit)} \\
&= \log_2(3^2) + \log_2(5) \\
&= 2 \cdot \log_2 3 + \log_2 5 && \textbf{(logarithme d'une puissance)} \\
&\approx 2 \cdot 1{,}585 + 2{,}322 \\
&\approx 5{,}49
\end{aligned}$$

Challenge

1. Sachant que $\log_2 3 \approx 1{,}585$ et que $\log_2 5 \approx 2{,}322$, évaluer les expressions suivantes et donner votre résultat avec 3 chiffres significatifs.

   (a) $\log_2(375)$ (b) $\log_2(0{,}12)$ (c) $\log_2 \dfrac{\sqrt{125}}{9}$ (d) $\dfrac{\log_2 \sqrt{125}}{\log_2 9}$

2. Sachant que $\ln 2 = n$, exprimer chaque expressions ci-dessous en fonction de n.

   (a) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{10}$ (b) $\log_8 5$ (c) $\log \dfrac{1}{5}$ (d) $\log \sqrt{20}$

1.2.10 Exercices

1025. Sans utiliser la calculatrice, simplifier, si possible, les expressions suivantes.

(a) $\log 6 + \log 5$
(b) $\log 0{,}125 + \log 8$
(c) $\log 5 + \log 2$
(d) $\log(p^2) + \log\left(\frac{1}{2}\cdot q\right) + \log\left(\frac{1}{pq}\right)$
(e) $\log_3 5 + \log_3 8$
(f) $\ln 9 + \ln 2$
(g) $\log 6 + \ln 7$
(h) $\log_a(2a) + \log_a 0{,}125 + \log_a \frac{4}{a}$

1026. Si possible, simplifier chaque expression, sans l'aide de votre calculatrice.

(a) $\log_7(30) - \log_7 6$
(b) $\log_2 8 - \ln 9$
(c) $\log 7 + \log 0{,}2 - \log(3k)$
(d) $\log_b(3\cdot\sqrt{b}) + \log_b(b\cdot\sqrt{b}) - \log_b(3\cdot b)$

1027. Sans l'aide d'une calculatrice, trouver la valeur numérique de chacune des expressions suivantes.

(a) $\log_5(125)$
(b) $\log \frac{1}{100}$
(c) $\log_{64} 8$
(d) $\ln\sqrt{e}$

1028. Avec votre calculatrice, donner la valeur numérique de chaque expression.

(a) $\log_3 \pi$
(b) $\log_7(1+\frac{2}{3})$
(c) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{10}$
(d) $\log_{\sqrt{2}} 3^{\frac{5}{4}}$

1029. *Simplifier les expressions suivantes sans l'aide d'une calculatrice.

(a) $4\cdot\log_3(25) - \log_3(125)$
(b) $3\cdot\ln(216) + 4\cdot\ln\frac{1}{16}$
(c) $\log_6\sqrt{3} + \log_6\sqrt{24} - \log_6\sqrt{2}$
(d) $4\cdot\log_2(0{,}6) + 2\cdot\log_2\frac{5}{2} - 2\cdot\log_2 0{,}15$

1030. *Sachant que $\log_3 2 \approx 0{,}6309$ et que $\log_3 5 \approx 1{,}465$, évaluer les expressions suivantes et donner votre résultat avec 3 chiffres significatifs.

(a) $\log_3(80)$
(b) $\log_3 1{,}28$
(c) $\log_3 \frac{\sqrt{10}}{125}$
(d) $\frac{\log_3 0{,}125}{\log_3\sqrt{125}}$

1031. *Sachant que $\log_a y = k$, écrivez les expressions suivantes en fonction de k.

(a) $(\log_a y)^3$
(b) $\log_a y^3$
(c) $\log_a(ay)^2$
(d) $\log_a \frac{\sqrt{y}}{a^2}$

1032. *Évaluer les expressions suivante sans l'aide d'une calculatrice.

(a) $\log_7(81)\cdot\log_3(100)\cdot\log(49)$

(b) $\dfrac{\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{5}\right)\cdot\log_e(16)}{\ln\sqrt[3]{25}}$

(c) $\log_{11}(9)\cdot 3\cdot\log_9(11)$

(d) $\ln(27)\cdot 4\cdot\log_3(e)$

(e) $\log_7(10)\cdot\log\sqrt[3]{49}$

(f) $\log_x(16)\cdot\log_{64}x$

1033. *Sachant que $\log_a y = m$, écrivez les expressions suivantes en fonction de m.

(a) $\log_y a$

(b) $\log_{\sqrt{y}} a$

(c) $\log_{\frac{1}{a}} y$

(d) $\log_{\sqrt{a}}\dfrac{1}{y}$

1034. *Sachant que $\log_{12} 3 = p$, écrivez les expressions suivantes en fonction de p.

(a) $\log_{\sqrt{12}}\dfrac{1}{9}$

(b) $\log_{\frac{1}{12}} 27$

(c) $\log_{12}\dfrac{1}{4}$

(d) $\log_{144} 4$

1035. *Si $\log_6 2 = a$ et si $\log_5 3 = b$, écrivez $\log_5 2$ en fonction de a et de b.

1036. **Répondez aux deux points suivants

(a) Si $a, b, x, y > 0$ et $a, b \neq 1$, montrer que l'égalité suivante est vraie

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$$

(b) Donc, sans l'aide d'une calculatrice, et sachant que $\log(2) \approx 0{,}301$, trouver la valeur numérique de

$$\frac{\log_3 2}{\log_3 10}$$

1.3 Équations exponentielles et logarithmiques

Nous commençons par l'étude des équations logarithmiques.

Dans les sections précédentes, nous avons appris à manipuler les expressions contenant des logarithmes et à résoudre des équations simples, n'impliquant que des logarithmes (ou des exponentielles).

Nous verrons à présent comment résoudre des équations impliquant plusieurs logarithmes.

On distingue deux grand types d'équations logarithmiques : celles contenant des logarithmes de même base, et celles contenant des logarithemes de base différente.

Il y a donc naturellement, deux grandes méthodes pour les résoudre. La **méthode 1** utilise l'égalité des des logarithmes de même base (voir ci-après) et la **méthode 2**, applique une transformation en exponentielles des expressions de l'équation, avant de commencer à résoudre.

Propriété 1.3.1 : Équivalence de logarithmes de même base

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{Si} & \log_a p & = & \log_a q \\ \textbf{alors} & p & = & q \end{array}$$

où $a, p, q > 0; a \neq 1$.

Exemple 1.3.1

Résoudre l'équation $\log_3(1-x)+\log_3(x+5)=\log_3(3x+11)$.

Solution

$$\begin{aligned}
&\log_3(1-x)+\log_3(x+5)=\log_3(3x+11)\\
&\Leftrightarrow \log_3((1-x)(x+5))=\log_3(3x+11) && \textbf{(logarithme d'un produit)}\\
&\Leftrightarrow (1-x)(x+5)=3x+11 && \textbf{(méthode 1 : équivalence de logarithemes de même base)}\\
&\Leftrightarrow x+5-x^2-5x=3x+11\\
&\Leftrightarrow x^2+7x+6=0\\
&\Leftrightarrow (x+1)(x+6)=0\\
&\Leftrightarrow x=\begin{cases}-1\\-6\end{cases}
\end{aligned}$$

Vérifier que les solutions sont dans les domaines de définition respectifs des fonctions logarithmiques d'origine.

Ici, si $x=-6$, on a $\log_3(x+5)=\log_3(-1)$ qui n'est pas défini. De même pour $\log_3(3x+11)=\log_3(-7)$.

Par contre si $x=-1$, alors **nous n'avons pas de valeur négative dans les arguments**.

Donc, la réponse est $x=-1$.

1.3.1 Domaine de définition

Pour s'assurer que les résultats d'une équation sont acceptables il faut qu'ils appartiennent au **domaine de définition** de la fonction, ici des logarithmes.

Définition 1.3.1 : Domaine de définition d'un fonction

L'**domaine de définition** (ou ensemble de définition) $\boldsymbol{D_f}$ d'une fonction f, dont l'ensemble de départ est noté A et l'ensemble d'arrivée B

$$\begin{aligned} f \ : \ & A \to B \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

est l'ensemble des éléments de A qui possèdent une image dans B par la fonction f.
Autrement dit c'est l'ensemble des éléments x de A pour lesquels $f(x)$ existe

$$\boldsymbol{D_f} = \{x \in A \mid f(x) \text{ existe dans } B\}$$

En concret, il faut, pour les fonctions logarithmiques, respecter la condition suivante pour TOUS les éléments de l'ensemble de DÉPART

$$x \in \,]0; +\infty[$$

Autrement dit, l'ensemble de définition des fonctions logarithmiques est l'ensemble des valeurs positives :

$$D_{\text{fonction logarithme}} = \,]0; +\infty[$$

Il est donc important de **résoudre des inéquations** afin de trouver le domaine de définition des fonctions logarithmiques en jeu dans les équations.
Rechercher le domaine de définition d'une fonction logarithmique, peut être fait avant ou après de résoudre l'équation logarithmique.
Une solution pour l'équation est validée si elle appartient ou domaine de définition de chaque fonction logarithmique en jeu.

Challenge

Résoudre l'équation $\log_2(x + 11) + \log_2(x + 4) = \log_2(5x + 23)$.

Pour le challenge ci-dessus, on commencera par résoudre les 3 inéquations suivantes : $x + 11 > 0$, $x + 4 > 0$ et $5x + 23 > 0$.

La résolution d'une inéquation se fait comme une équation : on doit isoler l'inconnue d'un côté du signe d'inégalité. À la différence près que

Lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre **négatif**,
le signe d'inégalité **change de sens**.

De plus l'ensemble solution est donné sous forme d'intervalle.

Exemple 1.3.2

Résoudre l'équation suivante $2\log x - \log(x+20) = 1$.

Solution On constate que $2\log x = \log(x^2)$. Vous pourriez penser que comme x^2 est toujours positif pour tout x, que cette partie de l'équation peut accpter toutes les valeurs pour x. Seulement, c'est sur $\log(x)$ qu'il faut travailler. Donc les valeurs de x doivent toutes être positives, même si $\log(x+20)$ nous dit le contraire.

En effet, le domaine de définition de cette fonction ($\log(x+20)$) est donné par la solution de inéquation $x+20 > 0$, ce qui donne $x > -20$ et le domaine est :

$$D_{\log(x+20)} =]-20;+\infty[$$

Pour la première, $\log x$ on a le domaine de base de toute fonction logarithmique :

$$D_{\log x} =]0;+\infty[$$

Et c'est donc l'**intersection** des deux ensembles qui donne le domaine de validité des solutions de l'équation logarithmique de départ, à savoir

$$D_{\log(x+20)\cap\log x} =]0;+\infty[$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation logarithmique :

$$\begin{array}{lrcll}
 & 2\cdot\log x - \log(x+20) & = & 1 & \\
\Leftrightarrow & \log(x^2) - \log(x+20) & = & 1 & \textbf{(logarithme d'un puissance)} \\
\Leftrightarrow & \log\left(\dfrac{x^2}{x+20}\right) & = & 1 & \textbf{logarithem d'un quotient} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{x^2}{x+20} & = & 10^1 & \textbf{(méthode 2 : passage à l'exponentielle)} \\
\Leftrightarrow & x^2 & = & 10\cdot(x+20) & \\
\Leftrightarrow & x^2 - 10x - 200 & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & (x+10)(x-20) & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & x & = & \begin{cases} -10 \\ 20 \end{cases} &
\end{array}$$

Et donc, la seule valeur qui appartient au domaine de définition de l'équation est $x = 20$, qui est la solution.

Challenge

Résoudre

1. $2\log(x) = \log(2x+30)+1$
2. $\log_4(y^2) = \log_4(y+2) - 3$

Exemple 1.3.3

Résoudre $\log_2 x = 25 \cdot \log_x 2$

Solution

$$\begin{aligned} \log_2 x &= 25 \cdot \log_x 2 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= 25 \cdot \frac{\log_2(2)}{\log_2 x} \qquad \textbf{(transforme } \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}\textbf{)} \end{aligned}$$

Posons $y = \log_2 x$. Alors

$$\begin{aligned} y &= \frac{25}{y} \\ \Leftrightarrow y^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow y &= \pm 5 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= \pm 5 \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} 2^5 = 32 \\ 2^{-5} = \dfrac{1}{32} \end{cases} \end{aligned}$$

Challenge

1. Résoudre chacune des équations ci-après
   (a) $\log_4 x = 9 \cdot \log_4 4$
   (b) $\log_3 y + \log_9 y = 7$
   (c) $\log_{100}\left(\frac{4x-3}{3}\right) = \log(2x) + \log\frac{1}{3}$
2. Si les deux solutions de l'équation $3x^2 - 2x + 4 = 0$ sont $\log r$ et $\log s$, donner la valeur numérique de chacune des expressions ci-dessous
   (a) $\log(r) + \log(s)$
   (b) $\log(r) \cdot \log(s)$
   (c) $\frac{1}{\log(r)} + \frac{1}{\log(s)}$
   (d) $\log_r(s) + \log_s(r)$

1.3.2 Résoudre une équation exponentielle par logarithmes

Nous avons vu que pour résoudre les équations exponentielles, une méthode consistait à écrire les deux membres de l'équation avec la même base. Puis, un résultat non démontré, nous permet de dire que dans ce cas les exposants sont égaux.

Mais lorsque les deux membres ne peuvent pas être écrits comme exposants de même base, on doit utiliser les logarithmes.

Exemple 1.3.4

Résoudre les deux équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{3x-1} = 8$
2. $5^{y+2} = 7$

Solution

1. On prend le logarithme (dans n'importe quelle base) des deux côtés de l'égalité

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{3x-1} &= 8 \\ 3x - 1 &= \ln(8) \qquad \textbf{(puisque la base est } \mathrm{e}\textbf{, on prend } \ln(x)\textbf{)} \\ x &= \frac{1+\ln(8)}{3} \\ x &\approx 1{,}03 \end{aligned}$$

2. Comme ci-dessus

$$\begin{aligned} 5^{y+2} &= 7 \\ \ln(5^{y+2}) &= \ln(7) \\ (y+2)\cdot\ln(5) &= \ln(7) \\ y+2 &= \frac{\ln(7)}{\ln(5)} \\ y &= \frac{\ln(7)}{\ln(5)} - 2 \\ y &\approx -0{,}791 \end{aligned}$$

Challenge

Résoudre comme ci-dessus.

1. $\mathrm{e}^{2x+3} = 6$
2. $10^{1-y} = 14$
3. $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 6 = 0$
4. $2^{x}(3^{2x}) = 5\cdot(7^{x})$

1.3.3 Exercices

1037. Résoudre chacune des équations ci-après.

(a) $e^{5-4x} = 3$

(b) $10^{y+1} = e^2 \cdot \ln e$

(c) $4^{x^2-8} = 7$

(d) $e^{2x} - 3 \cdot e^x - 4 = 0$

1038. Résoudre chacune des équations ci-après.

(a) $\log_7(x+2) + \log_7(x+4) = \log_7(2x+5)$

(b) $\ln(3+8z-z^2) - \ln(z-2) = \ln(z+1)$

(c) $\log(2y+6) - \log(y-3) = 3 \cdot \log(2)$

1039. *Résoudre chacune des équations ci-après.

(a) $2 \cdot \log(x) - \log(x+60) = 1$

(b) $\ln(y^2) = \ln(y+3) + 2$

(c) $2 + \log_5(3k-1) = \log_5(3k+11)$

(d) $\log_x(32) = 3 - \log_x(2)$

1040. *Résoudre $\ln(x-4) = \ln(x) - 4$, en donnant votre réponse en fonction de la constante e.

1041. *Résoudre chacune des équations suivantes.

(a) $\log_3(x) = 64 \cdot \log_x(3)$

(b) $\log_4(y) + \log_{16}(y) = 8$

(c) $4 \cdot \log_5(z) - \log_z(5) = 3$

(d) $3 \cdot \ln(p) - 2 \cdot \log_p(e) = 4$

1042. *Résoudre les équations ci-dessous.

(a) $3^x(5^{2x}) = 6(2^x)$

(b) $5^{y^2-2y} = e$

(c) $3(100^x) - 4(10^x) = 5$

(d) $3(2^x) - 2^{-x} = 8$

(e) $16^k + 4^{k-1} = \dfrac{1}{4^3}$

(f) $2(7^y) = 3 - 5\sqrt{7^y}$

1043. *Sachant que $7^x = 2$ et que $2^y = 7$, trouver la valeur numérique de $x \cdot y$, sans l'aide d'une calculatrice.

1044. **Si $a, x > 0$ et $a \neq 1$, montrer que $a^{\log_a x} = x$.

1045. **Sachant que $2 \cdot \log_2(y) = 4 + \log_2 \sqrt{x}$, exprimer y en fonction de x.

2.1 Fonction exponentielle (15)

2.1.1 Généralités

Jusqu'à présent nous avons considéré les fonctions de la forme

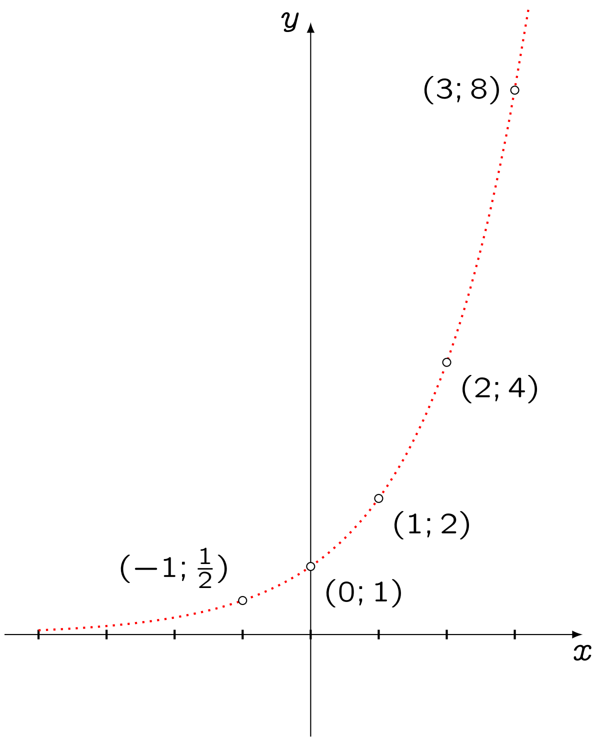
$$\text{variable}^{\text{constante}}$$

Par exemple : x^2 ou encore $2x+1$, etc. Désormais nous allons considérer les fonctions **exponentielles** dont la variable se trouve à l'exposant et qui sont de la forme

$$\textbf{constante}^{\textbf{variable}}$$

et nous aurons par exemple : $\mathbf{2^{x}}$, $\mathbf{(0{,}5)^{3x}}$, etc.

Considérons la fonction $f(x) = 2^x$, dont le graphique est



Ici x prend ses valeurs dans les nombres rationnels (ceux qui peuvent s'écrire comme le rapport de deux entiers, des fractions). Il faut se souvenir que si $x = \frac{m}{n}$ où m, n sont des entiers avec $n > 0$, alors

$$2^x = 2^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{2}\right)^m$$

On peut voir sur ce tableau, quelques points du graphique

x	-10	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
$y = 2^x$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	1024

D'autres valeurs pour y peuvent être calculées avec une calculatrice, comme par exemple $2^{1/3}$, $2^{-9/7}$ et $2^{5{,}143}$.

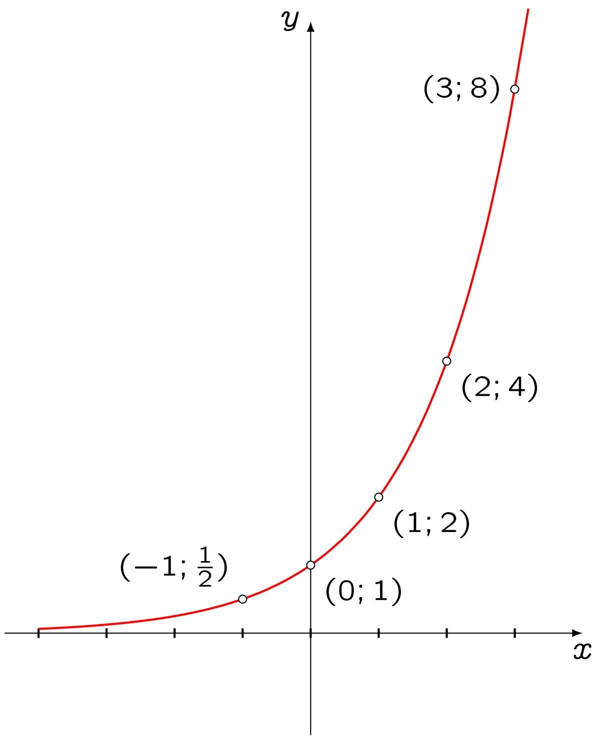
On peut remarquer que si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ et on dit alors que la fonction f est une **fonction croissante**.

Cependant, notre graphique comporte des "trous" puisque nous ne pouvons pas considérer tous les nombres réels. En effet, on rappelle que les puissances ne sont, jusqu'à présent, définies que pour des exposants rationnels (des fractions) et non pour des nombres irrationnels, tels que les constantes π ou encore les racines carrées $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore une racine septième : $\sqrt[7]{11}$.

Pour "étendre" nos fonctions expoenentielles à tous les nombres réels, nous devons faire appel à des notions qui dépassent le cadre de ce cours. C'est pour cela que nous allons admettre sans démonstration que l'on est capable d'approcher, d'aussi près que l'on souhaite, le nombre, par exemple, 2^π, par une succession de nombres rationnels de plus en plus proches de π :

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ 2^{3,14159},\ 2^{3,141592},\ 2^{3,1415926},\ \ldots$$

Ainsi, on peut approcher toute puissance de 2 et dire que $f(x) = 2^x$ est définie pour tout nombre réel x. Le résultat est un graphique dans lequel la courbe est "pleine" et sans "trous" :



La graphe ci-contre représente donc la fonction

$$f(x) = 2^x$$

qui peut aussi s'écrire

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \mapsto 2^x$$

et qui est appelée **fonction exponentielle** de base 2. On remarque au passage que l'ensemble **image** de la fonction f est l'ensemble des réels positifs non nuls : $\mathbb{R}_+^*$

2.1.2 Définitions, théorèmes et exemples

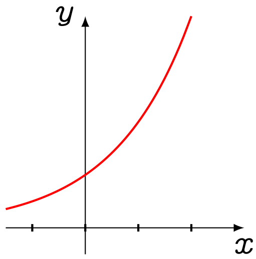
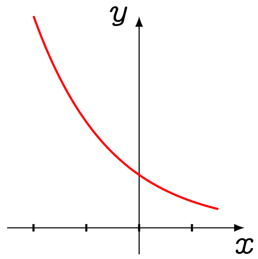
Définition 2.1.1 : Fonction exponentielle

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, et a un nombre réel non nul, positif et différent de 1, alors

$$f(x) = a^x$$

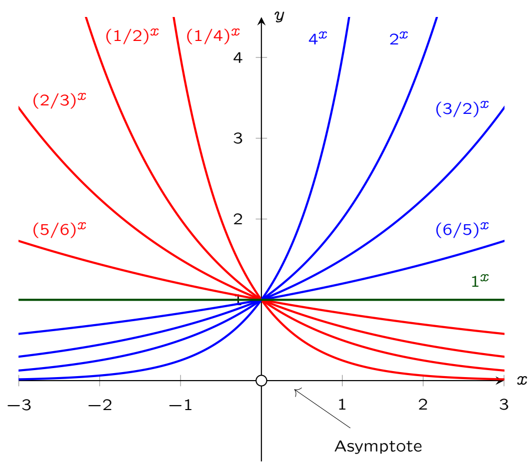
est appelée **fonction exponentielle** de **base** a.

Selon la valeur de la base a, nous auront un graphique différent, l'un sera une fonction dite **croissante** et l'autre dite **décroissante**. Le tableau suivant résume ceci.

Terminologie	Définition	Graphe de f pour $a > 1$ "croissante"	Graphe de f pour $0 < a < 1$ "décroissante"
Fonction exponentielle f de base a	$f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$		

Comme le montre le graphique ci-après, toutes les courbes exponentielles passent par le point de coordonnée $(0; 1)$, car $a^0 = 1$, quel que soit le réel a vérifiant $0 < a$ et $a \neq 1$.

Ces courbes sont croissantes lorsque $a > 1$, et décroissantes quand a est compris entre 0 et 1.
Notons que dans le cas particulier où $a = 1$, le graphique est une droite horizontale, $y = 1$, car $1^x = 1$ quel que soit x.



Les courbes représentatives de a^x et $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont les images l'une de l'autre par une symétrie orthogonale d'axe Oy, car $(1/a)^x = \left(a^{-1}\right)^x = a^{-x}$.

Définition 2.1.2 : Droite asymptote

Une **droite asymptote** à une courbe est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers zéro.

L'axe des x est, quel que soit $a \neq 1$, une **asymptote horizontale** à ces courbes. Plus précisément, quand $a > 1$, les valeurs de a^x tendent vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$ et quand $a > 1$, les valeurs de a^x tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On se souviens que l'équation $f(x) = a^x$ s'écrit aussi $y = a^x$, et donc dans ce cas $y = 0$ est l'équation de l'asymptote des fonction exponentielles, et comme l'équation de la droite horizontale représentant l'axe des abscisses, l'axe des x, s'écrit $y = 0$, cela justifie pleinement le début de ce paragraphe.

Ainsi toutes les courbes représentatives des fonctions exponentielles se trouvent dans le demi-plan supérieur, car $a^x > 0$ quel que soit x et quel que soit $a > 0$.

Les règles des puissances pour des exposants rationnels, sont encore valables pour des exposants réels quelconques. Pour rappel

Propriété 2.1.1 : Règles de calcul avec les exposants

Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y} \\ a^x \div a^y &= a^{x-y} \\ \left(a^x\right)^y &= a^{x \cdot y} \\ (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x \\ \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \end{aligned}$$

Plus haut nous avons vu que l'équivalence suivante était vraie

$$\begin{gathered} a^X = a^Y \\ \Leftrightarrow X = Y \end{gathered}$$

L'argument qui justifie ceci est que les **fonctions exponentielles sont *bijectives***.

Définition 2.1.3 : Fonction bijective

Une fonction f de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$ est dite **bijective** si tout y de B possède une unique préimage x dans A.

Théorème 2.1.1 : Les fonctions exponentielles sont bijectives

La fonction exponentielle f de base a donnée par

$$f(x) = a^x \quad \text{pour} \quad 0 < a < 1 \quad \text{ou} \quad a > 1$$

est bijective. Ainsi, les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées pour tous les nombres réels x_1 et x_2 :

1. Si $x_1 \neq x_2$, alors $a^{x_1} \neq a^{x_2}$
2. Si $a^{x_1} = a^{x_2}$, alors $x_1 = x_2$

Exemple 2.1.1

Résoudre l'équation $3^{5x-8} = 9^{x+2}$

Solution

$$\begin{aligned}
3^{5x-8} &= 9^{x+2} \\
3^{5x-8} &= (3^2)^{x+2} \quad \text{exprimer les deux membres avec la même base} \\
3^{5x-8} &= 3^{2x+4} \quad \text{propriété des puissances } \textbf{PP3} \\
5x-8 &= 2x+4 \quad \text{les fonctions exponentielles sont bijectives} \\
3x &= 12 \quad \text{division par 3} \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Challenge

Résoudre les équations suivantes

1. $2^{x/2} = 32^{1-x}$
2. $5 \cdot 25^x = \dfrac{1}{125}$

Exemple 2.1.2

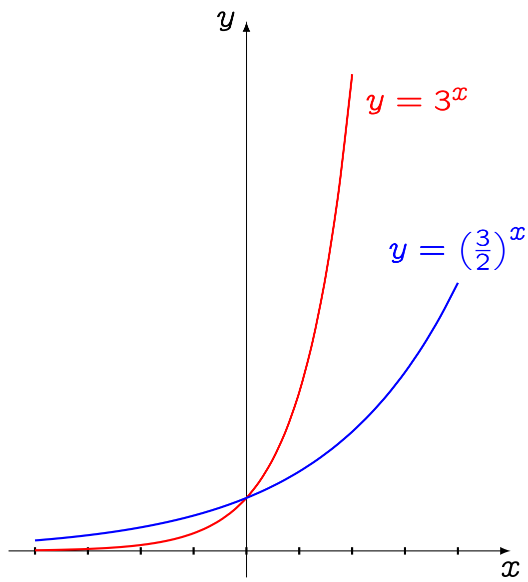
Si $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ et $g(x) = 3^x$, représenter les graphiques de f et de g dans le même système de coordonnées.

Solution

Puisque les deux bases, $\frac{3}{2}$ et 3, sont plus grandes que 1, **chaque graphique monte** lorsque x croît.

Pour tracer, nous construisons un tableau de valeurs, avec les couples $(x; y)$, constituant les coordonnées des points des graphes.

x	$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	$y = 3^x$
-2	$\frac{4}{9} \approx 0{,}4$	$\frac{1}{9} \approx 0{,}1$
-1	$\frac{2}{3} \approx 0{,}7$	$\frac{1}{3} \approx 0{,}3$
0	1	1
1	$\frac{3}{2}$	3
2	$\frac{9}{4} \approx 2{,}3$	9
3	$\frac{27}{8} \approx 3{,}4$	27
4	$\frac{81}{16} \approx 5{,}1$	81



On remarque que si $1 < a < b$, alors pour des valeurs positives de x on a

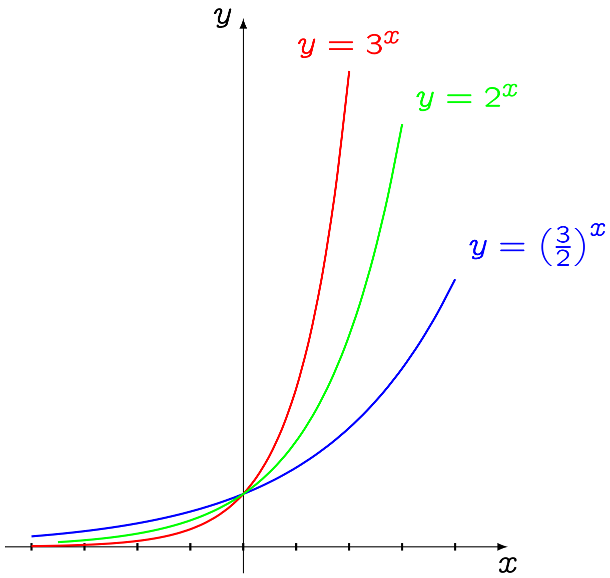
$$a^x < b^x$$

et à l'opposé

$$b^x < a^x$$

pour des valeurs négatives de x.

Ainsi, puisque $\frac{3}{2} < 2 < 3$ on peut observer (sans même “voir” le graphique) que le graphique de $y = 2^x$ (en page 46) est situé entre les tracés des fonctions f et g ci-dessus. Si nous représentons les trois graphes sur un même système d'axes, nous pouvons constater qu'effectivement le graphe de $y = 2^x$ est bien en “sandwich” entre les deux autres tracés :



Voici encore deux exemples de tracés de fonctions exponentielles particulières.

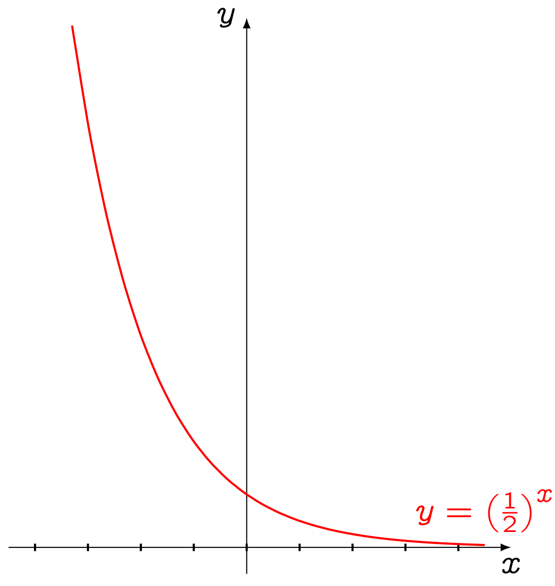
Exemple 2.1.3

Représenter graphiquement l'équation $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solution
Étant donné que la base de l'exponentielle est non nulle et inférieure à l'unité, $0 < \frac{1}{2} < 1$, le graphique descend lorsque les valeurs de x croîent.

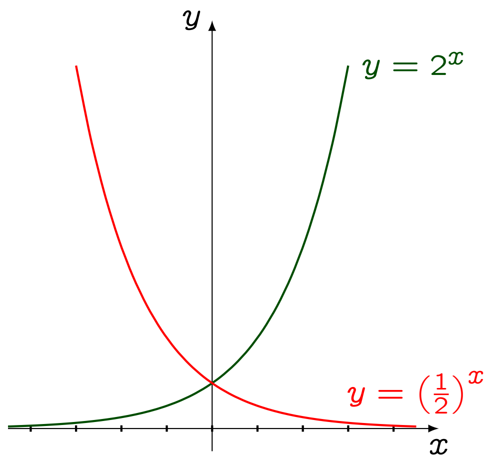
Comme d'habitude, pour tracer, nous construisons un tableau de valeurs, avec les couples $(x; y)$, constituant les coordonnées des points du graphe.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Remarquer que l'expression $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x} = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$.

Ainsi, on peut utiliser ce que tout mathématicien fait, à savoir, faire des rapprochements entre objets, chercher des similitudes, chercher de la symétrie, etc. Pour le coup, on peut voir que la seule différence entre cette équation ($y = 2^{-x}$) et l'équation de la page 46 ($y = 2^x$) est le signe "$-$" devant l'exposant x. Si nous traçons ces deux graphes sur le même système d'axes, nous verrons que l'un est le symétrique de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées (l'axe des y) :



On rencontre, dans certaines applications, des équations de la forme $y = a^w$ où w est une expression en fonction de x. Par exemple $w = x - 2$.

Exemple 2.1.4

Représenter graphiquement les deux équations suivantes

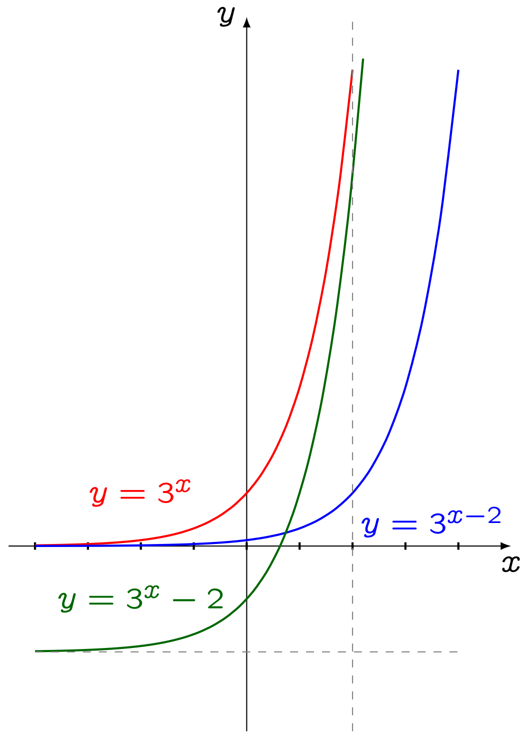
a) $y = 3^{x-2}$ b) $y = 3^x - 2$

Solution

Pour tracer la première des fonctions, nous pouvons utiliser le graphe de $y = 3^x$ tracé précédemment. On remarque que l'exposant est à chaque fois diminué de deux unités : $x - 2$. Si nous reportons cette information dans un tableau, nous aurons une **translation** vers la droite de tout le graphique.

Comme d'habitude, pour tracer, nous construisons un tableau de valeurs, avec les couples $(x; y)$, constituant les coordonnées des points du graphe.

x	$y = 3^x$	$y = 3^{x-2}$	$y = 3^x - 2$
-2	$\frac{1}{9} \approx 0{,}1$	$\frac{1}{81} \approx 0{,}012$	$\approx -1{,}89$
-1	$\frac{1}{3} \approx 0{,}3$	$\frac{1}{27} \approx 0{,}037$	$\approx -1{,}67$
0	1	$\frac{1}{9} \approx 0{,}1$	-1
1	3	$\frac{1}{3} \approx 0{,}3$	1
2	9	1	6
3	27	3	25
4	81	9	79



Pour le tracé de la deuxième équation (la dernière colonne du tableau), nous constatons qu'il suffit d'une **translation** du graphe de 3^x vers le bas. En effet, c'est la valeur de y qui, cette fois-ci, est diminuée de 2 unités.
Cette "pratique" est vraie pour tous les graphes dès lors que l'on modifie soit x soit y en lui additionnat une valeur.

2.1.3 Étude d'une fonction exponentielle

Exemple 2.1.5

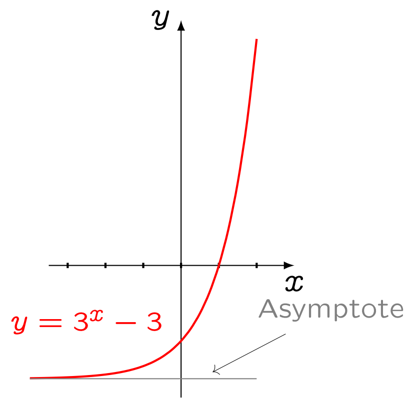
Faire l'édude de la fonction $f(x) = 3^x - 3$

Solution Première étape, la **croissance** de la fonction.

La théorie nous dit que si la base est inférieure à 1, alors le tracé est décroissant, si la base est supérieure à 1 alors le tracé est croissant. Ici

La fonction est croissante

puisque $a = 3 > 1$.



Deuxième étape l'**asymptote**. C'est la partie la plus facile. En effet, si la fonction exponentielle est de la forme $k \cdot a^x + m$, alors la **droite asymptote** s'écrira toujours $y = m$. Ici, donc

$$\textbf{Asymptote :} \quad y = -3$$

Ensuite le **domaine de définition**. Le domaine de définition d'une fonction exponentielle est le domaine de définition de l'expression figurant à l'exposant. En général il s'agit d'un polynôme du premier degré (en ce qui nous concerne). Dans ce cas tout réel fait l'affaire. Ici, donc

$$\boldsymbol{D_f} \quad : \quad \mathbb{R}$$

C'est le tour de l'**ensemble image**. Si la base de l'exponentielle est inférieur à 1 le tracé est décroissant, dans ce cas la réponse sera $]-\infty; m[$. Si au contraire la base est supérieure à 1, alors le tracé est croissant et la réponse sera $]m; +\infty[$. Ici, comme la base est 3 et $m = -3$ on a

$$\boldsymbol{I_f} \quad : \quad]-3; +\infty[$$

Après on calcule l'**ordonnée à l'origine**. On calcule $f(0)$, donc

$$\textbf{Ordonnée à l'origine :} \quad f(0) = 3^0 - 3 = 1 - 3 = \mathbf{2}$$

Enfin, les **zéros**. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 0$:

$$\begin{array}{rrcll}
 & f(x) & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & 3^x - 3 & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & 3^x & = & 3^1 & \text{les fonction exponentielles sont bijectives.} \\
\Leftrightarrow & x & = & 1 & \\
\Rightarrow & \boldsymbol{S} & = & \boldsymbol{\{1\}} &
\end{array}$$

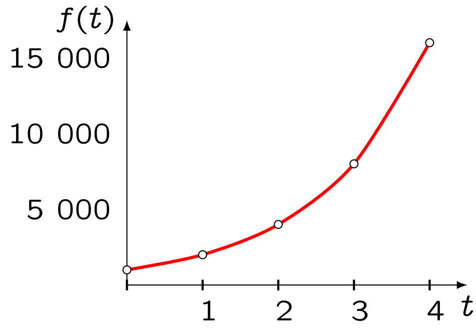
2.1.4 Application de la fonction exponentielle

Voyons maintenant trois applications de la fonction exponentielle. Il s'agit de situations soit de croissance, soit de décroissance exponentielle et sont tirées du domaine des sciences et de la finance.

Croissance bactérienne

Les fonction exponentielles peuvent être utilisées pour décrire la croissance de certaines populations. Par exemple, supposons qu'on ait observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double chaque jour. S'il y a au départ 1000 bactéries, nous obtenons le tableau suivant, où t est le temps en jours et $f(t)$ le nombre de bactéries au temps t.

t (temps en jours)	$f(t)$ (nombre de bactéries)
0	1000
1	2000
2	4000
3	8000
4	16000



Après un petit moment d'observation, on peut dire que la fonction f est

$$f(t) = 1000 \cdot 2^t$$

Par exemple nous pouvons donner une valeur quelconque à t et obtenir le nombre de bactéries qu'il y aura dans la population. Si nous voulions savoir combien de bactéries il y aura au bout de un jour et demi, soit $t = 1{,}5$, on calcule $f(\frac{3}{2})$, et on a

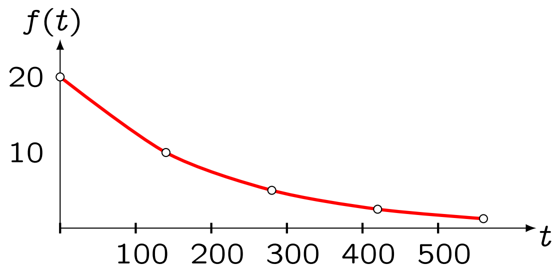
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1000 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \approx 2828$$

Décomposition radioactive

Certaines quantités physiques décroissent de manière exponentielles, c'est-à-dire que leur valeur diminue très rapidement. Dans de tels cas, si a est la base de la fonction exponentielle, alors $0 < a < 1$. L'un des exemples les plus communs de décroissance exponentielle est la décomposition d'une substance radioactive.

On appelle **demi-vie** d'un isotope (substance radioactive) le temps nécessaire pour que la moitié d'un échantillon donné se désintègre. Ainsi la demi-vie est la principale caractéristique utilisée pour distinguer une substance radioactive d'une autre. L'isotope ^{210}Po du polonium a une demi-vie d'environ 140 jours, c'est-à-dire qu'étant donné une certaine quantité de polonium 210, la moitié se désintégrera en 140 jours.
Le graphique et le tableau suivant, représentent la désintégration d'une quantité de 20 milligrammes de ^{210}Po, en décrivant les quantités rédisuelles après différents intervalles de temps :

t (temps en jours)	$f(t)$ (mg résiduels)
0	20
140	10
280	5
420	2,5
560	1,25



Il existe d'autres substances radioactives ayant des demi-vies beaucoup plus longues que le polonium 210. En particulier, les réacteurs nucléaires produisent l'isotope ^{239}Pu du plutonium, dont la demi-vie est d'environ 24000 ans. C'est pourquoi que le stockage des déchets radioactifs est un problème majeur de la société moderne.

Intérêts composés

L'intérêt composé est une bonne illustration de la croissance exponentielle. Si une somme d'argent C, le capital, est investie à un taux d'intérêt simple i, alors l'intérêt à la fin de la première période d'intérêt est le produit

$$C \cdot i$$

où i est exprimé sous forme décimale.
Par exemple, si $C = 1000$ francs et si le taux d'intérêt est de 9% par an, alors $i = 0{,}09$ et l'intérêt à la fin de la première année est de

$$1000 \cdot 0{,}09 \quad \text{francs}$$

soit 90 francs.
Si l'intérêt est réinvesti avec le capital à la fin de la période d'intérêt, alors le nouveau capital est de

$$C + C \cdot i$$

ou de manière équivalente

$$C \cdot (1 + i)$$

Notons que pour calculer le nouveau capital, nous pouvons multiplier le capital d'origine par $(1 + i)$. Dans notre exemple, le nouveau capital est

$$1000 \cdot (1{,}09)$$

c'est-à-dire 1090 francs.
Le nouveau capital étant $C \cdot (1 + i) = 1000 \cdot (1 + 0{,}09)$ si on place ce nouveau capital pendant encore une année, alors on peut le multiplier par $(1 + i)$ encore une fois. Cela nous donne la formule

$$C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$$

ce qui revient à calculer

$$C \cdot (1 + i)^2$$

Et si l'on continue à réinvestir une troisième année on aura la formule

$$C \cdot (1 + i)^3$$

Et donc un investissement de n années donnera la formule des **intérêts composés**

Formule des intérêt composés

$$C_n = C \cdot (1 + i)^n$$

où

- C : est le capital de départ,
- i : le taux d'intérêt annuel exprimé en un nombre décimal,
- n : le nombre d'années du placement et
- C_n : le capital au bout de la période de placement (les n années).

Exemple 2.1.6

Supposons que 1000 francs soient investis à un taux d'intérêt annuel de 9%, capitalisé mensuellement.
Calculer le nouveau montant du capital après 5 ans, après 10 ans et après 15 ans. Puis représenter graphiquement la croissance de ce placement.

Solution

Sans surprise, il nous faut appliquer la formule ci-dessus.
La seule difficulté est de comprendre le mot "capitalisé mensuellement". Ceci veut dire qu'à la fin de chaque mois, les intérêts sont calculés et ajoutés au capital actuel. Comme notre intérêt est annuel, et qu'il y a 12 mois en une année, nous divisons le taux donnée par 12, c'est le taux d'intérêt par mois.

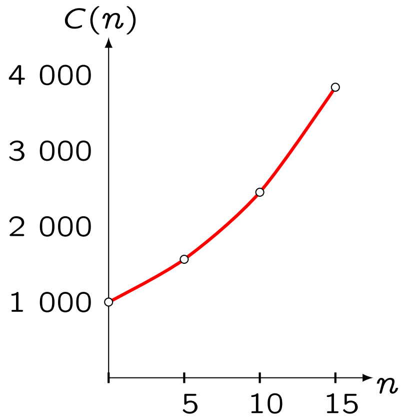
Ensuite, pour un placement sur 5 ans, nous devons modifier la formule : l'exposant n devient $12 \cdot n$, puisque l'intéret "tombe" chaque mois.

Nous avons donc

$$C_5 = 1000 \cdot (1 + \frac{0{,}09}{12})^{12 \cdot 5}$$

Pour tracer le graphe de la croissance du placement, comme d'habitude nous construisons un tableau de valeurs, avec les couples $(x; y)$, constituant les coordonnées des points du graphe.

Nombre d'années	**Montant** $C_n = C \cdot (1 + \frac{i}{12})^{12 \cdot n}$
5	$1000 \cdot (1{,}0075)^{60} = 1565{,}68$
10	$1000 \cdot (1{,}0075)^{120} = 2451{,}36$
15	$1000 \cdot (1{,}0075)^{180} = 3838{,}04$



2.1.5 Exercices

2001. Résoudre chacune des équations ci-dessous.

a) $7^{x+6} = 7^{3x-4}$ b) $6^{7-x} = 6^{2x+1}$

c) $3^{2x+3} = 3^{(x^2)}$ d) $9^{(x^2)} = 3^{3x+2}$

e) $2^{-100x} = (0{,}5)^{x-4}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} = 2$

g) $4^{x-3} = 8^{4-x}$ h) $27^{x-1} = 9^{2x-3}$

2002. Représenter graphiquement la fonction f si $a = 2$.

a) $f(x) = a^x$ b) $f(x) = -a^x$

c) $f(x) = 3a^x$ d) $f(x) = a^{x+3}$

e) $f(x) = a^x + 3$ f) $f(x) = a^{x-3}$

g) $f(x) = a^x - 3$ h) $f(x) = a^{-x}$

i) $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ j) $f(x) = a^{3-x}$

2003. Faire l'exercice 2002 avec $a = \frac{1}{2}$.

2004. Représenter graphiquement la fonction f.

a) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$ b) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$

c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ d) $f(x) = -3^x + 9$

e) $f(x) = 2^{|x|}$ f) $f(x) = 2^{-|x|}$

g) $f(x) = 3^{1-x^2}$ h) $f(x) = 2^{-(x+1)^2}$

i) $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ j) $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

2005. Une centaine d'autruches, toutes âgées d'un an, sont placées dans une réserve. Le nombre $N(t)$ d'animaux vivants après t années est donné par

$$N(t) = 100 \cdot (0{,}9)^t$$

Donner approximativement le nombre d'animaux vivants après

a) 1 an b) 5 ans c) 10 ans

2006. Le nombre de bactéries dans une culture croît de 600 à 1800 entre 7 h et 9 h du matin. En supposant que la croissance soit exponentielle, le nombre $f(t)$ de bactéries t heures après 7 h du matin est donné par $f(t) = 600 \cdot (3)^{t/2}$.

a) Donner approximativement le nombre de bactéries dans la culture à 8 h, à 10 h et à 11 h du matin.

b) Représenter le graphique de f pour $0 \leqslant t \leqslant 4$.

2007. Selon la loi du refroidissement de Newton, la vitesse à laquelle un objet se refroidit est directement proportionnelle à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant. La semelle d'un fer à repasser passe de 52°C à 38°C en 30 min dans lune pièce qui a une température constante de 24°C. Par le calcul différentiel et intégral, la température $f(t)$ de la semelle après t heures de refroidissement est donnée par

$$f(t) = 27 \cdot (2)^{-2t} + 24$$

a) En supposant que $t = 0$ corresponde à 13 h, donner au dixième de degré près la température à 14 h, 15 h 30 et à 16 h.

b) Représenter le graphique de f pour $0 \leqslant t \leqslant 4$.

2008. L'isotope radioactif ^{210}Bi du bismuth a une demi-vie de 5 jours. S'il y a 100 mg de ^{210}Bi au temps $t = 0$, alors la quantité résiduelle $f(t)$ après t jours est donnée par

$$f(t) = 100 \cdot (2)^{-t/5}$$

a) Quelle quantité de ^{210}Bi reste-t-il après 5 jours ? 10 jours ? 12,5 jours ?

b) Représenter le graphique de f pour $0 \leqslant t \leqslant 30$.

2009.

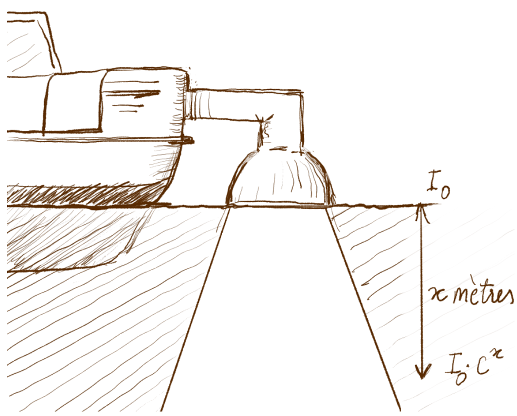
En océanographie, la détermination de la quantité de lumière à différentes profondeurs est un problème important.
La loi de Beer-Lanbert affirme que la fonction exponentielle donnée par

$$I(x) = I_0 c^x$$

modélise ce phénomène (voir figure).
Pour une certaine profondeur,

$$I(x) = 10 \cdot (0{,}4)^x$$

est la quantité de lumière (en J/m$^2 \cdot s$) à x mètres de profondeur.



a) Calculer la quantité de lumière pour une profondeur de 2 m.

b) Représenter le graphique de I pour $0 \leqslant x \leqslant 5$.

2010. La demi-vie du radium est de 1600 ans. Si la quantité initiale est q_0 milligrammes, alors la quantité résiduelle après t années est donnée par

$$q(t) = q_0 \cdot 2^{k \cdot t}$$

Calculer k.

2011. Si 10 g de sel sont ajoutés à une quantité d'eau, alors la part $q(t)$ de sel qui reste non dissoute après t minutes est donnée par

$$q(t) = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

Représenter graphiquement ce phénomène pour $0 \leqslant t \leqslant 10$.

2012. Si 1000 francs sont investis au taux de 12% par an capitalisé mensuellement, calculer le capital après

a) 1 mois

b) 6 mois

c) 1 an

d) 20 ans

2013. Si un fond d'épargne rapporte un intérêt de 10% capitalisé semestriellement, quelle somme d'argent investie produira la somme de 5000 francs après 1 an ?

2014. Si une certaine marque de voiture est vendue C francs, son prix après t années est donné par

$$V(t) = 0{,}78 \cdot C \cdot (0{,}85)^{t-1}$$

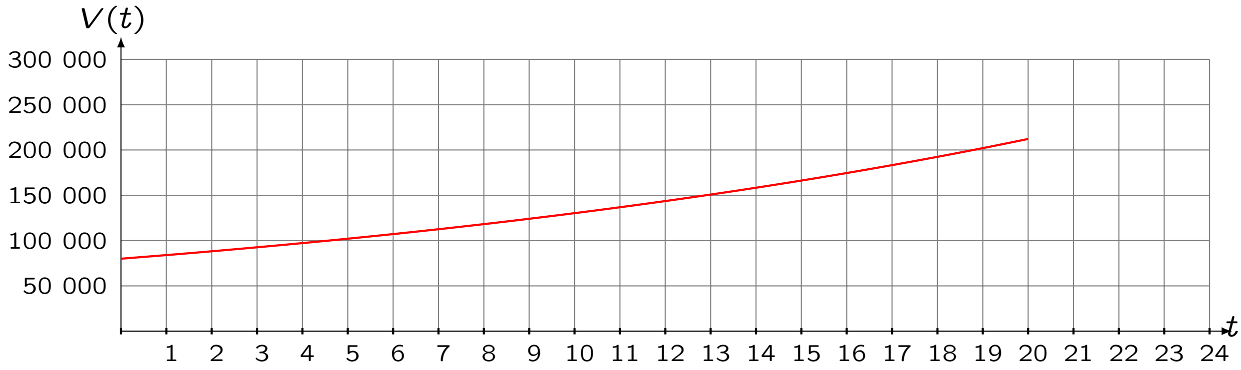
Si le prix à l'origine était de 10000 francs, calculer au franc près le prix après

a) 1 an b) 4 ans c) 7 ans

2015. Si la valeur d'un bien immobilier croît de 5% par an, la valeur V après t années d'une maison achetée P francs est donnée par

$$V(t) = P \cdot (1,05)^t$$

La figure suivante représente le graphique de l'évolution de la valeur d'une maison achetée 80000 francs en 1986. Donner la valeur de cette maison en 2010, à 1000 francs près.



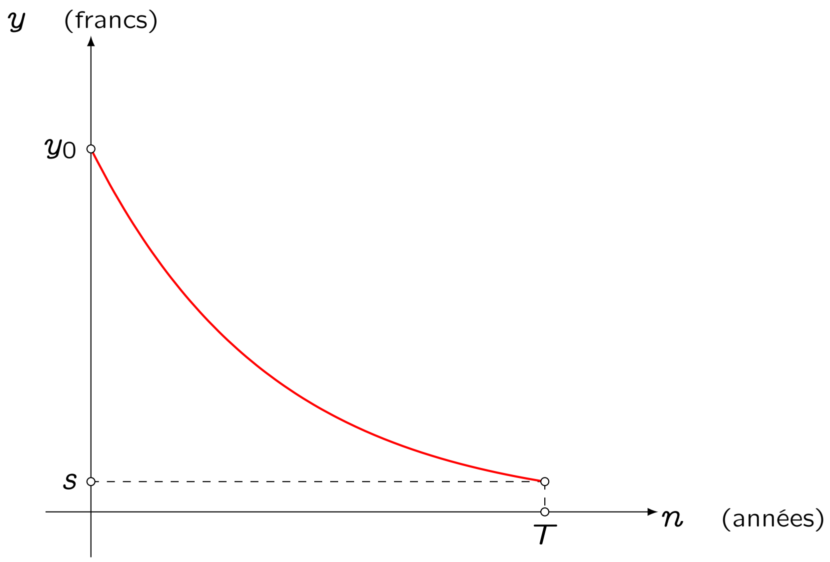
2016. L'île de Manhattan a été vendue 24 francs en 1626. À combien se monterait cette somme en 1996 si elle avait été investie 6% par an, capitalisé trimestriellement ?

2017. Un grand magasin exige de ses clients payant par carte de credit un intérêt de 18% par an, capitalisé mensuellement, sur les factures impayées. Si un client achète une télévision pour 500 francs à crédit et ne fait pas de paiement pendant une année, combien devra-t-il à la fin de l'année ?

2018. La méthode pour estimer la dévaluation (*declining balance method*) est une méthode selon laquelle le montant de la perte de valeur par année représente un poucentage fixe de la valeur actuelle de l'objet. Si y est la valeur de l'objet pour une année donnée, la perte de valeur est $a \cdot y$ pour un taux de dévaluation a, avec $0 < a < 1$, et la nouvelle valeur est $(1 - a)y$.

a) Si la valeur initiale de l'objet est y_0 montrer que la valeur après n années de dévaluation est $(1 - a)^n \cdot y_0$.

b) À la fin de T années, l'objet a une valeur de revente de s francs. Le propriétaire veut choisir un taux de dévaluation tel que la valeur de l'objet après T années soit égal à la valeur de revente (voir figure). Montrer que $a = 1 - \sqrt[T]{\frac{s}{y_0}}$.



2019. La chronologie glossienne est une méthode permettant de dater un langage, fondée sur une théorie selon laquelle, durant une longue période, les changements linguistiques prennent place à un taux constant. Supposons qu'un langage ait à l'origine N_0 mots de base et qu'au temps t, mesuré en millénaires (1 millénaire $=$ 1000 ans), le nombre $N(t)$ de mots de base qui restent dans le langage courant est donné par

$$N(t) = N_0 \cdot (0{,}805)^t$$

a) Donner approximativement le pourcentage de mots de base perdus tous les cent ans.

b) Si $N_0 = 200$, représenter le graphique de N pour $0 \leqslant t \leqslant 5$.

2.2 Fonction logarithmique (15)

Dans les sections précédentes, nous avons vu que la fonction exponentielle de base a, telle que $0 < a < 1$ et $a > 1$ de la forme

$$f(x) = a^x$$

est bijective.

De la définition même de fonction bijective, nous pouvons affirmer que cette fonction f admet une **fonction réciproque**, notée f^{-1}. Dans notre cas particulier (les fonctions expoenentielles), la fonction réciproque est la **fonction logarithme** et on a l'équivalence, déjà rencontrée précédemment

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Si f est la fonction exponentielle de base a

$$a^x$$

alors la fonction réciproque sera la fonction logarithme de base a

$$\log_a(y)$$

et on aura l'équivalence (que nous avons appelé "escargot")

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

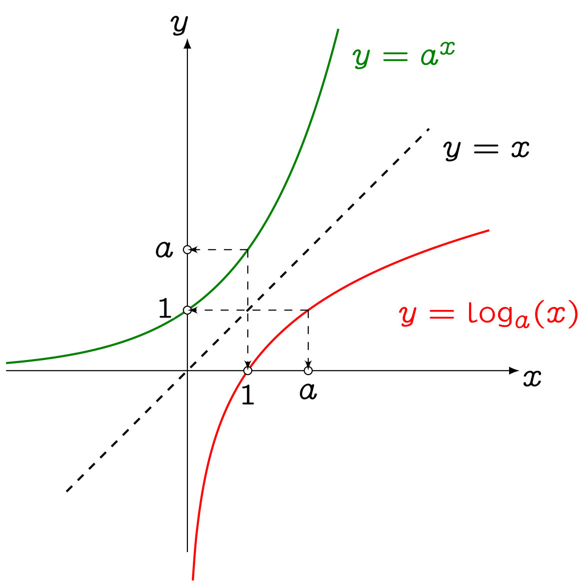
Définition 2.2.1 : Fonction logarithme

Soit a un nombre réel positif différent de 1. Le **logarithme de base a de x** est défini par

$$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

pour tout $x > 0$ et tout nombre réel y.

Comme dit plus haut, la fonction logarithme de base a est la réciproque de la fonction exponentielle de base a. En tant que fonctions réciproques, elles admettent un **axe de symétrie**, qui est une **droite** d'équation $y = x$. Noter que nous avons pour ces deux fonctions des points caractéristiques, à savoir $(1; 0)$, $(a; 1)$ pour la fonction logarithmique. Le premier donne la seule solution de l'équation $\log_a(x) = 0$, c'est à dire $x = 1$ et le second nous renseigne sur la base du logarithme. Les mêmes observations peuvent être faites sur la fonction exponentielle réciproque.



Le théorème ci-après, nous permet de justifier l'équivalence suivante lors de la résolution des équations logarithmiques

$$\log_c(A) = \log_c(B) \Longleftrightarrow A = B$$

à l'instar de ce qui est fait avec le théorème vu pour les fonctions exponentielles.

Théorème 2.2.1 : Les fonctions logarithmiques sont bijectives

La fonction logarithmique f de base a donnée par

$$f(x) = \log_a(x) \quad \text{pour} \quad 0 < a < 1 \quad \text{ou} \quad a > 1$$

est bijective. Ainsi, les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées pour tous les nombres réels x_1 et x_2 :

1. Si $x_1 \neq x_2$, alors $\log_a(x_1) \neq \log_a(x_2)$
2. Si $\log_a(x_1) = \log_a(x_2)$, alors $x_1 = x_2$

Nous allons voir comment représenter graphiquement une fonction logarithmique. Bien que c'est un travail qui peut être fait par un logiciel de dessin, nous devons savoir tracer une telle fonction dans un système d'axes.

Voici donc quelques exemples, dont le premier qui nous montre trois manières de tracer une même fonction.

2.2.1 Représentation graphique d'une fonction logarithmique

Exemple 2.2.1

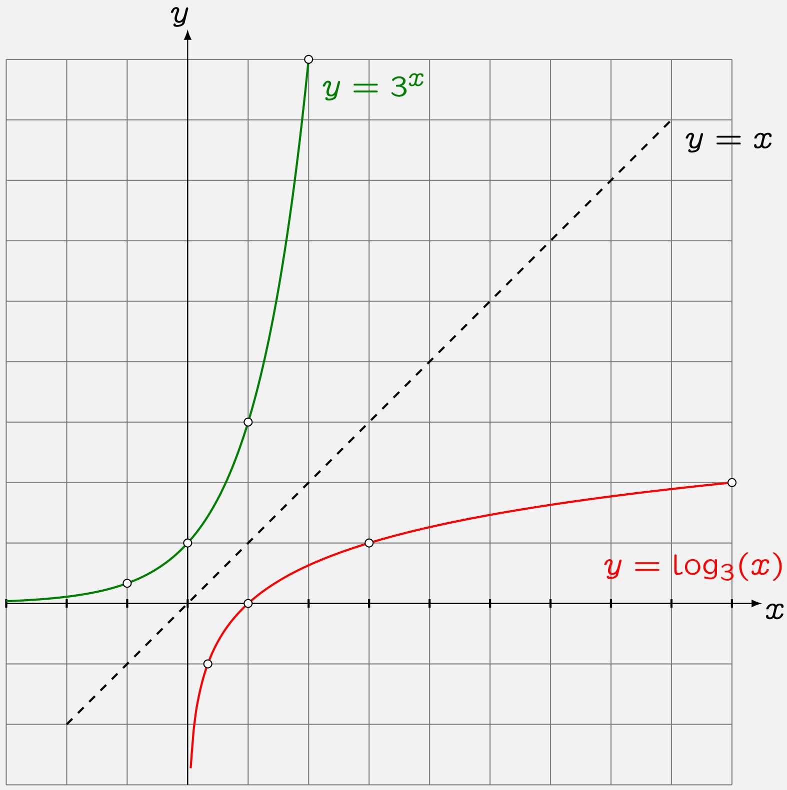
Tracer le graphique de la fonction f, si

$$f(x) = \log_3(x)$$

Solution
Nous allons voir deux manières de le faire.

Méthode 1 Puisque la fonction $\log_3(x)$ est la fonction 3^x sont réciproques l'une de l'autre, nous commençons par faire un tableau de quelques valeurs pour 3^x puis nous traçons cette exponentielle, et ensuite nous faisons une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Nous pouvons alors constater que les points $(-1; 3^{-1}), (0; 3^0), (1; 3^1)$ et $(2; 3^2)$ de la fonction $y = 3^x$ ont pour symétriques les points $(3^{-1}; 1), (3^0; 0), (3^1; 1)$ et $(3^2; 2)$ du graphique de la fonction f, c'est-à-dire de $f(x) = \log_3(x)$.



Méthode 2 Nous pouvons aussi déterminer des points du graphique de $y = \log_3(x)$ en posant $x = 3^k$, où k est un nombre réel, et appliquer ensuite la propriété des logarithmes **PL 2**, pour obtenir

$$y = \log_3(x) = \log_3(3^k) = k$$

ainsi les puissances de 3 successives nous donnent les points du graphique dans le tableau suivant

$\boldsymbol{x = 3^k}$	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3
$\boldsymbol{y = \log_3(x) = k}$	-3	-2	-1	0	1	2	3

et nous obtenons les mêmes points qu'avec la première méthode.

2.3 La réciproque d'une fonction

Disons le tout de suite : pas toutes les fonctions admettent une fonction réciproque.

En effet, il faut que la fonction dont on cherche la réciproque soit une fonction bijective. De cette manière on peut assurer que chaque image a une et une seule pré-image. De plus par définition de la notion de **fonction**, une pré-image a une et une seule image. Cette condition est nécessaire, car on voudrait étalir l'unicité : à une pré-image correspond une et une seule image. Ainsi, lorsqu'on aura une image, on est sûr de trouver *sa* pré-image. De plus si on note f^{-1} la réciproque de la fonction f on a

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Par exemple, si $f(x) = x + 1$ on peut se poser la question : "quelle fonction g est telle que $g(x + 1) = x$?". En fait, ce qu'on veut c'est

$$f(g(x + 1)) = x$$

et on voit bien que ce que la fonction g doit faire est de diminuer son argument de 1. Donc, la fonction $g(x) = x - 1$ est la réciproque de la fonction f. On écrira donc, $g = f^{-1}$. Ainsi

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

et si on a $f(2) = 3$ et $g(3) = 2$, alors

$$g(f(2)) = g(3) = 2$$

comme

$$g(f(17)) = g(18) = 17$$

puisque f ajoute 1 et g enlève 1.

Remarquer que les deux fonction sont réciproques l'une de l'autre et qu'on peut donc écrire

$$f(g(2)) = f(1) = 2$$

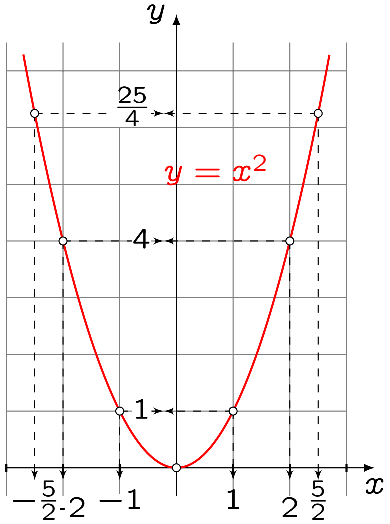
comme

$$f(g(17)) = f(16) = 17$$

Comme dit plus haut, pas toutes les fonctions ont une fonction réciproque. En voici une

$$f(x) = x^2$$

c'est aussi le cas pour toute une famille de fonctions : toutes les fonctions qui sont des puissances paires de l'argument, x^4; x^6; $\ldots x^{2n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.



En effet, la parabole ci-contre n'est pas une fonction bijective : l'image 4 a deux pré-images qui sont −2 et 2.
C'est aussi le cas pour toutes les images !

Répétons-le ici, **une fonction admet une fonction réciproque si et seulement si elle est bijective**.

Par contre si l'on restreint le domaine de définition de f, alors, sur ce nouveau domaine de définition, la fonction devient bijective et admet une fonction réciproque.

Définissons $g(x) = x^2$ sur le domaine $D_g = [0;\ \infty[$, alors cette fonction admet une réciproque notée g^{-1}.

Comment trouver g^{-1} ?

Procédé 2.3.1 : Recherche d'une réciproque

Voici les étapes à suivre pour trouver la réciproque de la fonction

$$g(x) = x^2$$

1. renommer la fonction : $g(x) = y$
2. isoler le x dans la fonction $y = x^2$

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ \Longleftrightarrow \pm\sqrt{y} &= x \end{aligned}$$

   Mais comme $D_g = [0;\ \infty[$, on doit exclure la racine négative, donc

$$\sqrt{y} = x$$

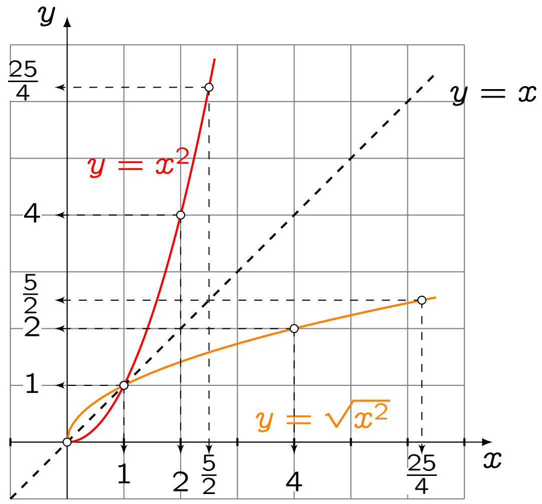
3. on échange les rôles de x et de y dans $\sqrt{y} = x$, cela donne

$$\sqrt{x} = y$$

4. puis on renomme la fonction par g^{-1}, ce qui donne la fonction réciproque cherchée

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Voici ce que donne le graphique des deux fonctions sur le même système d'axes. Notez que la droite en traitillés est toujours présente pour les fonctions réciproques. Cette droite représente l'axe de symétrie entre les deux fonctions réciproques. Autrement dit, le graphe de g est symétrique au graphe de g^{-1} par rapport à cette droite $y = x$.



Challenge

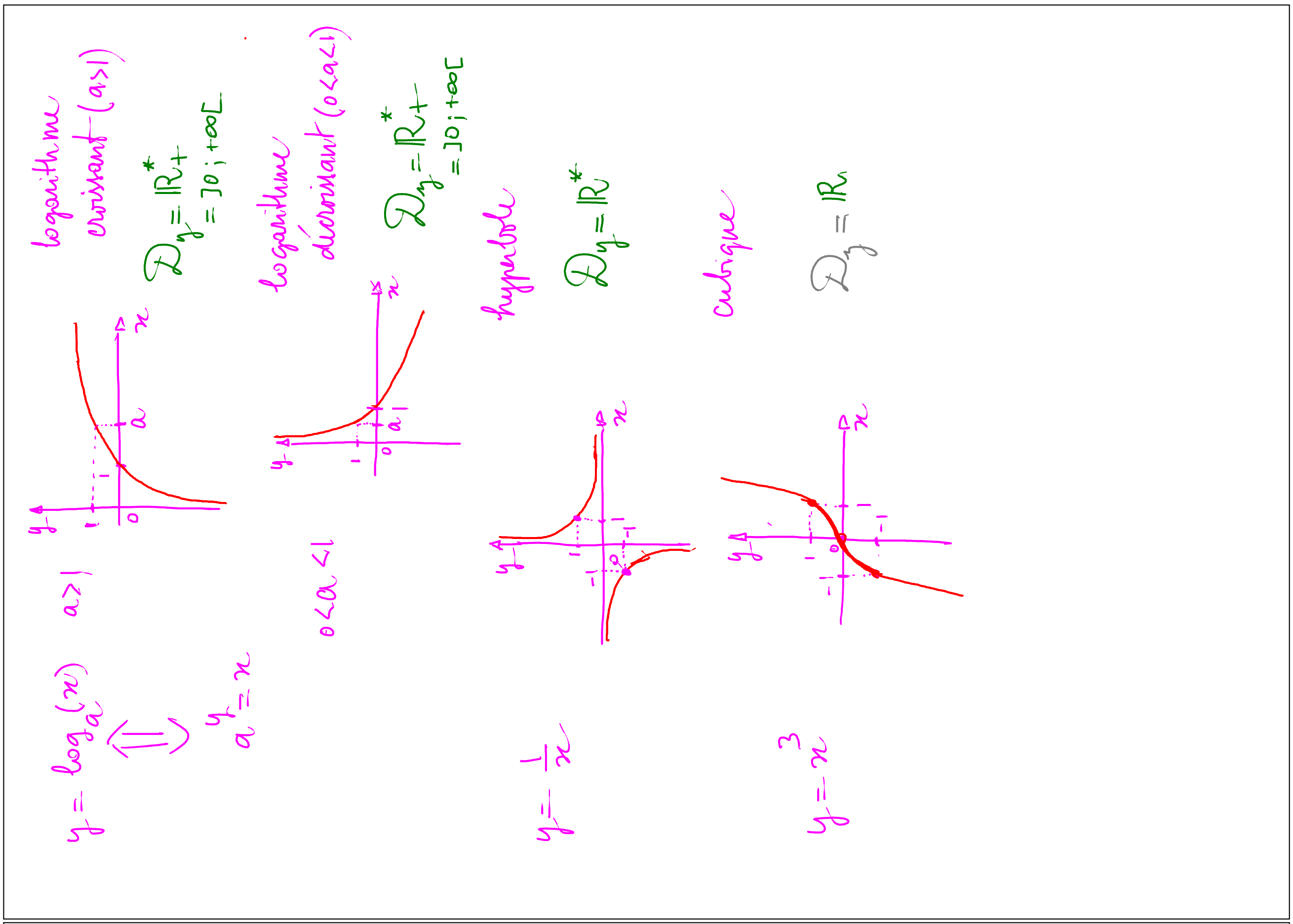
Donner la réciproque des fonctions suivantes

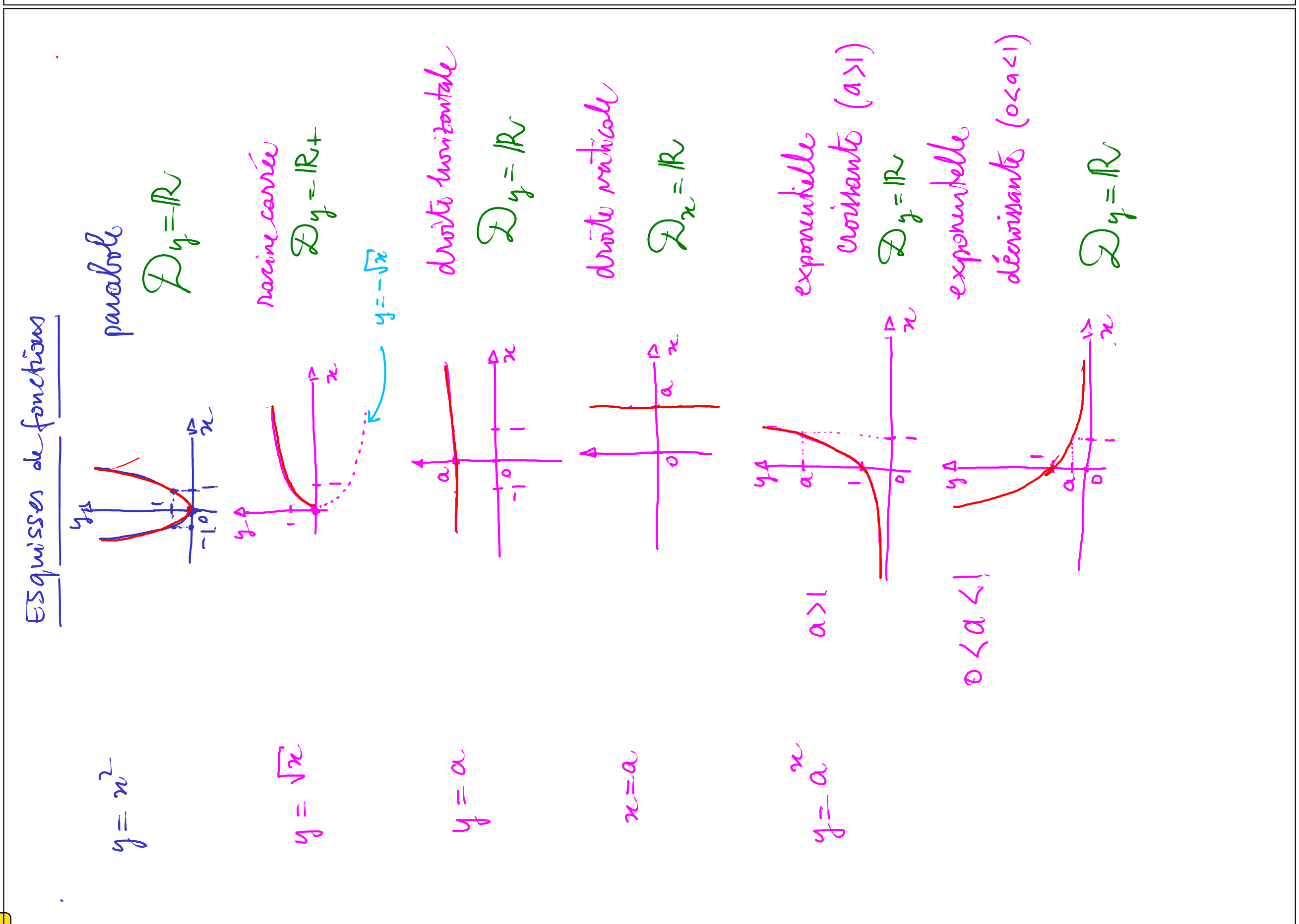
(1) $f(x) = x^3$

(2) $f(x) = 3x + 1$

(3) $f(x) = e^{2x} + 1$

2.4 Esquisses de fonctions





2.5 Exemples de quelques études de fonction logarithmiques

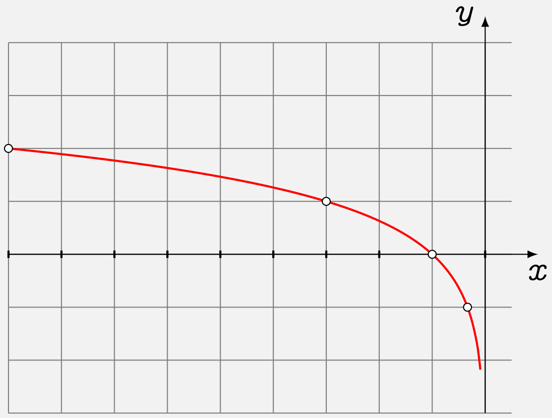
Exemple 2.5.1

Représenter le graphique de la fonction f si

$$f(x) = \log_3(-x)$$

Donner son asymptote, son domaine de définition, l'ensemble image, les zéros, l'ordonnée à l'origine et sa croissance.

Solution



$y = \log_3(-x)$

Domaine de définition Le domaine de définition se donne en général sous la forme d'un intervalle, mais selon le domaine, il peut être donnée sous la forme d'une lettre indiquant le nom de l'ensemble des nombres. Dans ce cas-ci il s'agit de l'intervalle

$$D_f =]-\infty; 0[$$

Asymptote L'équation de l'asymptote est

$$x = 0$$

elle coïncide avec l'axe des ordonnées.

Zéros En général, la fonction logarithme n'a qu'un seul zéro, puisque c'est une fonction bijective. Le zéro est

$$x = -1$$

c'est la solution de l'équation

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \log_3(-x) = 0$$

Ordonnée à l'origine Pas toutes les fonctions logarithmes ont une ordonnée à l'origine. Celle-ci n'en a pas, puisqu'elle ne croise jamais l'axe des ordonnées.

Réciproque La réciproque de f se trouve en isolant la lettre x, donc, dans notre cas, en utilisant l'escargot. Ensuite, on échange les rôles de x et y :

$$y = \log_3(-x) \Leftrightarrow 3^y = -x \Leftrightarrow -3^y = x$$

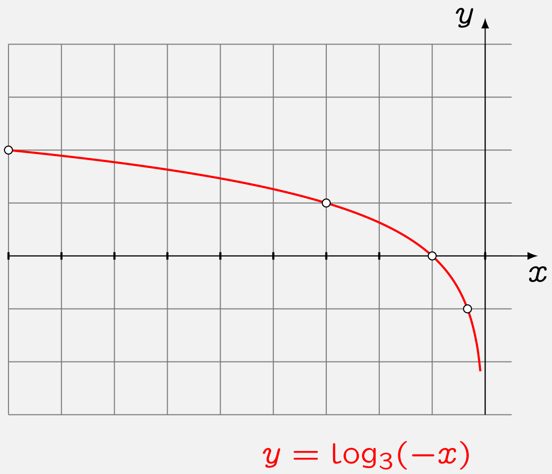
et on écrit la réciproque de f

$$f^{-1}(x) = -3^x$$

Croissance On rappelle que

$$\text{lorsque } x_1 < x_2 \text{ si on a } \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ alors } f \text{ est } \textbf{croissante}, \\ \\ f(x_1) > f(x_2) \text{ alors } f \text{ est } \textbf{décroissante}. \end{cases}$$

Dans notre cas, la fonction f est **décroissante**.

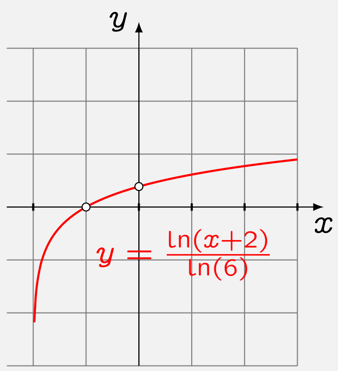


Exemple 2.5.2

Donner l'esquisse, l'équation de son asymptote, le domaine de définition, l'ensemble image, les zéros, l'ordonnée à l'origine et la croissance de la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)}$$

Solution



Domaine de définition Nous voulons que la fonction $\ln(x + 2)$ puisse être calculée. C'est la seule contrainte, car $\ln(6)$ est une constante, un nombre que l'on peut donner et il est différent de zéro. Donc, comme la fonction logarithme est définie que lorsque l'argument est strictement plus grand que zéro nous devons trouver pour quels x l'argument $x + 2$ est supérieur strictement à zéro

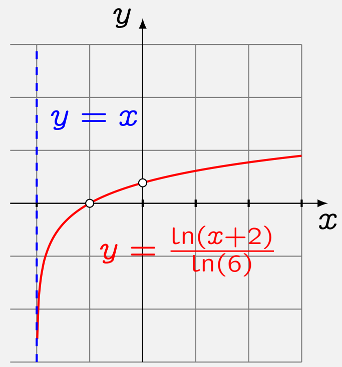
$$\begin{aligned} x+2 &> 0 \\ \iff x &> -2 \end{aligned}$$

C'est notre intervalle domaine de définition

$$D_f =]-2;\ \infty[$$

Asymptote L'équation de l'asymptote pour une fonction logarithme est une droite verticale, qui coïncide avec l'une des deux bornes du domaine de définition. Ici c'est

$$x = -2$$



Zéros En général, la fonction logarithme n'a qu'un seul zéro, puisque c'est une fonction bijective. Le zéro se trouve en posant $f(x) = 0$ et en résolvant l'équation.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)} &= 0 \qquad \text{multiplier par } \ln(6) \\ \iff \ln(x+2) &= 0 \\ \iff e^0 &= x+2 \\ \iff 1 &= x+2 \\ \iff x &= -1 \end{aligned}$$

Ordonnée à l'origine Pas toutes les fonctions logarithmes ont une ordonnée à l'origine. De toutes façons il faut poser $f(0)$ et calculer.

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\ln(0+2)}{\ln(6)} \\ &= \frac{\ln(2)}{\ln(6)} \\ &\approx 0{,}3868528 \end{aligned}$$

Réciproque Pour trouver la réciproque, on suit la procédure exposée plus haut.

Mais avant, il convient de faire un changement de base, et de travailler en base 6, ce qui donne $y = \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)} = \log_6(x+2)$

$$\begin{array}{rrl} & y & = \log_6(x+2) \\ \Longleftrightarrow & 6^y & = x+2 \\ \Longleftrightarrow & 6^y - 2 & = x \\ \Longrightarrow & y & = 6^x - 2 = f^{-1}(x) \end{array}$$

Croissance Pour la croissance on choisit deux nombres l'un plus petit que l'autre et simples à utiliser, par exemple

$$-1 < 0$$

puis on se pose la question $f(-1) \overset{?}{<} f(0)$. Calculons

$$\begin{array}{rrl} & f(-1) & < f(0) \\ \Longleftrightarrow & \frac{\ln(-1+2)}{\ln(6)} & < \frac{\ln(0+2)}{\ln(6)} \\ \Longleftrightarrow & \ln(-1+2) & < \ln(0+2) \\ \Longleftrightarrow & \ln(1) & < \ln(2) \\ \Longleftrightarrow & 0 & \underset{\approx}{<} 0{,}69314718 \end{array}$$

Dans notre cas, la fonction f est **croissante**.

3.1 Généralités (3)

3.1.1 Notation d'une suite illimitée et d'une somme

Une *suite illimitée* arbitraire de nombres réels peut être notée comme suit :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

c'est la suite des nombres entiers. Et de manière générale, une suite arbitraire peut être écrite ainsi :

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Nous dirons, par commodité, *suite* au lieu de suite illimitée. Une suite est donc une liste de nombre réels qui sont en correspondance bijective avec les nombre entiers positifs. Nous avons une correspondance qui peut être écrite comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{N}^* : & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{R} : & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_n & \ldots \end{array}$$

Ci-dessus, nous voyons que le premier nombre de la suite est a_1, le deuxième a_2, etc. Ainsi le $10^{\text{ème}}$ terme s'écrira a_{10}. Le terme général de cette suite est a_n, où n est l'indice qui est égal à son rang, la position du nombre dans la liste.
Les listes se retrouvent souvent en mathématiques. Par exemple le nombre $\frac{1}{6}$ peut être approché par la suite

$$0{,}16;\ 0{,}166;\ 0{,}1666;\ 0{,}16666;\ 0{,}166666;\ 0{,}1666666;\ \ldots$$

qui donne une approximation de plus en plus proche de $\frac{1}{6}$ au fur et à mesure que le rang, n, de la suite tend vers l'infini, c'est-à-dire grandit sans limite.

Comme a_n veut dire le $n^{\text{ième}}$ nombre de la suite, nous pourrions tout aussi bien écrire, $a(n)$ à l'instar de la notation de la fonction $f(x) = 2x$ par exemple, qui à chaque argument x renvoi son double, $2x$. Ici aussi, nous pourrions avoir la suite des nombres pairs non nuls :

$$(a_n)\ :\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots$$

on note (a_n) la suite de terme général a_n. Cette dernière expression est la *règle* qui est appliquée au rang pour construire le réel en question. On peut donc naturellement écrire $a_n = 2n$ autrement dit, $a(n) = 2n$ ou encore en notation habituelle, $f(n) = 2n$.

Donc nous avons la définition

Définition 3.1.1 : Suite illimitée

Une **suite illimitée** est une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble des entiers naturels non nuls :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n \end{aligned}$$

Par exemple

$$\begin{array}{llllllll}
(a_n) & : & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\
(b_n) & : & 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots \\
(c_n) & : & 1, & 3, & 5, & 7, & \ldots, & 2n-1, & \ldots \\
(d_n) & : & 1^3, & 2^3, & 3^3, & 4^3, & \ldots, & n^3, & \ldots
\end{array}$$

Ci-dessus nous avons quatre suites, celle des entiers naturels non nuls, celle des nombres pairs positifs, celle des entiers naturels impairs et celle des cubes des entiers naturels non nuls.

Naturellement on voit aussi que deux suites (a_n) et (b_n) sont **égales** si et seulement si chaque paire de termes correspondants au même rang sont égaux

$$a_k = b_k$$

pour tout $k \geq 1$.

Exemple 3.1.1 : Détermination des termes d'une suite

Pour chaque suite ci dessous, donner les quatre premiers termes ainsi que le 10$^{\text{ème}}$ terme.

(a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(b) $(2+(0{,}1)^n)$

(c) $\left((-1)^{n+1}\frac{n^2}{3n-1}\right)$

(d) (5)

Solution Pour calculer le premier terme d'une suite, nous substituons 1 à n dans le terme général, la règle, de la suite. Pour obtenir le deuxième, nous remplaçons n par 2, etc. Si on doit donner le 10$^{\text{ème}}$ nous remplaçons n par 10 avant de calculer le terme à l'aide de la formule donée par le terme général de la suite.

	Suite	Quatre premiers termes	Dizième terme
(a)	$\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}$	$\frac{10}{11}$
(b)	$(2+(0{,}1)^n)$	2,1; 2,01; 2,001; 2,0001;	2,0000000001
(c)	$\left((-1)^{n+1}\frac{n^2}{3n-1}\right)$	$\frac{1}{2}; -\frac{4}{5}; \frac{9}{8}; -\frac{16}{11};$	$-\frac{100}{99}$
(d)	(5)	5; 5; 5; 5;	5

Si nous donnons le premier terme d'une suite, a_1 et une règle pour trouver le terme de rang $n+1$ à partir du terme de rang n, nous sommes en présence de ce que l'on appelle une suite **définie par récurrence** et on parle de **suite récurrente**.

Exemple 3.1.2 : Détermination des termes d'une suite définie par récurrence

Soit $a_1 = 3$ le premier terme d'une suite. Et la règle

$$a_{k+1} = 2 \cdot a_k \qquad \forall k \geq 1$$

calculer les quatre premiers termes de la suite décrite par récurrence, ainsi que le $n^{\text{ième}}$ terme.

Solution
Les quatre premiers termes sont

Rang, k	Terme selon la règle $2k$
1	$a_1 = 3$
2	$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 3 = 6$
3	$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12$
4	$a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 2 \cdot \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24$

Pour le terme général, nous devons explorer encore quelques termes et induire la règle générale seulement en fonction du rang k :

$$a_5 = 2^4 \cdot 3$$

$$a_6 = 2^5 \cdot 3$$

et ainsi de suite. De manière générale

$$a_n = 2^{n-1} \cdot 3 \qquad \forall \text{ entier } n > 0$$

3.2 Suites arithmétiques (6)

On s'intéresse dans un premier temps aux suites arithmétiques.
En reprenant les notations introduites précédemment, on a

Définition 3.2.1 : Suite arithmétique

Une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier positif k,

$$a_{k+1} = a_k + r$$

Le nombre $r = a_{k+1} - a_k$ est appelé la **raison** de la suite.

Ici il faut observer que la raison r est une constante pour toute la suite (a_n), c'est-à-dire que la différence entre deux termes consécutifs est toujours égale à r :
Par exemple dans la suite

$$-4;\ -1;\ 2;\ 5;\ \ldots;\ 3n-7;\ \ldots$$

a une raison égale à 3 et la suite

$$26;\ 21;\ 16;\ 11;\ \ldots;\ 31-5n;\ \ldots$$

a une raison égale à -5.

Exemple 3.2.1 : Montrer qu'un suite est une suite arithmétique

Soit la suite

$$1;\ 4;\ 7;\ 10;\ \ldots;\ 3n-2;\ \ldots$$

Montrer que c'est une suite arithmétique et donner sa raison.

Solution
D'après l'énoncé, le terme général vaut $a_n = 3n - 2$. Par définition de la raison d'une suite arithmétique, nous savons que la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est égale à la raison. Mais attention ceci doit être vrai pour toute paire de nombres consécutifs. On calcule la différence entre $a_{k+1} = 3(k+1) - 2$ et $a_k = 3k - 2$:

$$a_{k+1} - a_k = (3(k+1) - 2) - (3k - 2) = 3k + 3 - 2 - 3k + 2 = 3$$

et puisque nous trouvons une constante, c'est que cette différence est la même quelque soit $k \geq 1$. C'est donc que la suite est une suite arithmétique. On dit aussi **progression arithmétique**.

3.2.1 Déterminer les composant d'une suite, à l'aide des premiers termes

Nous savons maintenant montrer si une suite est arithmétique. Nous pouvons donc, ayant quelques termes de la suite, trouver aisément la raison d'une suite arithmétique. Ceci se fait grâce à la formule

$$r = a_{k+1} - a_k$$

Par ailleurs, une fois la raison connue, nous pouvons par la formule de récurrence donnée par la définition de suite arithmétique, calculer n'importe quel terme de cette suite.

Cependant, pour calculer le 6$^{\text{ème}}$ terme de la suite on doit connaître le 5$^{\text{ème}}$, le 4$^{\text{ème}}$, le 3$^{\text{ème}}$, le 2$^{\text{ème}}$ et le 1$^{\text{er}}$. Cette prodédure est très lourde et longue s'il s'agit de donner par exemple le 134$^{\text{ème}}$ terme d'une suite.

3.2.2 Trouver le terme général réduit

On cherche alors une formule qui donne, en un calcul, le terme de rang donné.
Pour ce faire on va s'appuyer sur la formule de récurrence donnée pour le terme général d'une suite arithmétique, à savoir

$$a_{k+1} = a_k + r$$

Par définition un terme est égal au précédent plus la raison. De manière générale, on peut écrire les termes de la suite comme suit

Rang	1	2	3	4	...
Terme	a_1	a_2	a_3	a_4	...

et en remplaçant la valeur du précédent à chaque nouveau terme, nous avons

Rang	1	2	3	4	...
Terme	a_1	$a_1 + r$	$(a_1 + r) + r$	$((a_1 + r) + r) + r$	...

ce qui peut s'écrire de forme plus compacte comme suit

Rang	1	2	3	4	...
Terme	a_1	$a_1 + r$	$a_1 + 2r + r$	$a_1 + 3r$	...

et il en ressort la formule du terme général d'une suite arithmétique en fonction du rang (n), de la raison (r) et du premier terme (a_1)

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$$

Exemple 3.2.2

Voici les trois premiers termes d'une progressin arithmétique : 20; 16,5; 13. Calculer le quinzième terme.

Solution
Nous savons trouver la raison de cette suite si l'on a au moins deux termes consécutifs : $r = 13 - 16{,}5 = -3{,}5$.
Maintenant, il ne reste plus qu'à utiliser la formule donnant le terme de rang donné, ici $n = 15$, en fonction du premier terme, de la raison et du rang :

$$a_{15} = 20 + (15-1) \cdot (-3{,}5) = 20 - 14 \cdot \frac{7}{2} = 20 - 49 = -29$$

3.2.3 Déterminer le terme général en connaissant deux termes

Il est utile d'utiliser un système d'équations pour trouver la raison et le premier terme d'une suite arithmétique, si l'on ne connaît que deux (ou plusieurs termes) de la suite en question, mais qui ne sont pas consécutifs.

Dans l'exemple suivant, on montre comment déterminer le terme général de la suite nous permettant de répondre à la tâche demandée.

Exemple 3.2.3

Sachant que le quatrième terme d'une suite arithmétique est 5 et que le neuvième terme est 20, calculer le sixième terme de cette suite.

Solution

On sait que $a_4 = 5$ et que $a_9 = 20$.

Nous pouvons utiliser la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique, pour en trouver la raison et le premier terme. Ceci nous permettra de calculer le terme de rang quelconque. Cette formule, appliquée à ce que l'on connaît nous donne deux équations linéaires en a_1 et r :

$$\begin{cases} 5 & = a_1 + 3 \cdot r \\ 20 & = a_1 + 8 \cdot r \end{cases}$$

en effet, $a_4 = a_1 + (4-1) \cdot r = 5$ et de même $a_9 = a_1 + (9-1) \cdot r = 20$

En utilisant la méthode par addition sur ce système on trouve :

$$\ominus \begin{cases} 5 & = a_1 + 3 \cdot r \\ 20 & = a_1 + 8 \cdot r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -15 = -5 \cdot r \\ \Leftrightarrow \quad & 3 = r \\ \Rightarrow \quad & 5 - 3 \cdot 3 = a_1 \\ \Leftrightarrow \quad & -4 = a_1 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, avec $n = 6$:

$$a_6 = -4 + 5 \cdot 3 = 11$$

3.2.4 Calculer une somme, sans connaître le dernier terme ou le nombre de termes

Pour être tout à fait complet, il nous faut considérer la somme partielle des n premiers termes d'une suite arithmétique.

Le théorème qui suit peut être démontré, et sera exposé en cours. Vous n'avez pas besoin d'en connaître la démonstration pour pouvoir l'utiliser.

Ce qu'on vous demande, par contre, est de comprendre la formule et savoir l'utiliser.

Théorème 3.2.1 : Formule de la somme partielle d'une suite arithmétique

Si a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ... est une progression arithmétique de raison r, alors la $n^{\text{ième}}$ somme partielle S_n (c'est-à-dire la somme des n premiers termes) est donnée par

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot r) \qquad \text{ou} \qquad S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Exemple 3.2.4 : Calculer la somme partielle d'une suite

Si dans une suite partielle on connaît le premier terme (3), le deuxième terme (7) et le dernier terme (23), sauriez vous donner la somme de la suite partielle ?

Solution
Pour commencer il nous faut la raison. Elle est donnée par

$$r = a_2 - a_1$$

c'est-à-dire

$$r = 7 - 3 = 4$$

Ensuite il nous faut connaître n, le rang du dernier terme connu, donné par la formule $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$:

$$\begin{aligned}
& 23 &&= 3 + (n-1) \cdot 4 \\
\Leftrightarrow\ & 23 &&= 3 - 4 + 4n \\
\Leftrightarrow\ & 23 &&= -1 + 4n \\
\Leftrightarrow\ & 24 &&= 4n \\
\Leftrightarrow\ & \frac{24}{4} &&= n \\
\Leftrightarrow\ & n &&= 6
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.5

Calculer la somme de tous les entier pairs entre 2 et 100, bornes comprises.

Solution
Il y a plusieurs manières de résoudre le problème. Une approche est celle qui utilise les formule que l'on vient de définir.

On constate qu'il s'agit d'une suite arithmétique. En effet, la différence entre deux termes consécutifs est $r = 2$. Ensuite il nous faut juste connaître le rang de 100 afin d'utiliser la formule $S_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot r)$. Or, nous connaîssons la formule $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, alors

$$\begin{aligned} & 100 &&= 2 + (n-1)\cdot 2 \\ \Leftrightarrow\ & 100 &&= 2 - 2 + 2n \\ \Leftrightarrow\ & 50 &&= n \end{aligned}$$

Ainsi

$$S_{50} = \frac{50}{2}\cdot(4 + 49\cdot 2) = 25\cdot(4+98) = 25\cdot 102 = 2550$$

Parfois il est utile de partager un intervalle en un certain nombre de parties toutes espacées régulièrement. Cette régularité est donnée par la raison de la suite arithmétique.

La **moyenne arithmétique** de deux nombres a et b est donnée par

$$\frac{a+b}{2}$$

c'est la moyenne que l'on calcule pour deux nombres. On peut constater que les termes

$$a;\ \frac{a+b}{2};\ b$$

sont en progression arithmétique (limitée car trois termes seulement). Il est aisé de constater (exercice) que la raison est $r = \frac{b-a}{2}$.

Plus généralement, lorsqu'on a le premier et le dernier terme, disons a et b, on peut former une progression arithmétique limitée dont les k nombres entre les deux bornes sont appelés les **moyens termes arithmétiques** :

$$a;\ c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_k;\ b$$

ici il s'agit des termes $c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_k$.

Exemple 3.2.6 : Insérer k moyens arithmétique

Insérer quatre moyens arithmétiques entre 2 et 9.

Solutions
Si l'on doit insérer 4 moyens arithmétiques, c'est que la suite limitée contient 6 termes. Il nous faut la raison.

On utilise la formule $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ pour trouver r, puis on calcule les quatre moyens arithmétiques demandés :

$$a_n - a_1 = (n-1)\cdot r \ \Leftrightarrow\ r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

donc

$$r = \frac{9-2}{5} = \frac{7}{5}$$

et les termes demandés sont

$$2 + \frac{7}{5};\ 2 + 2\cdot\frac{7}{5};\ 2 + 3\cdot\frac{7}{5};\ 2 + 4\cdot\frac{7}{5}$$

les calculs sont laissés en exercice.

3.2.5 Résoudre des problèmes d'application

Voici un exemple d'application des suites arithmétiques.

Exemple 3.2.7

Un charpentier désire construire une échelle avec neuf échelons dont la longueur décroît uniformément de 48 centimètres à la base à 36 centimètres au sommet. Déterminer les longueurs des sept échelons intermédiaires.

Solution
Comme dans l'exemple précédent, on sait que la suite contient 9 termes, dont on connait le premier (48) et le dernier (36). Comme il faut uniformément réduire la taille des échelons, il nous faut calculer les longueurs des 7 échelons intermédiaires. Ceci se fait en insérant 7 moyens arithmétiques entre les deux bornes 48 et 36. La raison est donc

$$r = \frac{36-48}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

on a donc

$$48 - \frac{3}{2};\ 48 - 2 \cdot \frac{3}{2};\ 48 - 3 \cdot \frac{3}{2};\ 48 - 4 \cdot \frac{3}{2};\ 48 - 5 \cdot \frac{3}{2};\ 48 - 6 \cdot \frac{3}{2};\ 48 - 7 \cdot \frac{3}{2}$$

ce qui donne

$$46{,}5;\ 45;\ 43{,}5;\ 42;\ 40{,}5;\ 39;\ 37{,}5$$

Exemple 3.2.8 : Utilisation du symbole Σ

Exprimer à l'aide du symbole de sommation Σ, la série limitée suivante :

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19} + \frac{5}{24} + \frac{6}{29}$$

Solution
Si on essaie de calculer la différence de deux termes consécutifs de cette série, on constante que ce n'est pas une progression arithmétique. Par contre après un petit moment de réflexion on observe que les numérateurs entre eux le sont, ainsi que les dénominateurs :

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$$

pour les numérateurs et

$$4;\ 9;\ 14;\ 19;\ 24;\ 29$$

pour les dénominateurs.

On peut alors appliquer ce que nous savons sur les suites arithmétiques séparément aux numérateurs puis aux dénominateurs. Ensuite nous écrivons le quotient de ces deux suites. Le terme général des numérateurs est n, puisque le nombre de la suite correspond à son rang. Le terme général des dénominateurs est $5n - 1$. En effet

$$r = 9 - 4 = 14 - 9 = 19 - 14 = 24 - 19 = 29 - 24 = 5$$

et on sait que le terme général est

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

et ici on trouve

$$a_n = 4 + (n-1) \cdot 5 = 4 + 5n - 5 = 5n - 1$$

En conséquence, la série de départ est égale à

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{14} + \frac{4}{19} + \frac{5}{24} + \frac{6}{29} = \sum_{n=1}^{6} \frac{n}{5n-1}$$

3.2.6 Exercices

3001. Montrer que les suites suivantes sont des suites arithmétiques et donner pour chacune d'elles la raison.

a) $-6;\ -2;\ 2;\ \ldots;\ 4n-10;\ \ldots$

b) $53;\ 48;\ 43;\ \ldots;\ 58-5n;\ \ldots$

3002. Calculer le cinquième terme, le dixième terme et le $n^{\text{ième}}$ terme des suites arithmétiques ci-après.

a) $2;\ 6;\ 10;\ 14;\ \ldots$

b) $3;\ 2{,}7;\ 2{,}4;\ 2{,}1;\ \ldots$

c) $-6;\ -4{,}5;\ -3;\ -1{,}5;\ \ldots$

d) $-7;\ -3{,}9;\ -0{,}8;\ 2{,}3;\ \ldots$

e) $x-8;\ x-3;\ x+2;\ x+7;\ \ldots$

f) $\ln(3);\ \ln(9);\ \ln(27);\ \ln(81);\ \ldots$

g) $\log(1000);\ \log(100);\ \log(10);\ \log(1);\ \ldots$

3003. Calculer la raison des suites arithmétiques ci-après, dont on ne connaît que deux termes.

a) $a_2 = 21;\ a_6 = 11$

b) $a_4 = 14;\ a_{11} = 35$

3004. Calculer le terme spécifié de la suite arithmétique dont les deux termes sont donnés.

a) a_{12} $\quad a_2 = 21;\ a_6 = 11$

b) a_{11} $\quad a_1 = 2+\sqrt{2};\ a_2 = 3$

c) a_1 $\quad a_6 = 2{,}7;\ a_7 = 5{,}2$

d) a_1 $\quad a_8 = 47;\ a_9 = 53$

e) a_{15} $\quad a_3 = 7;\ a_{20} = 43$

f) a_{10} $\quad a_2 = 1;\ a_{18} = 49$

3005. Calculer la somme S_n de la suite artihmétique qui satisfait les conditions indiquées.

a) $a_1 = 40 \qquad r = -3 \qquad n = 30$

b) $a_1 = 5 \qquad r = 0{,}1 \qquad n = 40$

c) $a_1 = -9 \qquad a_{10} = 15 \qquad n = 10$

d) $a_7 = \dfrac{7}{3} \qquad r = \dfrac{-2}{3} \qquad n = 15$

3006. Calculer la somme.

a) $\sum\limits_{k=1}^{20} (3k-5)$

b) $\sum\limits_{k=1}^{12} (7-4k)$

c) $\sum\limits_{k=1}^{18} (\frac{1}{2}k+7)$

d) $\sum\limits_{k=1}^{10} (\frac{1}{4}k+3)$

3007. Exprimer la somme à l'aide du symbole Σ.

a) $1+3+5+7$

b) $2+4+6+8+10$

c) $1+3+5+\cdots+77$

d) $2+4+6+\cdots+160$

e) $\frac{3}{7}+\frac{6}{11}+\frac{9}{15}+\frac{12}{19}+\frac{15}{23}+\frac{18}{27}$

f) $\frac{5}{13}+\frac{10}{11}+\frac{15}{9}+\frac{20}{7}$

3008. Calculer le nombre de termes des suites arithmétiques ci-après.

a) $a_1=-2 \qquad r=\frac{1}{4} \qquad S=21$

b) $a_6=-3 \qquad r=0{,}2 \qquad S=-33$

3009. Les dix premières rangées de places assises dans une certaine partie d'un stade ont 30 sièges, 32 sièges, 34 sièges, et ainsi de suite. De la onzième rangée à la vingtième rangée, chaque rangée est formée de 50 sièges. Calculer le nombre total de sièges dans cette partie du stade.

3010. Un cycliste descend une colline en parcourant 1,2 mètres durant la première seconde. Pendant chacune des secondes suivantes, le cycliste parcourt 1,5 mètres de plus que lors de la seconde précédente. Sachant que le cycliste atteint le bas de la colline en 11 secondes, calculer la distance totale parcourue.

3011. Une entreprise veut distribuer 46 000 frs de bonus à ses dix meilleurs vendeurs. Le dixième meilleur vendeur de la liste recevra 1 000 frs, et la différence de valeur entre les bonus de chaque vendeur successif doit être une constante. Calculer le bonus de chaque vendeur.

3012. Si f est une fonction affine, montrer que le suite de $n^{\text{ième}}$ terme $a_n=f(n)$ est une suite arithmétique.

3013. La suite définie par récurrence par $x_{k+1}=\dfrac{x_k}{(1+x_k)}$ se rencontre en génétique dans l'étude de l'élimination d'un gêne déficient dans une population. Démontrer que la suite dont le $n^{\text{ième}}$ terme est $\dfrac{1}{x_n}$ est une progression arithmétique.

3.3 Suites géométriques (6)

Nous introduisons à présent le deuxième type de suite très utilisée en sciences : la suite géométrique.
Contrairement à la suite arithmétique, une suite géométrique est basée sur un produit. En effet, pour passer d'un terme au suivant de la suite, on utilise la multiplication par un nombre, nommé aussi raison.

Définition 3.3.1 : Suite géométrique illimitée

Une suite $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots$ est une **suite géométrique** si $a_1 \neq 0$ et s'il existe un nombre réel $r \neq 0$ tel que, pour tout entier positif k

$$a_{k+1} = a_k \cdot r$$

Le nombre $r = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ est appelé la **raison** de la suite.

Comme nous l'avons déjà fait pour la suite artithmétique, nous pouvons utiliser cette définition pour montrer si une suite de nombres est en progression géométrique. Il suffit que le quotient de toute paire de termes consécutifs soit égale à une constante, la raison r.

3.3.1 Déterminer les composant d'une suite, à l'aide des premiers termes

Étant donné les premiers termes d'une suite géométrique, il nous est possible de trouver la raison, le terme général.

Exemple 3.3.1 : Trouver la raison

Soit la suite géométrique suivante : $6;\ -12;\ 24;\ -48;\ldots$. Donner la raison.

Solution
On a vu que la raison est le **quotient** de deux termes consécutifs. Alors

$$r = \frac{-12}{6} = \frac{24}{-12} = \frac{-48}{24} = -2$$

Exemple 3.3.2 : Trouver la raison

Soit la suite géométrique suivante : $9;\ 3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ldots$. Donner la raison.

Solution
On a vu que la raison est le **quotient** de deux termes consécutifs. Alors

$$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

On remarque que la formule donnant le terme général d'un suite géométrique est une formule définie par **récurrence** :

$$a_{k+1} = a_k \cdot r$$

Contrairement aux suites arithmétiques, où un terme pouvait être égal à zéro, on observe que si l'un des termes d'une suite géométrique est égal à zéro, par exemple $a_n = 0$, ce sont tous les termes de la suite qui seront égaux à zéro.
Il n'est donc pas possible qu'un terme d'une suite géométrique soit égal à zéro.
Entre autres parce qu'il y aurait pas de définition possible pour la raison, qui est le quotient de deux termes consécutifs : la division par zéro n'étant pas définie.

3.3.2 Trouver le terme général réduit

En commençant donc par un terme non nul, on peut construire une suite géométrique :

$$a_1 \qquad a_1 \cdot r \qquad a_1 \cdot r^2 \qquad a_1 \cdot r^3 \qquad \ldots$$

Ainsi, le $n^{\text{ième}}$ terme de cette suite sera donné par la formule réduite suivante

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Exemple 3.3.3 : Trouver les termes d'une suite géométrique

Si une suite géométrique a comme premier terme 5 est que sa raison est égale à $\frac{2}{3}$, quels sont les cinquièmes et dixièmes termes ?

Solution
Puisque nous avons la formule réduite donnant le terme de rang n et que cette formule ne dépend que de la raison et du prmier terme, informations que nous avons, nous pouvons aisément donner les termes a_5 et a_{10} :

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{81}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^{10-1} = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \frac{512}{19683}$$

3.3.3 Déterminer le terme général en connaissant deux termes

Il arrive que l'on ne connaisse que certains termes d'une suite géométrique. De plus ces termes peuvent ne pas être consécurifs.
Dans ce cas on peut tout de même reconstituer la suite géométrique grâce aux formules de la définition.

Exemple 3.3.4 : Donner le terme général d'une suite

Soit une suite géométrique dont on ne connaît que le deuxième terme égal à 21 et le septième égal à 357. Donner le terme général de la suite.

Solution

On n'a que la formule donnant a_n :

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Or nous avons $a_2 = 21$ et $a_7 = 357$ de là on trouve deux équations. Comme nous avons deux inconnues, le système peut être résolu :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a_2 = 21 = a_1 \cdot r \\ a_7 = 357 = a_1 \cdot r^6 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{21}{a_1} \\ 357 = a_1 \cdot \left(\dfrac{21}{a_1}\right)^6 \end{cases} \\
&\Rightarrow a_1^5 = \frac{21^6}{357} \\
&\Leftrightarrow a_1 = \sqrt[5]{\frac{21^6}{357}} = 21 \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{51}} \\
&\Rightarrow r = \sqrt[5]{\frac{51}{3}} \\
&\Rightarrow a_n = 21 \cdot \sqrt[5]{\frac{3}{51}} \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{51}{3}}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Exemple 3.3.5 : Donner le terme général d'une suite

Soit une suite géométrique. On ne connaît que $a_3 = 18$ et $a_5 = \frac{81}{2}$. Donner le terme général de la suite.

Solution

On n'a que la formule donnant a_n :

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Comme avant nous avons deux équations pour deux inconnues : on peut résoudre le système :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a_3 = 18 = a_1 \cdot r^2 \\ a_5 = \dfrac{81}{2} = a_1 \cdot r^4 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{18}{r^2} \\ \dfrac{81}{2} = \dfrac{18}{r^2} \cdot r^4 \end{cases} \\
&\Rightarrow \frac{81}{2} = 18 \cdot r^2 \\
&\Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{4} \\
&\Leftrightarrow r = \pm\frac{3}{2} \\
&\Rightarrow a_1 = 8
\end{aligned}$$

Mais comme la raison est égale à $\pm\frac{3}{2}$, et sans autre information, nous devons conclure qu'il y a deux suites, dont l'une est **alternée**, c'est-à-dire que les signes des termes consécutifs sont alternés, $+ \quad - \quad + \quad - \quad \ldots$. Alors on a les deux résultats suivants

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{suite non alternée ;}$$

$$a_n = 8 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{suite **alternée**.}$$

Comme déjà fait pour les suites arithmétiques, nous pouvons définir une **série géométrique finie**, comme la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Définition 3.3.2 : Série géométrique finie

On dit que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique est une **série géométrique finie** et on écrit

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

3.3.4 Calculer une somme, sans connaître le dernier terme ou le nombre de termes

Exemple 3.3.6 : Somme d'une suite géométrique

Supposons que vous ne connaissez pas le dernier terme d'une série géométrique finie. On vous donne $a_1 = 8$ et $r = \frac{3}{2}$. Calculer la somme des dix premiers termes.

Solution On doit utiliser la première partie de la formule ci-dessus : $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$. Alors

$$\begin{aligned}
S_{10} &= 8 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{3}{2}}\right) \\
&= 8 \cdot \left(\frac{2^{10} - 3^{10}}{2^{10}} \cdot \frac{2}{-1}\right) \\
&= 8 \cdot \frac{58025}{512} \\
&= \frac{5^2 \cdot 11 \cdot 211}{2^6} \\
&\approx 906{,}6
\end{aligned}$$

3.3.5 Résoudre des problèmes d'application

Voici un exemple d'application du concept de série géométrique.

Exemple 3.3.7

Un groupe d'amis décide de gagner du muscle et de faire des scéances d'abdos. Ils commencent par faire 1 abdo le premier jour, 2 abdos le deuxième jour, 4 abdos le troisième jour, et ainsi de suite.
En contiuant ainsi, combien d'abods font-ils le quinzième jour ? Et le vingt-et-unième jour ?

Solution
Le nombre d'abdos que fait le groupe, est une progression géométrique de raison 2 et son terme général est $a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$. Ainsi, le quinzième jour ils auront fait

$$a_{15} = 2^{14} = 16384$$

abdominaux.
Quant au vint-et-unième jour :

$$a_{21} = 2^{20} = 1048576$$

abdominaux. Ouf !

3.3.6 Exercices

3014. Montrer que les suites suivantes sont des suites géométriques et donner pour chacune d'elles la raison.

a) $5;\ -\frac{5}{4};\ \frac{5}{16};\ \ldots;\ 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1};\ \ldots$

b) $\frac{1}{7};\ \frac{3}{7};\ \frac{9}{7};\ \ldots;\ \frac{1}{7} \cdot (3)^{n-1};\ \ldots$

3015. Calculer le cinquième terme, le huitième terme et le $n^{\text{ième}}$ terme des suites géométriques ci-après.

a) $8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \ldots$

b) $300;\ -30;\ 3;\ -0{,}3;\ \ldots$

c) $1;\ -\sqrt{3};\ 3;\ -3 \cdot \sqrt{3};\ \ldots$

d) $5;\ 25;\ 125;\ 625;\ \ldots$

e) $4;\ -6;\ 9;\ -13{,}5;\ \ldots$

f) $1;\ -x^2;\ x^4;\ -x^6;\ \ldots$

g) $2;\ 2^{x+1};\ 2^{2x+1};\ 2^{3x+1};\ \ldots$

3016. Calculer la ou les raisons possibles pour les suites géométriques ci-après, dont on ne connaît que deux termes.

a) $a_4 = 3;\ a_6 = 9$

b) $a_3 = 4;\ a_7 = \frac{1}{4}$

3017. Calculer le sixième terme d'une progression géométrique dont les deux premiers termes sont 4 et 6.

3018. Calculer le septième terme d'une progression géométrique dont les deuxième et troisième termes sont 2 et $-\sqrt{2}$.

3019. Soit une progression géométrique dont $a_4 = 4$ et $a_7 = 12$. Calculer r et a_{10}.

3020. Soit une progression géométrique dont $a_2 = 3$ et $a_5 = -81$. Calculer r et a_9.

3021. Calculer la somme.

a) $\sum_{k=1}^{10} 3^k$ b) $\sum_{k=1}^{9} (-\sqrt{5})^k$

c) $\sum_{k=0}^{9} (-\frac{1}{2})^{k+1}$ d) $\sum_{k=1}^{7} (3^{-k})$

3022. Exprimer la somme à l'aide du symbole Σ.

a) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$ b) $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64$

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} - \frac{1}{108}$ d) $3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \frac{3}{125} + \frac{3}{625}$

3023. Une pompe à vide évacue la moitié de l'air d'un récipient à chaque mouvement. Quel pourcentage de la quantité initiale d'air reste-t-il dans le récipient après dix mouvements ?

3024. La dépréciation annuelle d'une certaine machine à laver est 25% de sa valeur au début de l'année. Si le coût initial de la machine est de 20000 francs, quelle est sa valeur après 6 ans ?

3025. Une certaine culture contient initialement 10000 bactéries et le nombre de celles-ci augmente de 20% chaque heure. Après avoir donné la formule $N(t)$ donnant le nombre de bactéries dans la culture après t heures, dire combien de bactéries sont présentes dans la culture après 10 heures.

3026. Sachant qu'un dépôt de 200 francs est effectué le premier jour de chaque mois sur un compte qui rapporte un intérêt composé de 6% par mois, déterminer le montant se trouvant sur le compte après 18 mois.

3027. Une somme d'argent M est déposée sur un compte d'épargne qui rapporte un intérêt composé trimestriel de r pour cent par année ; le capital et les intérêts accumulés sont laissés sur le compte. Écrire une formule donnant le montant total se trouvant sur le compte après n années.

4.1 Principes de dénombrement (3)

4.1.1 La factorielle

Nous commençons par la définition de $n!$ ("n point d'exclamation"), où le point d'exclamation est le symbole réservé pour la fonction **factorielle** et n est un nombre entier naturel :

Définition 4.1.1 : Factoriel de n : $n!$

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{si } n > 0 \tag{4.1}$$

$$0! = 1 \tag{4.2}$$

Cette définition nous dit que lorsque $n = 0$ alors la factorielle vaut 1. Dans tous les autres cas $n!$ est égale au produit des n premiers entiers naturels.
Par exemple on pourra avoir les expressions suivantes :

a) $0! = 1$

b) $1! = 1$

c) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

d) $6! = 5! \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

e) $\dfrac{7!}{3!} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$

4.1.2 Le principe additif

C'est un principe qui paraît évident, mais qu'il faut comprendre, car il va être utilisé dans toute la suite du cours.

Exemple 4.1.1

Dans une école il y a 7 enseignants d'anglais femmes et 6 enseignants d'anglais hommes. Si Monique peut choisir son enseignant d'anglais pour l'an prochain, de combien de manières pourra-t-elle le faire ?

Solution
Alors, Monique peut choisir un seul professeur d'anglais.
Il y a $6 + 7 = 13$ enseignants en tout. Donc, elle peut choisir son enseignant d'anglais de 13 manières différentes.

C'est le principe additif de comptage.

Définition 4.1.2 : Principe additif de comptage

Si les événements A, B, C peuvent se produire de a, b, c manières, et que les événements A, B et C ne sont pas *liés* les uns aux autres, alors un événement A **ou** B **ou** C, autrement dit un seul événement parmi ces trois, peut se produire de $n = a + b + c$ manières différentes.

Ce principe est aussi vrai pour un nombre quelconque d'énénements.

4.1.3 Le principe multiplicatif

Comme pour le principe précédent, le principe multiplicatif est au coeur de l'étude qui va suivre. L'exemple suivant permet d'en avoir un aperçu.

Exemple 4.1.2

Dans une école il y a 7 enseignants de mathématiques et 5 enseignants de français. Si les élèves de cette école peuvent choisir un enseignant de mathématiques et un enseignant de français, de combien de manières peuvent-ils choisir leurs enseignants de mathématiques et de français ?

Solution
La situation est presque comme dans l'exemple précédent.
Ici les élèves doivent choisir un enseignant de chaque discipline, donc deux par élève. Pour celui de mathématiques ils ont 7 possibilités de choix et pour celui de français ils ont 5. En tout cela fait $7 \cdot 5 = 35$ possibilités.

C'est le principe multiplicatif de comptage.

Définition 4.1.3 : Principe multiplicatif de comptage

Si les événements A, B, C peuvent se produire de a, b, c manières, alors les événements A **et** B **et** C, autrement dit un triplet, peut se produire de $n = a \cdot b \cdot c$ manières différentes.

Ce principe est aussi vrai pour un nombre quelconque d'énénements.

4.2 Diagramme en arbre (3)

Le **diagramme en arbre** est utile pour déterminer visuellement une succession d'événements à des fins de comptage ou de calcul de probabilités.

Prenons un exemple.

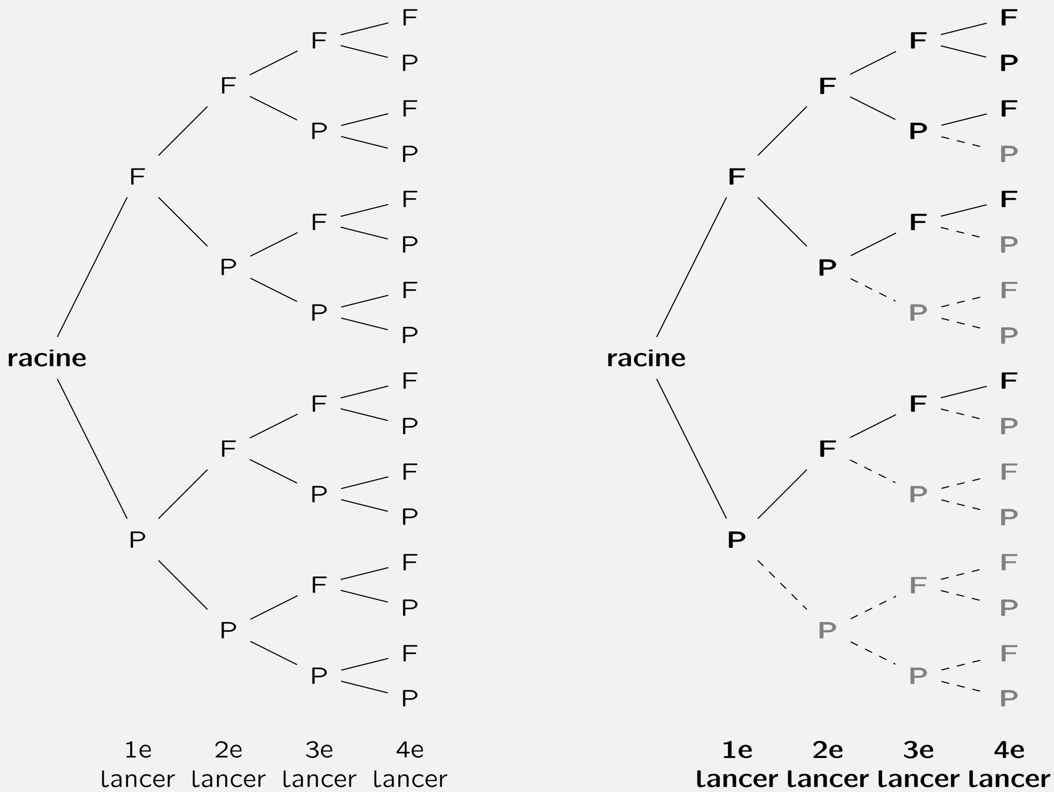
Exemple 4.2.1

Supposons un jeu de lancer de pièces de monnaie, le "pile ou face".

De combien de manières peut-on obtenir trois fois "face" en quatre lancers ?

Solution
Construisons un arbre, à l'horizontale. Ici **la racine** est le point de départ. Ensuite, viennent les différentes possibilités, vers la droite, on les appelle **les branches**. Ces branches terminent sur **les feuilles**.

L'arbre de gauche montre **toutes** les possibilités, alors que celui de droite toutes les possibilités qui donnent trois faces :



4.3 Permutations (3)

Le mot “permuter” veut dire “échanger les places”.

Dans ce qui suit nous allons différencier deux types de **permutations** : celles qui utilisent tous les objets à permuter, et celles qui n’en permutent qu’un sous-ensemble. Ces dernières se nomment *arrangements* (voir plus loin).

Définition 4.3.1 : Permutation

Soit E un ensemble de n éléments et soit $1 \leqslant r \leqslant n$. Une **permutation** de r éléments de E est un *arrangement*, sans répétition, de r éléments.

Théorème 4.3.1 : Nombre de permutations différentes

Soit E un ensemble de n éléments et soit $1 \leqslant r \leqslant n$. Le nombre de permutations différentes de r éléments de E est

$$P_r^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$$

Remarque : le membre de droite de cette formule contient exactement r facteurs. De plus lorsque $r = n$, nous sommes en présence de la définition de la factorielle.

Il faut remarquer que la formule donnée ci-dessus peut s’écrire en fonction de la factorielle. Plus loin on verra que $A_r^n = P_r^n$. Mais Lorsque $r = n$ on peut écrire

$$\boxed{P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}$$

L’exemple suivant montre l’idée de la démonstration de la formule lorsque $r = n$.

Exemple 4.3.1

On veut asseoir trois personnes, désignées par les lettres A, B et C, sur un banc ayant trois places. De combien de manières peut-on le faire ?

Solution

Soit le banc	$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$
On raisonne comme suit : comme l'ordre est important, on peut asseoir la première personne de 3 manières différentes, étant donné que nous avons 3 personnes non encore assises :	$\boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}$
Comme il nous reste 2 personnes à asseoir, on a le choix entre deux personnes pour la deuxième place, donc :	$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{}$
Et la dernière place est pour la seule personne qui nous reste :	$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$
Puis on utilise le *principe multiplicatif* pour compter le nombre de façons d'asseoir les trois personnes :	$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$ $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

En combinatoire on utilise la fonction *factorielle* pour compter le nombre de manières d'arranger cet ensemble.

L'exemple ci-dessus, illustre le type de calculs que l'on fait en combinatoire : lorsqu'on utilise le principe multiplicatif, on multiplie le nombre d'éléments de chaque sous-ensemble concerné par l'expérience dont on essaie de quantifier le nombre d'issues possibles.

Si on doit ordonner 8 objets, de combien de manières peut-on le faire ? La réponse est de 8! manières. En effet, on écrit

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

Et en général, pour n objets, **et si les n objets sont utilisés dans l'arrangement**, on utilise la factorielle de n :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

4.3.1 Reconnaître des permutations avec ou sans répétition

Dans certaines situations, nous serons amenés à ordonner tous les objets d'un ensemble, dans lequel il y a des objets identiques.

Par exemple, si l'on doit ranger des livres dans une étagère et qu'on a deux ou trois fois le même livre dans le lot ; des cubes de différentes couleurs avec des couleurs répétées, etc.

Exemple 4.3.2

Supposons que vous devez créer un mot de passe, de longueur quatre, avec les caractères suivants A, B, X, X. Combien de mots de passe différents peut-on créer ?

Solution

D'après le principe multiplicatif, et l'exemple précédent, nous pouvons estimer le nombre des mots de passe total

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

Seulement, le but est d'avoir des mots de passe différents.
En conséquence les items (2), (5), (6),(8), (11), (12), (19), (20), (21), (22), (23), (24) sont à double et il ne faut pas les compter. Il faut donc retirer 12 mots de passe des 24 trouvés. Le nombre correct est donc

$$12 = \frac{24}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$$

(1)	$A\ B\ X\ X$	(2)	$A\ B\ X\ X$
(3)	$A\ X\ B\ X$	(4)	$A\ X\ X\ B$
(5)	$A\ X\ B\ X$	(6)	$A\ X\ X\ B$
(7)	$B\ A\ X\ X$	(8)	$B\ A\ X\ X$
(9)	$B\ X\ A\ X$	(10)	$B\ X\ X\ A$
(11)	$B\ X\ A\ X$	(12)	$B\ X\ X\ A$
(13)	$X\ A\ B\ X$	(14)	$X\ A\ X\ B$
(15)	$X\ B\ A\ X$	(16)	$X\ B\ X\ A$
(17)	$X\ X\ A\ B$	(18)	$X\ X\ B\ A$
(19)	$X\ A\ B\ X$	(20)	$X\ A\ X\ B$
(21)	$X\ B\ A\ X$	(22)	$X\ B\ X\ A$
(23)	$X\ X\ A\ B$	(24)	$X\ X\ B\ A$

L'exemple précédent montre les **permutations avec répétition**, c'est-à-dire des d'objets identiques, et les **permutations simples**, c'est-à-dire des permutations d'objets différents.
Le nombre total de mots de passe est 4!. Ce nombre comprend le nombre de permutations avec répétitions et celui de permutations simples. En effet, pour chaque permutaion avec répétition (2!), il y a k permutations simples, d'après le principe multiplicatif, puisque nous devons compter le nombre de mots de passe de quatre lettres. On a donc l'équation

$$2! \cdot k = 4!$$

où k est le nombre de permutations simples et 2! le nombre de permutations avec répétition.
En résolvant cette équation nous avons le résultat suivant

$$k = \frac{4!}{2!}$$

c'est le nombre de mots de passe différents.

Théorème 4.3.2 : Permutaions simples (I)

Si m objets dans un ensemble de n objets sont semblables et si les objets restants sont différents les uns des autres et différents des m objets, alors le nombre de permutations simples des n objets est

$$\frac{n!}{m!}$$

avec $m < n$.

Théorème 4.3.3 : Permutaions simples (II)

Si dans un ensemble de n objets, n_1 objets sont semblables d'une manière, n_2 objets sont semblables d'une autre manière, $\ldots n_k$ objets sont semblables d'une autre manière, et si

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

alors le nombre de permutations simples des n objets est

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

En regardant de près, seul le deuxième théorème peut être retenu. En effet, dans l'exemple des mots de passe on a $n = 4$, $n_1 = 2$ qui correspond au nombre de lettres identiques (semblables dans le théorème), et $n_2 = 1 = n_3$ qui correspondent chacun au nombre des autres lettres : A et B. La formule peut alors s'écrire

$$\frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4!}{2}$$

car on a bien $n = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 1 + 1 = 4$.

4.3.2 Calculer le nombre de permutations dans une situation de type anagramme

On peut maintenant résoudre tout problème de combinatoire d'une situation de type "anagramme".

Définition 4.3.2 : Anagramme

Un **anagramme** est un mot obtenu par permutation des lettres de ce même mot.

Contrairement aux anagrammes ayant un sens, en mathématiques et en informatique, nous nous intéressons aussi aux mots n'ayant pas de sens ou n'existant pas dans la langue parlée.

Voici un exemple classique de combinatoire.

Exemple 4.3.3

Calculer le nombre de permutations simples des lettres du mot MISSISSIPPI.

Solution C'est un problème pour la formule du second théorème. Nous commençons donc par compter le nombre de lettres présentes dans le mot et du nombre de chacune d'entre elles :

Lettre	Nombre
M	1
I	4
S	4
P	2
	11

On a donc

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 34650$$

4.4 Arrangements (3)

Si on reprend la définition des permutations et que l'on se place dans le cas où $r = n$ on a ce qu'on appelle un **arrangement** de r objets parmi n. Autrement dit l'ordre des r éléments doit être pris en compte. Et on a le même théorème, dont voici une autre version en fonction de la factorielle :

Théorème 4.4.1 : Arrangements

Soit E un ensemble de n éléments et soit $1 \leqslant r \leqslant n$. Le nombre d'arrangements différents de r éléments de E est

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dans vos calculatrices, il n'est peut-être pas de fonction A_r^n. En effet, comme déjà évoqué, Il suffit de prendre la définition générale de permutation : P_r^n. Dans les calculatrices scientifiques sont présentes les fonctions "factorielle" ($n!$), "permutation" (P_r^n) et "combinaison" (C_r^n). Cette dernière nous la verrons dans la section suivante.

Exemple 4.4.1

Une équipe de base-ball est formée de neuf joueurs. Calculer le nombre de manières d'arranger les quatre premières positions de l'ordre des batteurs si le lanceur en est exclu.

Solution

On a 9 joueurs à disposition, mais 1 en est exclu. Donc $n = 8$. Ensuite, nous devons compter le nombre groupes de 4 joueurs parmi 8, donc $r = 4$.
On applique la formule des arrangements, car l'ordre compte : on veut les quatre premières positions. Ainsi

$$A_4^8 = \frac{8!}{(8-4)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$

4.4.1 Reconnaître des arrangements avec ou sans répétition

Comme montré dans l'exemple précédent, **on reconnaît une "situation d'arrangement" lorsque** les informations nous indiquent que **l'ordre est important**. Ensuite on peut ou pas utiliser tous les éléments à arranger, ce qui se traduit par l'utilisation d'un sous ensemble de taille r de l'ensemble concerné.

Cependant il y a un autre type de situation où il y a explicitement des **répétitions possibles à toutes les places de l'arrangement**. En effet, on peut nous demander de placer n éléments différents sur k places où $k \geqslant n$ ou $k \leqslant n$.

Exemple 4.4.2

Soit un ensemble de deux éléments $E = \{0, 1\}$, et soit $k = 4$. Combien de "mots" de longueur k peut-on former avec les éléments de E ?

Solution
On nous demande en fait, combien de mots binaires (des nombres écrits en binaire) peut-on faire si chaque mot a une longueur de 4.

En appliquant le principe multiplicatif on voit que pour la première position du mot on peut placer 2 éléments, pour la deuxième encore 2 éléments, puisque cette fois-ci la situation le permet : il s'agit d'éléments dont la "quantité" est inépuisable. Ainsi pour les quatre positions nous pouvons, à chaque fois, placer deux éléments, ce qui donne :

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

Exemple 4.4.3

On désire créer un mot de passe de 6 positions en se servant des 26 lettres de l'alphabet et des 10 chiffres. Combien de mots de passe différents peut on former ?

Solution
Comme précédemment, on a à disposition un "grande" quantité d'éléments que l'on peut utiliser plusieurs fois. En tout cela fait $26 + 10 = 36$ éléments que l'on doit placer dans 6 positions différentes.

Par le principe multiplicatif, on a

$$36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^6 = 2176782336$$

4.4.2 Calculer le nombre d'arrangements

Calculer le nombre d'arrangements de r éléments d'un ensemble en contenant n se fait selon les informations que l'on a à disposition. Il y a les permutations, qui sont des arrangements où $r = n$, c'est-à-dire où l'on prend tous les éléments à disposition et on compte le nombre de permutations différentes.

Viennent ensuite les permutations où l'on prend tous les éléments, mais certains sont à double.

Après nous avons le cas où le nombre d'éléments à ranger peut dépasser le nombre d'éléments à disposition (ce que l'on vient de voir à la page précédente).

Et finalement le cas où on désire faire des arrangements de r éléments parmi n avec $1 \leqslant r < n$.

4.4.3 Exercices

4001. Calculer le nombre

a) A_3^7
b) A_5^8
c) A_6^9
d) A_3^5
e) A_5^5
f) A_4^4

4002. Combien de nombres à trois chiffres peuvent être formés à partir des chiffres $1, 2, 3, 4$ et 5 si les répétitions sont permises et si elles ne le sont pas ?

4003. Refaire l'exercice précédent, mais pour des nombres à quatre chiffres.

4004. Combien de nombres peuvent être formés avec les chiffres $1, 2, 3$ et 4 si les répétitions ne sont pas permises ? (NB : 24 et 312 sont deux exemples.)

4005. Déterminer le nombre d'entiers positifs inférieurs à 10000 qui peuvent être formés avec les chiffres $1, 2, 3$ et 4 si les répétitions sont permises.

4006. Sachant que huit équipes de basket-ball participent à un tournoi, calculer le nombre de manières différentes d'attribuer la première, la deuxième et la troisième place, en supposant que les matchs nuls ne soient pas admis.

4007. Une fille a quatre jupes et six chemisiers. Combien de combinaisons différentes "jupe et chemisier" peut-elle porter ?

4008. Si la fille de l'exercice précédent a aussi trois pulls, combien de combinaisons différentes "jupe, chemisier et pull" peut-elle porter ?

4009. Dans un certain Etat, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une des lettres de l'alphabet, suivie de cinq chiffres $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables si

a) le premier chiffre suivant la lettre ne peut pas être 0 ;
b) la première lettre ne peut pas être N ou L et le premier chiffre ne peut pas être 0.

4010. Deux dés sont lancés, l'un après l'autre. De combien de façons différentes peuvent-ils tomber ? Puis établir la liste des possibilités différentes que la somme des chiffres affichés par les dés soit égale à

a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 11

4011. Une rangée de six sièges dans une classe, doit être remplie en choisissant des individus parmi un groupe de dix étudiants.

a) De combien de manières différentes les sièges peuvent-ils être occupés ?
b) Sachant qu'il y a quatre filles et six garçons dans le groupe et que filles et garçons doivent être alternés, calculer le nombre d'arrangements différents pour l'occupation des sièges.

4012. Un étudiant d'un établissement d'études supérieures peut suivre les mathématiques à 8, 10, 11 ou 14h ; l'anglais à 9, 10, 13 ou 14h ; et l'histoire à 8, 11, 14 ou 15h. De combien de façons différentes peut-il planifier les trois cours ?

4013. De combien de manières différentes peut-on répondre à une épreuve comportant 10 questions vrai/faux ?

4014. Dans une épreuve à choix multiple de six questions, il y a cinq choix de réponse par question. Combien y a-t-il de manières différentes de répondre à cette épreuve ?

4015. De combien de manières différentes huit personnes peuvent-elles s'asseoir dans une rangée de sièges ?

4016. De combien de manières différentes peut-on disposer dix livres sur une étagère ?

4017. Combien de signaux différents peut-on transmettre avec six drapeaux différents, en superposant trois drapeaux sur un mât ?

4018. De combien de manières différentes peut-on sélectionner cinq livres parmi une collection de douze livres ?

4019. Combien d'indicatifs radio comportant quatre lettres peut-on former si la premières lettre doit être un K ou W et si les répétitions

a) ne sont pas permises ? b) sont permises ?

4020. Il y a 24 lettres dans l'alphabet grec. Combien de confréries peut-on dénommer en choisissant trois lettres grecques si les répétitions

a) ne sont pas permises ? b) sont permises ?

4021. Combien de numéros de téléphone à sept chiffres peut-on former à partir des chiffres $0, 1, 2, \ldots, 9$, si le premier chiffre ne doit pas être 0 ?

4022. Après avoir sélectionné neuf joueurs pour un match de base-ball, l'entraîneur d'une équipe dispose les batteurs dans un ordre tel que le lanceur va battre en dernier et le meilleur batteur bat en troisième position. De combien de manières différentes peut-il ordonner le reste des batteurs ?

4023. Le client d'une banque se rappelle que $2, 4, 7$ et 9 sont les chiffres d'un code d'accès à quatre chiffres pour un distributeur automatique de billets. Malheureusement, il a oublié l'ordre des chiffres. Calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code correct.

4024. Refaire l'exercice précédent avec les chiffres $2, 4$ et 7, en sachant que l'un de ces chiffres se trouve deux fois dans le code d'accès à quatre chiffres.

4025. Trois couples mariés ont acheté des billets pour une pièce de théâtre. Chacun est assis à côté de son conjoint, et les six sièges sont sur une même ligne. De combien de manières différentes les six personnes peuvent-elles être assises ?

4026. Dix chevaux participent à une course. Si la possibilité d'une arrivée à égalité pour une place est exclue, de combien de manières différentes la première, la deuxième et la troisième place peuvent-elles être attribuées ?

4027. Les lois de commutativité et d'associativité pour l'addition garantissent que le résultat de la somme des entiers de 1 à 10 est indépendant de l'ordre dans lequel les nombres sont additionnés. De combien de manières différentes peut-on additionner ces entiers ?

4028. Sur un jeu de 52 cartes

a) combien y a-t-il de manières différentes de toutes les mélanger ?

b) de combien de manières différentes peut-on mélanger les cartes pour que les quatre as se trouvent sur le sommet du paquet ?

4029. Un palindrome est un entier, tel 45654, que l'on peut lire aussi bien depuis la gauche que depuis la droite.

a) Combien de palindromes à cinq chiffres existe-t-il ?

b) Combien de palindromes à n chiffres existe-t-il ?

4.5 Combinaisons (3)

Lorsque nous travaillons avec une collection ou ensemble d'éléments, il nous arrive de ne pas nous occuper de l'ordre des éléments.
C'est le cas lorsque nous choisissons une équipe de cinq joueurs parmi le groupe d'élèves d'une classe : l'ordre importe peu lorsqu'on veut savoir de combien de façons nous pouvons choisir une équipe différente des précédentes.

C'est ce qu'on va appeler **une combinaison**.

Définition 4.5.1 : Une combinaison

Soit E un ensemble de n éléments et soit $1 \leqslant r \leqslant n$. Une **combinaison** de r éléments de E est un sous-ensemble de E qui contient r éléments distincts.

On peut trouver la notation $C(n, r)$ ou encore nCr ou encore C_r^n (plus rarement C_n^r).

Dans ce cours nous utiliserons C_r^n pour parler du nombre de combinaisons de r éléments pris dans E qui compte n éléments en tout.

Théorème 4.5.1 : Nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons de r éléments qui peuvent être obtenues à partir d'un ensemble E de n éléments est

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \qquad \text{avec } 1 \leqslant r \leqslant n$$

4.5.1 Reconnaître des combinaisons sans répétition

Prenons un exemple.

Exemple 4.5.1

Une petite équipe de base-ball a six joueurs de champ extérieurs, sept joueurs de champ interieurs, cinq lanceurs et deux attrapeurs. Chaque joueur de champ extérieur peut jouer dans n'importe laquelle des trois positions extérieures, et chaque joueur de champ intérieur peut jouer dans n'importe laquelle des quatre positions intérieures. L'équipe doit donc être composée de 3 joueurs de champ externe, 4 de champ interne, 1 lanceur et 1 attrapeur. De combien de manières une équipe de neuf joueurs peut-elle être séléctionnée ?

Solution

On sélectionne les 3 joueurs externes : il y a $C_3^6 = 20$ choix possibles.
Ensuite les 4 joueurs internes : il y a $C_4^7 = 35$ choix possibles.
Puis le lanceur : il y a 5 choix possibles.
Et enfin l'attrapeur : il y a 2 choix possibles.

En tout, et en utilisant le principe multiplicatif, nous avons

$$20 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 2 = 7000$$

choix possibles.

Cet exemple nous donne un critère pour savoir quand faut-il utiliser la formule des combinaisons : c'est lorsque **l'ordre n'a pas d'importance**.

4.5.2 Calculer le nombre de combinaisons

Un résultat résultat "classique" de l'utilisation de la formule des combinaisons, est donné par l'exemple suivant.

Cependant une remarque s'impose. Si l'on prend la formule des arrangements

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

et celle des combinaisons

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

la seule différence est le facteur $r!$ au dénominateur. En effet, ce dernier "casse" l'ordre de l'arrangement. Puisqu'il s'agit de prendre des sous-ensembles de r éléments parmi n, les $r!$ permutations de ces éléments seront identiques dans un ensemble, qui par définition n'a pas d'ordre.

Exemple 4.5.2

Combien de mains différentes y a-t-il dans le jeu de poker ?

Solution Dans le jeu de poker, il s'agit de tirer cinq cartes parmi 52. Si on tient compte de l'ordre dans lequel les cartes ont été tirées, il y a

$$A_5^{52} = \frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!} = 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52 = 311\ 875\ 200$$

possibilités. Or dans une main de poker, l'**ordre des cartes n'a pas d'importance**. Il faut donc **diviser** les A_5^{52} possibilités par le nombre de permutations des cinq cartes. Ce qui donne

$$\frac{A_5^{52}}{5!} = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = 2\ 598\ 960$$

possibilités.

Exemple 4.5.3

Au jeu de la lotterie dont les grilles comportent 45 numéros, un joueur doit en cocher 6 pour valider sa grille. Combien y a-t-il de manières de remplir une telle grille ?

Solution Il est clair que l'**ordre** dans lequel le joueur coche les 6 numéros **n'a pas d'importance**. C'est donc un **choix** de 6 nombres parmi 45 il y a donc

$$C_6^{45} = \frac{45!}{(45-6)! \cdot 6!} = \frac{45!}{39! \cdot 6!} = \frac{40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 8\ 145\ 060$$

4.5.3 Exercices

4030. Calculer le nombre

a) C_3^7
b) C_4^8
c) C_8^9
d) C_2^6
e) C_{n-1}^n
f) C_1^n

4031. Calculer le nombre possible d'**arrangements** de couleurs pour les 12 disques donnés, alignés sur un rang.

a) 5 noirs, 3 rouges, 2 blancs, 2 verts.
b) 3 noirs, 3 rouges, 3 blancs, 3 verts.

4032. Calculer le nombre de permutations simples des lettres du mot anglais *bookkeeper* (comptable).

4033. Calculer le nombre de permutations simples des lettres du mot anglais *moon* (comptable). De plus, dresser la liste de toutes les permutations.

4034. Dix personnes désirent participer à un match de basket-ball. De combien de manières différentes peuvent être formées deux équipes de cinq joueurs ?

4035. Un étudiant doit répondre à six questions sur dix à un examen.

a) Combien de choix différents cet étudiant peut-il effectuer ?
b) Combien de choix différents peut-il effectuer si les deux premières questions sont imposées ?

4036. Considérons huit points quelconques tels que trois points ne sont pas colinéaires.

a) Combien de droites déterminent-ils ?
b) Combien de triangles déterminent-ils ?

4037. Un étudiant possède cinq livres de mathématiques, quatre livres d'histoire et huit livres de littérature. De combien de manières différentes peuvent-ils être rangés sur une étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres ?

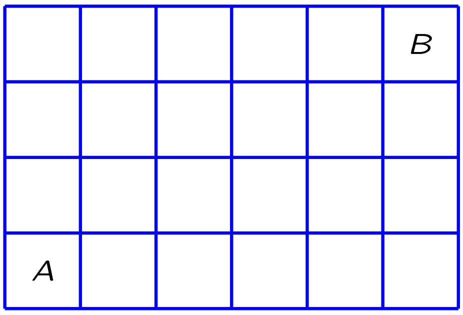
4038. Une équipe de basket-ball a douze joueurs à disposition.

a) En ne tenant pas compte des positions sur le terrain, de combien de manières une formation de cinq joueurs peut-elle être sélectionnée ?
b) Si le joueur du centre de la formation doit être choisi parmi deux individus précis de l'équipe et les quatre autres joueurs de la formation parmi les dix joueurs restants, calculer le nombre de formations différentes possibles.

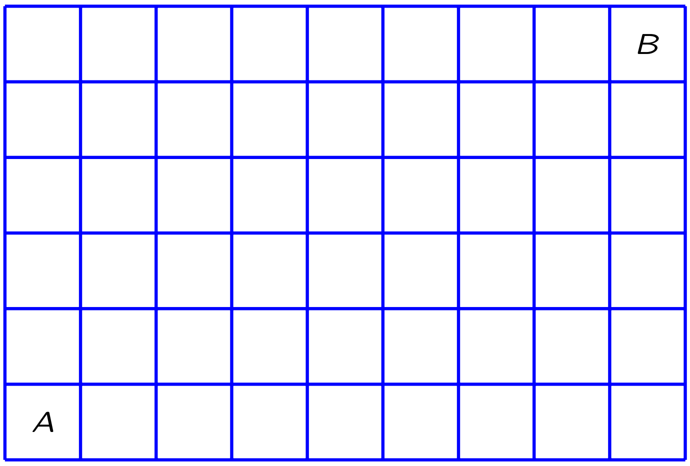
4039. De combien de manières différentes sept clefs peuvent-elles être arrangées dans un porte-clefs en forme d'anneau, si les clefs peuvent touner complètement autour de l'anneau ?

4040. Posons que les lettres F et G désignent, respectivement, la naissance d'une fille et la naissance d'un garçon. Pour une famille de trois garçons et de trois filles, un ordre de naissance possible est $FFFGGG$. Combien d'ordres de naissance sont possibles pour ces six enfants ?

4041. Combien de chemins y a-t-il entre les points A et B, si les déplacements ne peuvent être faits que vers la droite ou vers le haut ?



4042. Même question que pour l'exercice précédent.



4043. Pour gagner à un tirage de la loterie nationale, un joueur doit sélectionner correctement six numéros parmi les numéros 1 à 49.

a) Calculer le nombre total de sélections possibles.

b) Refaire a) en sachant qu'un joueur ne sélectionne que les nombres pairs.

4044. Un département de mathématiques a dix enseignants, mais seulement neuf bureaux, ce qui fait qu'un bureau doit être partagé par deux personnes. De combien de manières différentes les bureaux peuvent-ils être attribués ?

4045. Dans un tournoi de tennis, chaque joueur rencontre chaque autre joueur une seule fois. Combien de joueurs peuvent participer à un tournoi comportant 45 matchs ?

4046. Un test vrai/faux comprend 20 questions.

a) De combien de façons différentes peut-on répondre à ce test ?

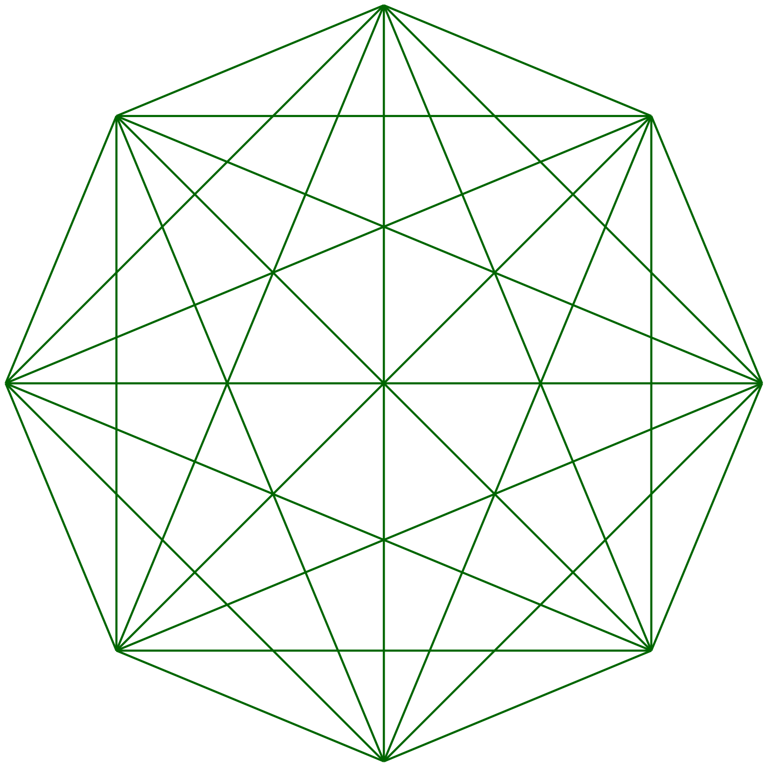
b) De combien de façons différentes un étudiant peut-il répondre correctement à dix questions ?

4047. L'équipe gagnante du championnat de basket-ball NBA est celle qui gagne quatre matchs parmi un maximum de sept matchs contre l'autre équipe finaliste. De combien de manières différentes peuvent se dérouler les matchs pour en arriver à un septième match ?

4048. Un dessin de géométrie est formé en joignant chaque paire de sommets d'un octogone (voir la figure).

a) Combien de triangles sur le dessin ont leurs trois sommets sur l'octogone ?

b) Combien de quadrilatères sur le dessin ont leurs quatre sommets sur l'octogone ?



4049. Un marchand de glaces a en stock 31 parfums différents. Il se vante de proposer environ 4 500 glaces différentes à trois boules, chaque boule étant d'un parfum différent. Comment ce nombre a-t-il été obtenu ?

4050. Un fast-food se vante de proposer n'importe quelle combinaison de 8 condiments dans un hamburger, ce qui représente 256 variantes pour le consommateur. Comment ce nombre a-t-il été obtenu ?

5.1 Introduction aux probabilités (12)

5.1.1 Connaître la notation ensembliste (cardinal, union, intersection, ensemble vide)

Dans ce chapitre, on utilise la notation ensembliste des objets qui modélisent les situations étudiées. Ainsi

Définition 5.1.1 : Ensemble

Un **ensemble** est une collection non ordonnée d'objets ayant un caractère commun. Les objets d'un ensemble sont appelés ses **éléments**. Un même élément ne peut figurer plus d'une fois dans un ensemble.

Par exemple, on peut parler de l'ensemble des nombres entiers positifs

$$\mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 47,\ 48,\ 49, \ldots\}$$

qui est un ensemble infini. On peut aussi avoir des ensembles finis comme par exemple l'ensemble des jours de la semaine

$$\text{Jsem} = \{\text{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}\}$$

ou encore l'ensemble des chiffres de la base dixième

$$\text{Chiffres} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

Lors de l'utilisation des ensembles, on utilise des symboles particuliers, ainsi qu'un vocabulaire approprié. On appelle, par exemple **ensemble vide**, un ensemble qui ne contient aucun élément. Ce dernier est noté du symbole $\emptyset$. Au moment de l'utiliser, inutile de l'entourer d'accolades, ce symbole signifie déjà "ensemble".

On sera amené aussi à parler de l'appartenance d'un élément à un ensemble, pour ce faire on utilise le symbole $\in$ de cette façon :

$$15 \in \mathbb{N}$$

et qui veut dire "l'élément 15 appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$".

Lorsqu'on veut, au contraire dire que tel ensemble fait partie de tel autre ensemble, on dira qu'il est **inclus**. On utilise le symbole $\subset$, $\subseteq$, pour dire l'inclusion stricte ou l'inclusion qui peut être une égalité. Par exemple

$$\{15\} \subset \mathbb{N}$$

$$\{\text{lundi, mercredi}\} \subset \text{Jsem}$$

$$\emptyset \subset \mathbb{N}$$

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\} \subseteq \text{Chiffres}$$

Et lorsque deux ensembles ont les mêmes éléments, on dit qu'ils sont égaux

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\} = \text{Chiffres}$$

Soit A un ensemble. On peut donner la définition de cet ensemble en **extension** ou en **compréhension**.

La première donne, sous forme de liste, les éléments constituant l'ensemble Chiffres $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, par exemple.

La seconde donne les éléments de l'ensemble est explicitant une condition sur les éléments. L'avantage de cette dernière est que l'on peut donner les conditions pour des ensembles infinis :

$$A = \{x \mid 1 \leq 2x + 1 \leq 3\}$$

qui est l'ensemble des nombres de l'intervalle $[1; 3]$ de la forme $2x + 1$.

$$B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}^*\}$$

qui est l'ensemble des nombres pairs, c'est deux ensembles infinis.

Pour parler de la mesure d'un ensemble on utilise la notion de cardinal.

Définition 5.1.2 : Cardinal

On appelle **cardinal** d'un ensemble, le nombre d'éléments qui en font partie. On note $|E|$ la fonction qui donne le nombre d'éléments de l'ensemble E.

Dans ce cours on notera "$m(A)$", la **mesure** de l'ensemble A, c'est-à-dire que l'on a $m(A) = |A|$.

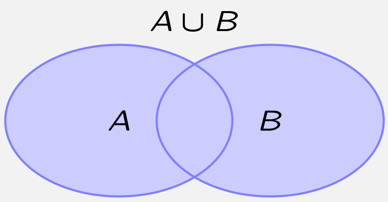
Par exemple, pour les ensembles précédents, on a les cadinalités suivantes :

$$\begin{aligned} |\text{Chiffres}| &= 10 \\ |\text{Jsem}| &= 7 \\ |\{a, b, c\}| &= 3 \\ |\{\}| &= 0 \\ |\emptyset| &= 0 \end{aligned}$$

Lorsque nous voulons associer des ensembles, on utilise deux opérations, l'union et l'intersection.

Définition 5.1.3 : Union

L'**union** de deux ensembles est la mise en commun des éléments de deux ensembles différents. Dans le nouvel ensemble ainsi formé, les éléments n'y figurent qu'une seule fois et ne sont pas ordonnés.



On écrit

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

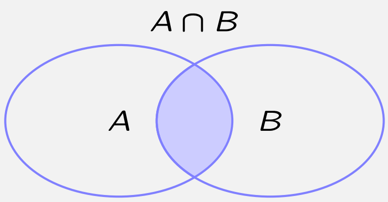
Les notations ensemblistes sont utiles pour le calcul des probabilités. Ainsi pour évaluer la mesure de l'union de deux ensembles on écrira

$$|\text{Chiffres} \cup \text{Jsem}| = |\text{Chiffres}| + |\text{Jsem}| = 10 + 7 = 17$$

Ceci est possible car **il n'y a pas d'intersection entre les deux ensembles**. Dans le cas contraire, il faut enlever les doublons, car dans un ensemble, il n'y a qu'une seule "copie" de chaque élément.

Définition 5.1.4 : Intersection

L'**intersection** de deux ensembles est la mise en commun des éléments figurant dans les deux ensembles à la fois. Dans le nouvel ensemble ainsi formé, les éléments n'y figurent qu'une seule fois et ne sont pas ordonnés.



On écrit

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, les ensembles A et B sont dit **disjoints**.

Par exemple, si $A = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors

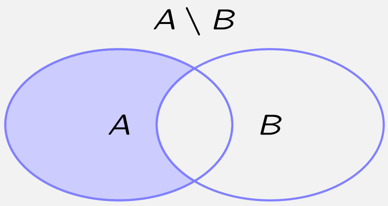
$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

et

$$|A \cap B| = |\{1, 3, 5\}| = 3$$

Définition 5.1.5 : Différence

La **différence** entre deux ensembles, A et B, est l'ensemble des éléments de A sans les éléments appartenant à l'intersection des deux ensembles.



On écrit

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Par exemple, si $A = \{1, 3, 5, 7\}$ et $B = \{x \mid x^2 = 25\}$, alors

$$A \setminus B = \{1, 3, 7\}$$

5.1.2 Connaître les notions d'univers, d'événement, de probabilité

En probabilité, nous allons établir un "ensemble des possibles" qu'on appellera **univers**. Cet ensemble contient les éléments **élémentaires** associés à l'expérience pour laquelle nous voulons évaluer les possibilités de réalisation.

Définition 5.1.6 : Univers et événement

Soit une expérience sur laquelle nous voudrions évaluer la réalisation.
L'ensemble U contenant toutes les issues de l'expérience, est appelé **univers**.
On dit alors qu'un **événement** associé à l'expérience est un sous-ensemble de U.

Pour évaluer la faisabilité ou encore la réalisation, d'un ou de plusieurs événements, on utilisera la notion de fréquence. Comme dans le langage courant, lorsqu'on dit qu'un événement a telle ou telle fréquence, on dira aussi d'une **probabilité** qu'elle est la fréquence à laquelle se produit un événement.

En s'appuyant sur les définitions précédentes on peut définir une probabilité comme une fréquence :

Définition 5.1.7 : Probabilité

Soit U l'univers de l'expérience et soit E un événement. Alors la **probabilité** de l'événement E, notée $\mathbb{P}(E)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(E) = \frac{m(E)}{m(U)}$$

où $m(E)$ est la mesure de l'ensemble E et $m(U)$ la mesure de l'ensemble U, autrement dit le nombre des éléments de E et de U respectivement.

Il faut noter que $\mathbb{P}(A)$ est une valeur numérique comprise entre 0 et 1, autrement dit que

$$\mathbb{P}(A) \in [0; 1]$$

Aussi, la mesure d'un événement E sera toujours inférieure ou égale à la mesure de l'univers U :

$$0 \leq m(E) \leq m(U)$$

puisque E est un sous-ensemble de U, $E \subset U$

5.1.3 Donner la probabilité d'événements certains, impossibles

Exemple 5.1.1

On lance deux dés, l'un après l'autre. Quelle est la probabilité que le nombre constitué par le chiffre du premier dé et celui du second dé soit un multiple de sept ?

Solution

On commence par établir, au moins, la mesure de l'univers. Par le principe multiplicatif, ayant 6 issues possibles pour le premier dé et 6 autres pour le second dé, on a $m(U) = 6 \cdot 6 = 36$.

Lorsqu'on arrive à écrire en extension U, il est bon d'en écrire quelques éléments. Voici les 36 éléments de U :

$$\begin{aligned} U = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

Puis on établit la liste de tous les multiples de 7 inférieurs à 66 :

$$M_7 \supset \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63\}$$

Ainsi l'ensemble des issues favorables est

$$A = \{(1,4),(2,1),(3,5),(4,2),(5,6),(6,3)\}$$

ce sont tous les éléments de U dont le nombre, construit en prenant le chiffre du premier dé comme celui des dizaines et le chiffre du second comme celui des unités, est un multiple de 7.

Après avoir lancé deux dés, l'un après l'autre, la fréquence à la quelle on a un des éléments de l'ensemble A est appelée la probabilité de A :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(U)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 = 16{,}7\,\%$$

Exemple 5.1.2

Lors d'un lancer de deux dés, quel est la probabilité que la somme des chiffres montrés par les dés soit 13 ?

Solution
En prenant l'univers de de l'exemple précédent, nous constatons que la somme minimal des chiffres des deux dés est 2 et que la somme maximale des chiffres des deux dés est 12.

Donc si on pose

$$B = \{x + y \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } x + y = 13\}$$

on voit bien que $m(B) = 0$, donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{m(B)}{m(U)} = \frac{0}{36} = 0$$

On dit alors que l'événement B est **impossible**.

Exemple 5.1.3

Lors d'un lancer de deux dés, quel est la probabilité que le carré de la somme des chiffres montrés par les dés soit inférieur 145 ?

Solution
En prenant l'univers de de l'exemple précédent, nous constatons que la somme maximale des chiffres des deux dés est 12. Ainsi le carré de 12 étant égal à 144, on peut dans doute dire que c'est un événement que arrive tout le temps.

Formalisant l'événement, posons

$$C = \{x + y \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } (x + y)^2 \leq 145\}$$

on voit bien que $m(C) = 36$, donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{m(C)}{m(U)} = \frac{36}{36} = 1$$

On dit alors que l'événement C est **certain**.

5.1.4 Déterminer la probabilité d'un événement dans une situation d'équiprobabilité

Lorsqu'on va calculer une probabilité, on doit commencer par voir si toutes les possibilités des issues de l'expérience ont "les mêmes chances" de se réaliser.

On parle dans ce cas d'**équiprobabilité**, autrement dit que la probabilité de chaque événement élémentaire de l'univers a la même probabilité de se réaliser. Dès lors on peut facilement calculer la probabilité de chaque élément de l'ensemble U,

$$\frac{1}{m(U)}$$

La théorie des probabilités, établit que la somme des probabilités de tous les événements de l'univers, autrement dit de ces éléments, doit être égale à 1

$$\sum_{i=1}^{m(U)}\left(\frac{1}{m(U)}\right) = \frac{1}{m(U)} + \frac{1}{m(U)} + \frac{1}{m(U)} + \ldots + \frac{1}{m(U)} = 1$$

Cependant, il n'est pas toujours possible d'avoir une équiprobabilité. Malgré cela, il reste possible de calculer la probabilité comme nous l'avons défini : comme le rapport du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles de l'expérience considérée.

Exemple 5.1.4

Supposons que cinq cartes soient tirées d'un jeu de cartes. Calculer la probabilité que les cinq cartes soient des coeurs.

Solution

Dans un jeu de cartes, les chances de tirer une carte ou une autre est la même. On est donc dans un cas d'équiprobabilité.

L'univers U de l'expérience est l'ensemble de toutes les mains possibles de cinq cartes qui peuvent être formées à partir des 52 cartes d'un jeu de cartes. D'après ce que nous avons vu au chapitre sur la combinatoire,

$$m(U) = C_5^{52}$$

Notons E l'événement "une main de cinq cartes composée que de coeurs". Comme il y a 13 cartes dans la famille des coeurs, le nombre de manières différentes d'obtenir une main qui contienne cinq coeurs est $m(E) = C_5^{13}$. Donc, la probabilité est

$$\mathbb{P}(E) = \frac{m(E)}{m(U)} = \frac{C_5^{13}}{C_5^{52}} = \frac{13!}{5! \cdot 8!} \cdot \frac{5! \cdot 47!}{52!} \approx 0{,}000\ 5 = 0{,}05\,\%$$

Exemple 5.1.5

Soit un dé "pipé", pour lequel le 3 a deux fois plus de chance de sortir que les autres chiffres. Si on lance une fois ce dé, quelle est la probabilité que le chiffre affiché soit un nombre impair ?

Solution
La première chose à faire est d'établir l'univers des événements. Comme le 3 a deux fois plus de chances de sortir, on va le doubler dans l'ensemble des événements. Cependant, comme on ne peut pas avoir deux éléments identiques dans un ensemble, nous allons différencier les deux versions du chiffre 3 en leur collant un idice :

$$U = \{1, 2, 3_1, 3_2, 4, 5, 6\} \qquad m(U) = 7$$

Notons E = 'obtenir un chiffre impair' $= \{1, 3_1, 3_2, 5\}$ l'événement dont on veut connaître la probabilité. Calculons sa mesure : $m(E) = 4$. Alors

$$\mathbb{P}(E) = \frac{m(E)}{m(U)} = \frac{4}{7} \approx 0{,}57 = 57\,\%$$

5.1.5 Utiliser le théorème de l'union

À la section précédente, nous avons vu que deux ensembles dont l'intersection est vide, sont dits **disjoints**. Cette même notions se présente dans le domaine des événements : deux événements sont **incompatibles** si leurs ensembles sont disjoints. Autrement, dit, si l'un des événements se réalise, l'autre ne se réalise pas et inversement.

Théorème 5.1.1 : Événements incompatibles

Soient A et B deux événements incompatibles, c'est-à-dire tels que

$$A \cap B = \emptyset$$

alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Ce résultat est valable quelque soit le nombre d'événements incompatibles.

Exemple 5.1.6

On lance deux dés. Quelle est la probabilité que la somme de leurs chiffres soit 7 ou 9 ?

Solution
On établit l'univers :

$$U = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (1,6)(2,1), \ldots, (2,6), \ldots, (6,6)\}$$

et sa mesure : $m(U) = 36$.

On fait de même avec l'événement

$$\begin{aligned}A =& \{x+y \mid (x,y) \in U \text{ et } x+y=7\}\\ =&\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \qquad m(A)=6\end{aligned}$$

et l'événement

$$\begin{aligned}B =& \{x+y \mid (x,y) \in U \text{ et } x+y=9\}\\ =&\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} \qquad m(B)=4\end{aligned}$$

Et maintenant le calcul qui est une application du théorème des événements incompatibles. En effet il n'y a aucune intersection entre les ensembles A et B, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) =& \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\\ =& \frac{6}{36} + \frac{4}{36}\\ =& \frac{10}{36} \approx 0{,}28 = 28\,\%\end{aligned}$$

En général, les événements peuvent être compatibles. Dans ce cas leurs ensembles respectifs, partagent des éléments et le théorème précédent ne s'applique pas. On peut alors invoquer le théorème suivant :

Théorème 5.1.2 : Union d'événements

Soient A et B deux événements quelconques. Alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Ce théorème dit, comme le précédent, que la probabilité qu'un événement ou un autre se réalise vaut la probabilité que l'un se réalise plus la probabilité que l'autre se réalise, moins la probabilité que les deux se réalisent en même temps.

Exemple 5.1.7

Soit le dé pipé de l'exemple précédent. Son univers est U :

$$U = \{1, 2, 3_1, 3_2, 4, 5, 6\}$$

Quelle est la probabilité qu'en lançant un dé on obtienne un nombre impair ou un multiple de trois ?

Solution
On a $m(U) = 7$. Si on pose que

$$A = \text{'obtenir un chiffre impair'} = \{1, 3_1, 3_2, 5\} \qquad m(A) = 4$$
$$B = \text{'obtenir un multiple de trois'} = \{3_1, 3_2, 6\} \qquad m(B) = 3$$

et

$$A \cap B = \{3_1, 3_2\} \qquad m(A \cap B) = 2$$

Alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \approx 0{,}71 = 71\,\%$$

Exemple 5.1.8

Si 13 cartes sont tirées d'un jeu de cartes, quelle est la probabilité qu'au moins deux cartes soient des coeurs ?

Solution
Si on note $k \in \mathbb{N}$ le nombre de coeurs tirées, alors $\mathbb{P}(k)$ est sa probabilité et une réponse à la question posée est

$$\mathbb{P}(2) + \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(4) + \cdots + \mathbb{P}(13)$$

et il faut faire ce long et pénible calcul.

Or on peut obtenir le même résultat en calculant le complément à un de la probabilité de n'obtenir aucun coeur ou un seul : $\mathbb{P}(0)$ et $\mathbb{P}(1)$

$$1 - (\mathbb{P}(0) + \mathbb{P}(1))$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer ces deux probabilités, sachant que $m(U) = C_9^{52}$. La probabilité de ne tirer aucun coeur est égale à

$$\frac{m(\text{tirer aucun coeur sur 13 cartes})}{m(U)} = \frac{C_{13}^{39}}{C_{13}^{52}} \approx 0{,}012\,8 = 1{,}28\,\%$$

$$\frac{m(\text{tirer un seul coeur sur 13 cartes})}{m(U)} = 13 \cdot \frac{C_{12}^{39}}{C_{13}^{52}} \approx 0{,}080\,1 = 8{,}01\,\%$$

Et le résultat final

$$1 - (\mathbb{P}(0) + \mathbb{P}(1)) \approx 1 - (0{,}012\,8 + 0{,}080\,1) = 0{,}907\,1 = 90{,}71\,\%$$

5.1.6 Calculer la probabilité d'une intersection d'événements indépendants

Donnons un dernier théorème impliquant des événements dits **indépendants**. De tels événements sont ceux qui n'influencent pas la réalisation des autres.

Théorème 5.1.3 : Événements indépendants

Si deux événements A et B non vides, sont indépendants, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Le théorème dit que la probabilité de deux événements indépendants est le produit de la probabilité de chacun d'eux.

ATTENTION : l'intersection de ces deux événements n'est pas vide. En effet, si tel était le cas on aurait

$$A \cap B = \emptyset$$

et

$$m(A \cap B) = 0$$

et

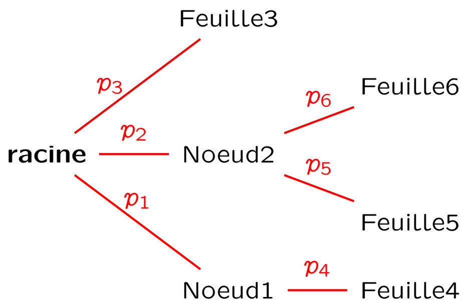
$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0$$

et le théorème précédent ne peut être appliqué. Ce qui veut dire aussi que les événements A et B ne seraient pas indépendants.

5.2 Diagramme en arbre et probabilité du chemin (3)

Comme montré aux chapitre précédent (4.2), un arbre est constitué d'une racine, de noeuds, de branches et de feuilles.

Il est coutume d'ajouter au-dessus des branches, la probabilité que cet événement survienne :



Notez que la somme des probabilités d'un noeud doit être égale à 1 :

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{racine} & p_1 + p_2 + p_3 & = & 1 \\ \textbf{Noeud1} & p_5 + p_6 & = & 1 \\ \textbf{Noeud2} & p_4 & = & 1 \end{array}$$

Il est possible de répondre à d'autres questions, comme par exemple

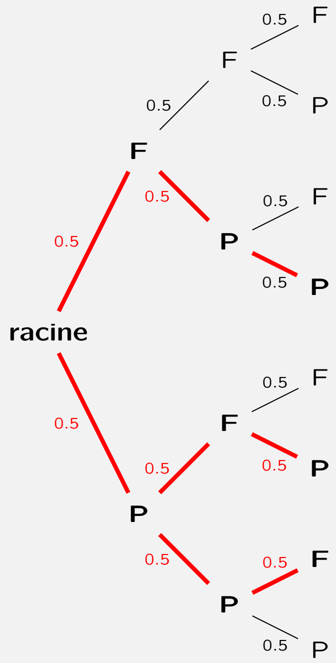
$$\begin{array}{lcl} \textbf{Probabilité } \mathbb{P} \textbf{ que "Feuille6" se réalise ?} \quad \mathbb{P} & = & p_2 \cdot p_6 \\ \textbf{Probabilité } \mathbb{P} \textbf{ que "Feuille5" se réalise ?} \quad \mathbb{P} & = & p_2 \cdot p_5 \\ \textbf{Probabilité } \mathbb{P} \textbf{ que "Feuille4" se réalise ?} \quad \mathbb{P} & = & p_1 \cdot p_4 \\ \textbf{Probabilité } \mathbb{P} \textbf{ que "Feuille3" se réalise ?} \quad \mathbb{P} & = & p_3 \end{array}$$

5.2.1 Construire un arbre de probabilité et l'utiliser pour déterminer la probabilité d'un événement

Exemple 5.2.1

Lancer une pièce de monnaie trois fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois pile.

Solution
On trace un arbre de toutes les possibilités



Puis on compte le nombre de "feuilles", qui est la mesure de l'univers, ensuite on compte le nombre de chemins : "noeud-branche-noeuds-$\cdots$-feuille" où figurent **exactement** deux P. On fait le rapport et on a la probabilité recherche :

$$\mathbb{P}(PP) = \frac{m(PP)}{m(U)} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Une autre manière de faire la somme des probabilités des chemins ayant exactement deux fois P (ceux en gras dans l'arbre). Cece se fait en **multipliant** les probabilités des branches du chemin. Un chemin équivaut à une possibilité, un autre chemin équivaut à une autre possibilité. Au total on a soit tel chemin, soit tel autre, soit encore tel autre etc., qui vérifient l'événement dont on cherche à calculer la probabilité. Ici cela donne

$$\mathbb{P}(PP) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$$

5.2.2 Exercices

5001. Une carte est tirée d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer

a) un roi ?
b) un roi ou une reine ?
c) un roi, une reine ou un valet ?

5002. Une carte est tirée d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer

a) un coeur ?
b) un coeur ou un carreau ?
c) un coeur, un carreau ou un trèfle ?

5003. Un dé est lancé. Calculer la probabilité que le dé donne

a) un 4.
b) un 6.
c) un 4 ou un 6.

5004. Un dé est lancé. Calculer la probabilité que le dé donne

a) un nombre pair.
b) un nombre divisible par 5.
c) un nombre pair ou un nombre divisible par 5.

5005. Une urne contient cinq balles rouges, six balles vertes et quatre balles blanches. Si une seule balle est extraite de l'urne, calculer la probabilité que la balle soit

a) rouge.
b) verte.
c) rouge ou blanche.
d) blanche.
e) verte ou blanche.
f) non verte.

5006. Deux dés sont lancés. Calculer la probabilité que leur somme soit

a) 11.
b) 8.
c) 11 ou 8.
d) plus grande que 9.
e) un nombre impair.

5007. Trois dés sont lancés. Calculer la probabilité que

a) la somme soit 5.
b) un 6 soit obtenu sur exactement un dé.

5008. Si trois pièces de monnaie sont lancées en l'air, calculer la probabilité d'obtenir exactement deux faces.

5009. Si quatre pièces de monnaie sont lancées en l'air, calculer la probabilité d'obtenir deux faces et deux piles.

5010. Un boîte contient 3 jetons : un rouge, un vert et un bleu. Écrire l'univers associé à chacune des expériences suivantes

a) On tire un jeton au hasard de cette boîte. On l'y remet, puis on en tire un second.
b) On tire un jeton au hasard de cette boîte. On le garde, puis on en tire un second.

5011. On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et l'on s'intéresse au côté qu'elle présente.

a) Écrire l'univers associé à cette épreuve dans le cas où l'ordre d'apparition des côtés a une importance, puis écrire l'événement "pile apparaît au moins deux fois".

b) Comme dans l'item a), dans le cas où l'ordre d'apparition des côtés n'a pas d'importance.

c) Combien d'issues l'univers demandé sous a) contient-il si on jette la pièce 4 fois au lieu de 3 ? Et si on jette la pièce n fois ?

5012. Une urne contient trois billes blanches et deux billes noires. Déterminer le nombre d'issues de l'univers dans les épreuves suivantes :

a) On tire successivement les 5 billes de l'urne, sans remise.

b) On tire successivement 5 billes de l'urne, avec remise.

c) Comme en b), mais on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les couleurs apparaissent.

5013. On jette une pièce de monnaie quatre fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir

a) deux fois pile, puis deux fois face ?

b) deux fois pile et deux fois face (ordre quelconque) ?

c) au moins une fois pile ?

d) pile au dernier jet ?

5014. Dans un lot de 12 ampoules, 4 sont défectueuses. On y choisit au hasard 4 ampoules. Calculer la probabilité d'en avoir au moins une bonne.

5015. Une boîte contient 6 billets numérotés de 1 à 6. On les tire au hasard un à un de la boîte. Quelle est la probabilité

a) de les obtenir dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

b) de tirer les nombres pairs avant les impairs ?

c) que le 1 sorte juste avant le 2 ?

5016. On jette une pièce de monnaie 10 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir

a) au moins une fois pile.

b) au moins 2 fois pile.

c) exactement 5 fois pile.