ECG Ella-Maillart

MATH
EM
ATIQUE
3^e

OS Pédagogie

Robinson Cartez
2024-2025 v0.1
Genève

Table des matières

Table des matières

1.1 Concepts de base (2)

1.1.1 Objectifs

Comprendre ce qu'est une démonstration mathématique. Connaître des exemples simples de démonstration mathématique. Savoir ce que l'étude de la démonstration mathématique peut vous apporter.

1.1.2 Importance de la démonstration mathématique

En apprenant à démontrer des énoncés mathématiques, vous apprendrez à réfléchir de manière posée, ordonnée et logique. Vous apprendrez à observer, à essayer, à accepter de vous tromper et à recommencer. Ce faisant vous développerez votre intuition, à travailler en groupe et si nécessaire recommencer le travail pour l'améliorer.

L'étude de la démonstration mathématique vous enseigne à vous poser des questions. Les élèves sont malheureusement trop souvent formés à savoir répondre et pas toujours à savoir poser des questions, à se poser des questions.

1.1.3 Les énoncés

L'objet central d'une démonstration est l'énoncé.

Définition 1.1.1

Un **énoncé** mathématique est une phrase qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux.

Cette notion de *vrai, faux* est purement issue de la logique dont nous verrons les fondamentaux dans ce document. Cela n'a pas grand chose à voir avec la notion de « juste » ou « réel », deux concepts utilisés au quotidien. En logique mathématique on peut accepter un énoncé comme vrai, alors qu'il est totalement contre intuitif. Voici quelques exemples d'énoncé :

1. « 2+5=7 »
2. « 5=2 »
3. « Il y a une infinité de nombres premiers »
4. « Tous les chevaux sont blancs »
5. « Supposons que $x^2 = 2$, alors x n'est pas rationnel »

Ce sont tous des énoncés qui sont soit vrai, soit faux. Cependant, il est des énoncés qui ne sont pas des énoncés. Le plus connu est le premier de la liste, les autres le sont un peu moins :

1. « Cet énoncé est faux »
2. « Sois honnête ! »
3. « x est un nombre impair »

Le premier de la liste est ce qu'on appelle un paradoxe, il fait référence à lui-même. Le deuxième est une injonction et pour le dernier nous manquons d'information pour statuer sur sa véracité mathématique : cela dépend de la valeur de x.

1.1.4 Hypothèse, conclusion

Un énoncé mathématique, pour pouvoir en évaluer sa valeur de vérité, nécessite d'informations de base. Outre les connaissances mathématiques de celui qui tente de le démontrer, il y a ce que l'on suppose connu et vrai avant de statuer. C'est ce qui est appelé **les hypothèses**.

Cette partie de l'énoncé doit être prise comme acquise et peut (doit) être utilisée dans l'argumentation de la preuve.

Vient ensuite la partie qui doit être déduite logiquement de ces hypothèses, **la conclusion**. Cette partie ne peut pas (ne doit pas) être utilisée dans la démonstration. En effet, une bonne démonstration montre que cette conclusion peut être déduite des hypothèses, par une suite d'arguments bien ordonnés.

Il faut donc « démasquer » les hypothèses et la (les) conclusion(s) de l'énoncé avant de pouvoir le démontrer. Un exemple de structure d'énoncé très souvent rencontré est le suivant :

Si **hypothèse** alors **conclusion**

1.1.5 Le tiers exclu

Un grand, très grand, nombre de théorèmes mathématiques sont basés sur le **principe du tiers exclu**. Il s'agit d'une attitude binaire face aux énoncés : ils sont soit vrai, soit faux. Autrement dit, quelque chose qui pourrait être à la fois vrai et faux est exclu du champ des possibilités. L'énoncé suivant est impossible à démontrer, il est certainement, soit vrai, soit faux, mais il n'y a pas de moyen d'en établir la valeur de vérité :

« Le week-end passé j'ai vu trois écureuils se chamailler au sommet d'un arbre. »

1.1.6 Exemples de démonstration

Exemple 1.1.1

Montrer que « La somme de nombres pairs est pair ».

Solution La première chose est de reconnaître ce qu'on appelle l' « hypothèse » puis la « conclusion ».

Ensuite on raisonne en assumant que l'hypothèse est vraie, tout en déduisant des faits, en espérant que l'une des conclusions intermédiaires sera la conclusion cherchée.

Démonstration. Soient a et b deux nombres pairs. En tant que tels nous savons qu'ils sont des multiples de 2. On peut alors les écrire comme des multiples de deux. Pour ce faire on prend deux autres nombres entiers quelconques, disons n et m et on écrit

$$a = 2n \qquad b = 2m$$

Puisque nous devons conclure que la somme de deux nombres pairs est aussi un nombre pair, en additionnant a et b nous esperons obtenir un nombre pair, c'est-à-dire un multiple de 2.

On additionne donc a et b :

$$\begin{aligned} a+b &= 2n+2m \\ &= 2(n+m) \end{aligned}$$

Ainsi $2(n+m)$ est un nombre pair aussi. Nous avons donc démontré que si a est pair et que si b est pair, alors leur somme est aussi un nombre pair. C'est ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple 1.1.2

Est-ce que la phrase suivante est un énoncé ? « Tout nombre entier plus grand que 4 est la somme de deux nombres premiers. »

Solution Oui, il s'agit d'un énoncé mathématique.

En effet, il s'agit de la **conjecture de Goldbach**. On se sait pas encore si elle est vraie ou si elle est fausse. L'hypothèse est « Tout nombre entier plus grand que 4 ». La conclusion est « est la somme de deux nombres premiers. ».

Parmi les hypothèses, il faut aussi compter sur la définition de nombre premier, de nombre entier et de la somme de nombres entiers. Toutes les opérations sur les entiers sont utilisables dans l'argumentation. La seule chose que l'on ne peut pas utiliser est affirmer que tout nombre entier plus grand que 4 est somme de deux nombres premiers, car c'est justement ce que l'on veut prouver.

1.1.7 Exercices

1001. Lesquelles de ces phrases sont-elles des énoncés ? Expliquez.

   (a) Aristote était grec.

   (b) Aristote était grand.

   (c) Le nombre $\sqrt{2}$ est rationnel.

   (d) La racine carrée d'un entier est un nombre rationnel.

   (e) $3x^2 + 20x - 5 = 0$

   (f) Soit x un nombre entier. Alors $\sqrt{x}$ est rationnnel.

   (g) Il existe un nombre x tel que $\sin(x) = x$.

   (h) Il y a une infinité de nombres naturels.

   (i) Il y a une infinité de nombres rationnels.

1002. Dire, pour les énoncés suivants, quelle est la partie hypothèse et quelle est partie est la conclusion.

(a) La somme des n premiers entiers positifs est $n(n+1)/2$.

(b) L'équation quadratique $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions réelles dans le cas où $b^2-4ac>0$, où $a\neq 0$, b et c sont des nombres réels donnés.

(c) Deux droites tangentes aux extrémités du diamètre d'un cercle sont parallèles.

1003. Montrer que la somme de deux nombres impairs est toujours un nombre pair.

1004. Montrer que l'écriture du nombre 30!, en base 10, comporte 7 zéros.

1005. Montrer que n^2+3n+7 est impair pour tout n entier.

1.2 Logique mathématique (2)

1.2.1 Objectifs

Apprendre quels sont les objets principaux de la logique mathématique utilisés dans les démonstrations. Se convaincre du bien fondé des notions de base de la logique en utilisant la table de vérité. Apprendre les mots-clé de la logique utilisés en mathématique.

1.2.2 Notion de proposition

Une proposition est un énoncé. Une phrase contenant un verbe et un complément, bien que parfois on utilise le langage de l'algèbre, des expressions algébriques.

Ces propositions sont connectées entre elles par des mots clé, des symboles, pour créer d'autres propositions. Ces symboles ou mots clé sont les connecteurs logiques.

Il existe une liste de mots-clé ou termes souvents utilisés en démonstration qu'il faut connaître. La voici :

1. **Définition** : explication sur la signification mathématique d'un mot.
2. **Théorème** : un énoncé vrai très important.
3. **Proposition** : un énoncé vrai, moins important que le théorème, mais néanmoins intéressant.
4. **Lemme** : un énoncé vrai utilisé pour démontrer d'autres énoncés vrais.
5. **Corollaire** : un énoncé vrai qui est une simple déduction d'un théorème ou d'une proposition.
6. **Démonstration** : établissement de la vérité d'un énoncé.
7. **Conjecture** : un énoncé que l'on pense être vrai, mais dont on n'a pas la démonstration.
8. **Axiome** : une supposition de base pour une situation mathématique admise sans démonstration.

1.2.3 Les connecteurs logiques

Les connecteurs logiques sont des symboles utilisés pour travailler avec des énoncés, des propositions, pour les combiner entre elles afin de traduire du langage une situation donnée ou bien pour exprimer un argument.

La compréhension de ces connecteurs est grandement facilitée par l'étude de leurs tables de vérité. Puisqu'il s'agit de se prononcer sur la véracité des énoncés, les connecteurs en questions appliqués aux propositions, permettent d'en déduire la valeur de vérité logique.

En voici la liste :

1. $\neg$: c'est un connecteur « unaire » qui a besoin d'un seul argument et il change la valeur de vérité de son argument de vrai (V) à faux (F) et vice-versa.
2. $\wedge$: c'est le « et » logique, un connecteur binaire (a donc besoin de deux arguments), qui impose que les deux propositions soient prise en compte **en même temps**.

3. $\vee$: c'est le « ou » logique, un connecteur binaire, qui s'intéresse soit au premier argument soit au second.
4. $\Rightarrow$: c'est l' « implication » logique, un connecteur binaire, qui déduit la valeur de vérité des arguments, dans l'ordre donné : le premier implique le second.
5. $\Leftrightarrow$: c'est le connecteur « équivalence » ou « si et seulement si », connecteur binaire établissant la valeur de vérité des deux arguments.

Nous pouvons rencontrer ces connecteurs dans les énoncés et les démonstrations, mais en général ce n'est pas le cas. En effet, comme chacun d'entre eux a une signification dans le langage écrit, c'est en français que nous rencontrerons ces connecteurs dans les énoncés. Parfois le connecteur peut être caché dans la structure de la phrase et c'est à nous de les trouver.

Ils sont vraiment utiles lorsqu'il s'agira de choisir la méthode de démonstration ou de raisonnement d'un énoncé.

Ces connecteurs sont aussi importants, en ce qui nous concerne, dans le calcul des probabilités. En effet, dans ce chapitre là, nous utilisons beaucoup le « et » et le « ou », et à l'heure d'écrire un argument, il est utile de se servir de ces symboles pour poser des expressions précises.

1.2.4 Tables de vérité

Les tables de vérité sont très utiles dans l'apprentissage de la logique, mais le mathématicien ne l'utilise pas dans son travail de tous les jours. L'idée est de synthétiser dans un tableau toutes les possibilités de vérité ou non d'une proposition.

Dans ce qui suit, $A, B, C, \ldots$ représentent des énoncés susceptibles d'être vrais ou faux.

La négation

Ce connecteur, dans $\neg A$, se lit « non A ».

A	$\neg A$
V	F
F	V

La table est construite comme suit. Comme il s'agit d'un connecteur unaire, il n'y a qu'une seule colonne A. Chaque ligne de cette colonne contient toutes les possibilités pour cette proposition : V pour la première et F pour la seconde. Nous verrons que quand il y a deux arguments, il y aura plus de lignes.

La colonne $\neg A$ contient la négation de la colonne A pour chaque valeur possible de A.

La lecture de cette table se fait comme suit : Si A est vraie, alors « non A » est faux. Si A est faux, alors « non A » est vrai.

La conjonction

Ce connecteur, dans $A \wedge B$, se lit « A et B ».

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Il s'agit de la conjonction de A et B, autrement dit les deux propositions sont prises en considération en même temps. Comme nous avons un connecteur binaire, il y a deux arguments, donc deux colonnes. Sous chaque colonne nous trouvons toutes les possibilités de vérité de deux propositions : $2^2 = 4$, c'est le nombre de lignes de la table de vérité. Si nous devions avoir trois colonnes, le calcul serait $2^3 = 8$ lignes.

La signification est que pour qu'une conjonction entre deux propositions soit vraie, il faut que chacune d'entre elles le soit.

La disjonction

Ce connecteur, dans $A \vee B$, se lit « A ou B ».

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Pour résumer cette table : la proposition composée $A \vee B$ est vraie lorsque l'une, l'autre ou les deux propositions sont vraies. La proposition composée est fausse lorsque les deux sont fausses.

Implication

Ce connecteur, dans $A \Rightarrow B$, se lit « si A alors B ».

Dans l'expression, A fait référence à l'hypothèse et B à la conclusion.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La table de vérité de l'implication semble bien particulière. Certains scientifiques pensent que l'interprétation mathématique de l'implication est bien loin de l'interprétation que l'on peut faire en français de l'énoncé qu'elle véhicule. Cependant, c'est exactement les valeurs de cette table que les mathématiciens donnent à l'implication.

Le seul moyen pour qu'une implication mathématique soit fausse est lorsque l'hypothèse est vraie et la conclusion fausse. Faux peut impliquer faux et peut impliquer vraie, mais en aucun cas vrai peut impliquer faux.

On retrouve cette implication de différentes manières dans les énoncés, par exemple toutes les énoncés suivants sont tous $A \Rightarrow B$:

Si A alors B,

A implique B,

A est une condition suffisante pour B,

B est une condition nécessaire pour A.

Équivalence

Ce connecteur, dans $A \Leftrightarrow B$, se lit « A si et seulement si B ».

Dans l'expression, on exprime le fait que A est équivalent (logiquement) à B.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ce connecteur est aussi appelé **bi-conditionnel** ou encore **double implication**. Il donne la valeur vrai à l'expression que si les deux arguments ont la même valeur de vérité.

Dans certains textes mathématiques, cette double implication s'écrit « A est une condition nécessaire et suffisante pour B ».

1.2.5 Exemples de questions

Exemple 1.2.1

Donner la table de vérité de $A \Rightarrow (B \vee C)$.

Solution Pour ce faire on identifie le nombre de propositions. Ici trois. On aura donc un tableau de $2^3 = 8$ lignes regroupant toutes les possibilités de vérité des ces trois propositions.

Puisque nous avons des connecteurs unaires et binaires, on crée des colonnes supplémentaires, autres que pour A, B et C, qui traitent deux colonnes précédemment écrites.

La dernière colonne représente, toujours, la proposition dont on cherche à évaluer la valeur de vérité.

A	B	C	$B \vee C$	$A \Rightarrow (B \vee C)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

Exemple 1.2.2

Donner la table de vérité de $\neg(A \Rightarrow B)$.

Solution Pour ce faire on identifie le nombre de propositions. Ici deux. On aura donc un tableau de $2^2 = 4$ lignes regroupant toutes les possibilités de vérité des ces deux propositions.

Puisque nous avons des connecteurs unaires et binaires, on crée des colonnes supplémentaires, autres que pour A et B, qui traitent deux colonnes précédemment écrites.

La dernière colonne représente, toujours, la proposition dont on cherche à évaluer la valeur de vérité.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

1.2.6 Exercices

1006. Construisez les tables de vérité des énoncés suivants :

(a) non (A ou B)

(b) non (A et B)

(c) non A ou non B

(d) A ou non B

(e) non B ou B

(f) non B et B

(g) A et (B ou C)

(h) (A et B) ou C

(i) non A ou B

1007. Une **tautologie** est un énoncé tel que sa table de vérité soit « vrai » quelles que soient les valeurs d'entrée. Une **contradiction** est un énoncé tel que sa table de vérité soit « faux » quelles que soient les valeurs d'entrée.

(a) Montrez que « A ou non A » est une tautologie.

(b) Créez une tautologie utilisant le connecteur « et ».

(c) Montrez que « A et non A » est une contradiction.

1.3 Types de raisonnement (2)

1.3.1 Objectifs

Comprendre les différents types de raisonnement utilisés dans les démonstrations mathématiques.

1.3.2 Raisonnement déductif et raisonnement inductif

On rappel certaines définitions de raisonnement

Définition 1.3.1 : Raisonnement

1. Le **raisonnement** est une activité de l'esprit qui passe, selon des principes déterminés, d'un jugement à un autre, pour aboutir à une conclusion. (Le Robert)
2. un **raisonnement**, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive par laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières : en ce sens, c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet selon l'ordre du temps. (Universalis 2009)
3. Le **raisonnement** est une activité mentale fondée sur une logique de la pensée qui permet à l'individu de construire une conclusion à partir d'éléments divers de connaissance. Le raisonnement est selon Leibniz « une combinatoire qui met en jeu des opérations : conjonction, disjonction, négation, implication,... ».

Le raisonnement **inductif** est celui par lequel on passe du particulier à l'universel ou plus précisément, de la connaissance des faits à celle des lois.
Il s'agit de généraliser des cas particuliers. D'un phénomène observé de manière répétitive, on va induire une loi générale (voir récurrence), sans vérifier tous les exemples.

L'induction extrait l'universel du particulier. Plus précisément, en mathématiques l'induction est utilisée quand il s'agti de faire émerger une conjecture après avoir traité des exemples.

Le raisonnement **déductif** est quant à lui l'inverse du précédent, c'est celui par lequel on tire des nouvelles propositions à partir des axiomes et propriétés démontrées.

Il y a d'autres manières de mener une réflexion afin de démontrer un énoncé. Ces autres manières utilisent l'un ou l'autre des types de raisonnement inductif ou déductif. En voici une liste, dont certains seront étudiés plus loin : **directe**, **contre-exemple**, **contraposée**, **disjonction de cas**, **par l'absurde**, **par analogie**, **raisonnement par récurrence**, utilisation du **principe des tiroir de Dirichlet**.

Quoi qu'il en soit, lorsqu'on écrit une démonstration, nous l'effectuons en plusieurs étapes. À chaque étape nous évaluons nos connaissances actuelles et déduisons ou induisons des lois ou des nouvelles propositions. La différence qu'il existe avec les autres types de raisonnement cités plus haut, sera décrite plus loin.

Pour terminer cette partie, on peut dire que le raisonnement **déductif** est intimement lié aux démonstrations **directes** en ce sens que pour démontrer l'énoncé, nous appliquons directement des connaissances afin de créer des nouvelles propositions. Quant au raisonnement **inductif**, il est intimement lié aux démonstrations **par récurrence**.

1.3.3 Exemples de raisonnement

Ci-après sont présentés des exemples de raisonnement **déductif** dans ce qu'on appelle un type de démonstration **directe**, qui s'appuie souvent sur l'application d'une définition ou d'un théorème.

Exemple 1.3.1

Proposition 1.3.1

Si n est un entier impair, alors n^2 est aussi un entier impair.

Solution Pour démontrer une propriété, on est obligé de comprendre tous les mots et les concepts mathématiques en jeu dans l'énoncé. Comme déjà évoqué en classe, le niveau de détail d'une preuve, autrement dit jusqu'où donne-t-on des rappels, dépend (en général) de l'audience. Nous supposons que les mots "somme", "somme de nombres entiers", "nombre pair", sont connus. Malgré cela, il est toujours bien de rappeler certaines définitions que nous utiliserons dans la démonstration.

Définition 1.3.2 : Entiers pair et impair

Un entier n est **pair** si $n = 2k$ pour un certain nombre entier k.

Un entier n est **impair** si $n = 2k+1$ pour un certain nombre entier k.

Démonstration. Comme il s'agit de montrer une propriété d'un nombre impair, on sait que, *par définition*, le nombre entier dont on parle doit s'écrire ainsi : $n = 2k+1$ pour un certain entier k.

Nous allons ensuite calculer son carré et en déduire la parité du carré. Alors calculons n^2 :

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1 \\ &= 2(2k^2+2k)+1 \\ \text{posons } m = (2k^2+2k) \text{ alors} \\ &= 2m+1 \end{aligned}$$

et comme m est un nombre entier (pourquoi ?), ce dernier résultat est, *par définition*, un nombre impair.
Nous avons donc montré que $n^2 = 2m+1$. C'est ce qu'il fallait démontrer. ∎

Exemple 1.3.2

Montrer que $n!$ est un nombre entier pair lorsque $n > 1$.

Solution Ici il faut faire attention à la formulation de l'énoncé.

En effet, la condition de la fin de la phrase doit être appliquée tout du long, c'est en fait une hypothèse de travail. En clair, l'énoncé dit que cette propriété s'applique seulement au nombres vérifiant cette condition. On se doit donc de la respecter. Ce qui arrive aux autres nombres, ne nous concerne pas.

Démonstration. Soit un nombre entier $n > 1$. Alors, par définition, la factorielle de k est

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Donc, $n!$ est donnée par le produit ci-dessous qui *alterne* les nombres pair et impairs :

$$n! = k \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Puisque $n > 1$, nous sommes assurés de ne jamais devoir calculer $1!$, ni $0!$ d'ailleurs, et que n commencera à 2. Donc, la présence d'au moins un nombre pair, fait de la factorielle de n, par définition de nombre pair, un nombre pair. ■

Voici un dernier exemple de démonstration, un peu plus compliquée.

Exemple 1.3.3

Théorème 1.3.1

Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(mb + nc)$ pour tout nombre entier m et n.

Solution Ici il faut avoir en tête la définition de ce qu'est "être divisible", la voici :

Définition 1.3.3 : Diviseur, divise

Un entier a **divise** l'entier b s'il existe un entier k tel que $b = k \cdot a$. Dans ce cas on dit que b est divisible par a et on écrit

$$a|b$$

On dit également que a est un **diviseur** de b.

Dans le cas où a ne divise pas b, on écrit $a\nmid b$.

Démonstration. On commence par exploiter l'hypothèse, c'est toute la partie de l'énoncé qui se trouve avant le mot-clé "alors".

Parce que les entiers b et c sont tous deux divisibles par a, par définition il existe deux autres nombres entiers k_1 et k_2 tels que $b = k_1 \cdot a$ et $c = k_2 \cdot a$.

Maintenant, on doit prendre deux autres entiers quelconques m et n pour "voir" si $(mb + nc)$ est divisible par a. Et on écrit : soient m et n deux entiers quelconques, alors

$$\begin{aligned} mb + nc &= m(k_1 a) + n(k_2 a) \quad \text{par hypothèse,} \\ &= (mk_1 + nk_2)a \quad \text{mise en évidence de } a \end{aligned}$$

Donc, puisque $mk_1 + nk_2$ est un entier, par définition on a montré que $mb + nc$ est divisible par a. C'est ce qu'il fallait démontrer. ∎

1.3.4 Exercices

Démontrer les énoncés suivants par la méthode directe.

1008. La somme d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est un nombre impair.
1009. Le produit de deux nombres entiers pairs est un nombre pair.
1010. Le produit de deux nombres entiers impairs est un nombre impair.
1011. Le produit d'un nombre entier pair et d'un nombre entier impair est pair.
1012. Le carré d'un nombre pair est un nombre entier pair.

1.4 Preuves directes et contre-exemples (3)

1.4.1 Objectifs

Apprendre à construire des preuves directes et comprendre les contre-exemples.

1.4.2 Décrire la preuve directe

Beaucoup d'énoncés mathématiques ont une structure utilisant l'"implication" logique vue un peu plus tôt dans ce cours. En effet, on peut toujours reformuler l'énoncé et voir qu'il s'agit en fait d'une implication.

Lorsqu'on prépare une démonstration, on utlise souvent le symbole logique "$\Longrightarrow$" pour pour exprimer la relation entre la partie "hypothèse" et la partie "conclusion" de l'implication.

Par exemple

$$n \text{ et } m \text{ sont des nombres pairs } \Longrightarrow n+m \text{ est un nombre pair}$$

Ainsi, l'énoncé considéré prend la forme "$A \Longrightarrow B$", où A et B sont des propositions.

En général, dans une preuve ce symbole n'est utilisé que dans la partie algébrique, partout ailleurs on utilise des mots en français. C'est une pratique courante en mathématiques : on écrit le plus clairement possible son raisonnement, en essayant de limiter les symboles mathématiques dans les phrases.

Les preuves que nous avons traité dans la section précédente, au sujet des nombres pairs/impairs sont des preuves **directes**. C'est une manière de prouver un énoncé du type "$A \Longrightarrow B$", en commençant par travailler sur A tout en se frayant un chemin vers B. Se donner les moyens d'atteindre B implique l'application de définitions ou de résultats précédents (d'autres théorèmes, par exemple).

Proposition 1.4.1

Proposition. $A \Longrightarrow B$.

Démonstration. On assume A.

"Expliquer ce que A veut dire" $\longleftarrow$ *appliquer définitions et/ou d'autres résultats*

$\vdots$

appliquer des techniques de l'algèbre et de la logique

$\vdots$

"Découvrir ce que B veut dire"

En conséquence B. ■

1.4.3 A quoi servent les contre-exemples et comment les trouver

Pour certains mathématiciens, le contre-exemple est considéré comme l'un des outils les plus importants. Le mathématicien suisse Leonard Euler, disait « Certains faits peuvent apparaître plus clairement par des exemples que par le biais d'une preuve. »

Bien que les exemples-types soient très utiles à la compréhension d'un concept, ici il ne s'agit pas de ce genre d'exemples.

Définition 1.4.1 : Contre-exemple

Un exemple qui montre qu'un énoncé est faux est appelé un **contre-exemple**.

En clair, si vous avez besoin de montrer qu'une conjecture est fausse, ne cherchez pas à le démontrer, vous n'y arriverez peut-être pas. Par contre, on peut très facilement montrer que l'énoncé en question est faux en exposant un exemple qui contredit l'affirmation. Par exemple

tous les nombres premiers sont impairs

est facilement réfutable : il suffit d'exposer le contre-exemple suivant : **2 est un nombre premier et il n'est pas impair**.

Lorsque l'on vous donne un énoncé à étudier, vous l'explorez en vous donnant des exemples qui fonctionnent. De la même manière, vous trouvez des exemples qui ne fonctionnent pas. En général, ces derniers ne fonctionnent pas parce qu'ils ne tiennent pas compte de toutes les conditions de l'énoncé.

Les contre-exemples se trouvent en cherchant, il n'y a pas de formule magique, c'est la pratique qui nous aguerri dans cet exercice. Créer des exemples et des contre-exemples est au début assez difficile et frustrant du fait que nos premières tentatives ne sont pas toujours les bonnes. Cependant, comme dit plus haut dans ce document, il est important de persévérer, car cette compétence est la clé de l'excellence en mathématiques.

La première chose que l'on fait lorsqu'on nous donne un exemple, c'est d'en trouver un autre. Cependant, une meilleure attitude est de ne pas s'arrêter là. C'est une bonne chose que d'être critique et ne pas croire *a priori* et de chercher un exemple qui contredit l'énoncé en question : chercher un **contre-exemple**.

Pour terminer, les énoncés de la forme $A \Longrightarrow B$, autrement dit « Si A alors B », ne peuvent pas être démontrés par des exemples particuliers, dans lesquels l'hypothèse et la conclusion seraient vraies. Au contraire, si nous pouvons trouver un seul exemple qui contredit l'énoncé, alors cet énoncé est faux.

Un **contre-exemple** permet de dégénéraliser ce qu'afirme un énoncé. Ce dernier peut-être vrai pour un nombre fini de cas, mais pas en général. A chque fois qu'un énoncé, qu'une conjecture affirme quelque chose de général, d'universel, cherchez en premier un contre-exemple, si vous n'en trouvez pas, essayez la démonstration.

1.4.4 Exemples de contre-exemples et de preuves directes

Exemple 1.4.1

Trouver un contre-exemple à l'énoncé

Le carré d'un nombre réel est positif.

Solution On essaie.

On se donne un $x \in \mathbb{R}$. Donnons quelques valeurs à x et calculons son carré :

$$x = 4 \longrightarrow x^2 = 16 \quad \checkmark \qquad x = -2{,}5 \longrightarrow x^2 = 6{,}25 \quad \checkmark$$
$$x = 0{,}5 \longrightarrow x^2 = 0{,}25 \quad \checkmark \qquad x = 17 \longrightarrow x^2 = 289 \quad \checkmark$$

Et il semblerait que tous les nombres soit positifs, soit négatifs, entiers ou pas sont des nombres positifs !

Sauf qu'il existe un nombre qui n'est ni positif ni négatif : le zéro. Donc, le contre-exemple est

$$x = 0 \longrightarrow x^2 = 0 \text{ qui n'est pas positif !}$$

Exemple 1.4.2

Déterminer si l'énoncé suivant est vrai ou s'il est faux : Soient a, b et c des nombres entiers, avec $a \neq 0$.

Si $a|bc$ alors $a|b$ ou $a|c$.

Solution On travaille avec les des nombres entiers, dont zéro et les nombres négatifs en font partie.

On a par exemple : $2|14$ et $14 = 2 \cdot 7$ et on voit bien que $2|2$.

Un autre exemple : $15|150$ et $150 = 15 \cdot 10$, donc on a aussi que $15|15$

Un autre exemple : $3|121$ et $111 = 3 \cdot 37$, ainsi on voit aussi que $3|3$, etc.

Mais il y a le contre-exemple : $6|6$ et comme $6 = 2 \cdot 3$ on voit bien que 6 ne divise pas 2 et que 6 ne divise pas 3.

Par ce contre-exemple nous avons montré que l'énoncé est faux, car il se veut général, et ne l'est pas, car il y au moins un cas où il est faux.

Exemple 1.4.3

Proposition 1.4.2

La somme de deux entiers impairs est paire.

Solution On voit assez clairement que la structure de cet énoncé est

Si A alors B

on applique donc la structure ci-dessus.

Démonstration. On assume deux entiers impairs m et n.

Par définition de "impair", ceci veut dire que $m = 2k + 1$ et $n = 2r + 1$ où k et r sont deux entiers.

Maintenant calculons la somme de m et n, on a :

$$\begin{array}{rcl} m+n & = & (2k+1)+(2r+1) \\ & = & 2k+2r+1+1 \\ & = & 2(k+r)+2 \\ & = & 2(k+r+1) \end{array}$$

Et on voit que par définition ce dernier résultat est un nombre pair, puisque $k + r + 1$ est un nombre entier.

En conséquence la somme $m + n$ est un nombre pair. ■

Exemple 1.4.4

Proposition 1.4.3

Sachant que x et y sont deux nombres positifs, si $x \geq y$ alors $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$.

Exemple un peu plus compliqué, mais en apparence seulement. La structure est toujours celle de l'implication. L'hypothèse est donc

"x et y des nombres réels positifs tels que $x \geq y$"

et la conclusion est

"$\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$"

Solution

Démonstration. Assumons que x et y sont des nombres réels positifs tels que $x \geq y$.

Alors, en soustrayant y des deux côtés de l'inégalité, cela veut dire que

$$x - y \geq 0$$

Comme nous voulons montrer un résultat impliquant la racine carrée, et puisque x et y sont tous deux positifs, on peut écrire $x = (\sqrt{x})^2$ et de même pour y, c'est-à-dire que $y = (\sqrt{y})^2$. En remplaçant dans l'inéquation ci-dessus cela donne :

$$(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 \geq 0$$

Ensuite, nous devons faire apparaître une expression sans les carrés. Il nous vient l'idée d'utiliser la bien connue identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$. Nous remplaçons a par $\sqrt{x}$ et b par $\sqrt{y}$ et l'inéquation ci-dessus devient :

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \geq 0$$

Puisque $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ est toujours positif, on peut diviser des deux côtés par ce nombre sans modifier le sens de l'inégalité, et on obtient :

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \geq 0$$

En on voit que le premier terme de la différence est plus grand ou égal au second.

En conséquence $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. ∎

1.4.5 Exercices

Trouver des contre-exemples et prouver des propositions simples.

1013. Les énoncés suivants sont tous faux. Trouver un contre-exemple pour chacun.
   (a) Soit $f(n) = n^2 - n + 5$. Si n est un nombre entier, alors $f(n)$ est un nombre premier.
   (b) Si x et y sont des nombres réels, alors $|x + y| = |x| + |y|$.
   (c) Si x est un nombre réel, alors $x^4 < x < x^2$.

1014. Montrer les énoncés suivants
   (a) Si n est un entier, alors $n^2 + n$ est pair.
   (b) Si n est un entier, alors $3n^2 + 5n + 1$ est impair.
   (c) Si n est un entier, alors $n^2 + 3n - 6$ est pair.
   (d) Si m et n sont des entiers, alors $7m - 3n$ est pair.

1.5 Evaluation (1)

1.5.1 Objectifs

Évaluer les concepts appris.

1.5.2 Champ de l'évaluation

Test écrit sur la logique, les types de raisonnement, les preuves directes et la création et utilisation de contre-exemples.

2.1 Preuve par contraposée (3)

2.1.1 Objectifs

Maîtriser la méthode de preuve par contraposée.

2.1.2 Définition et explications de la méthode

2.1.3 Exemples de preuve utilisant la contraposée

Exemple 2.1.1

Solution

2.1.4 Exercices

Écrire des démonstrations de propositions à l'aide de la méthode de la contraposée.

1015.

2.2 Preuve par l'absurde (3)

2.2.1 Objectifs

Apprendre ce qu'est la preuve par l'absurde.

2.2.2 Définition et explications de la méthode

2.2.3 Exemples de preuve par l'absurde

Exemple 2.2.1

Solution

2.2.4 Exercices

Écrire des démonstrations de propositions en utilisant la méthode par l'absurde.

1016.

2.3 Preuve par récurrence (3)

2.3.1 Objectifs

Comprendre et utiliser les preuves par récurrence.

2.3.2 Définition et explications de la méthode par récurrence

2.3.3 Exemples de preuve par récurrence

Exemple 2.3.1

Solution

2.3.4 Exercices

Écrire des démonstrations utilisant la méthode par récurrence (somme des n premiers entiers naturels, par exemple)

1017.

2.4 Evaluation (1)

2.4.1 Objectifs

Évaluer la maîtrise des différentes méthodes de démonstration.

2.4.2 Champ de l'évaluation

Test écrit sur la preuve par la contraposée, par l'absurde et par récurrence.

3.1 Combinaison de méthodes (3)

3.1.1 Objectifs

Savoir quand et comment combiner différentes méthodes de preuve.

3.1.2 Exemples de preuves nécessitant plusieurs méthodes

Exemple 3.1.1

Somme de nombres pairs est pair.

Solution

3.1.3 Stratégie pour choisir la bonne méthode

3.1.4 Exercices

Résoudre des problèmes en combinant les méthodes apprises

1018.

3.2 Preuves en géométrie (3)

3.2.1 Objectifs

Savoir appliquer les méthodes aux énoncés de la géométrie.

3.2.2 Les preuves en géométrie

3.2.3 Exemples de preuves en géométrie

Exemple 3.2.1

Solution

3.2.4 Exercices

Prouver des théorèmes de base en géométrie.

1019.

3.3 Preuves en algèbre (3)

3.3.1 Objectifs

Savoir appliquer les méthodes aux énoncés de l'algèbre.

3.3.2 Les preuves algébriques

3.3.3 Exemples de preuves algébriques (identités remarquables, etc.)

Exemple 3.3.1

Solution

3.3.4 Exercices

Prouver des identités algébriques.

1020.

3.4 Révision générale (4)

3.4.1 Objectifs

Revoir tous les concepts et méthodes apprises.

3.4.2 Séance de questions-réponses

3.4.3 Résumé des concepts et méthodes apprises

3.4.4 Exercices

Résoudre des problèmes récapitulatifs.

1021.