

Approximation de \sqrt{N}

Robinson Cartez

Une manière rapide de donner une approximation de la racine carrée de l'entier N est d'écrire

$$N = a^2 \pm r$$

et

$$\sqrt{N} \approx a \pm \frac{r}{2a}$$

où a , N et r sont des nombres entiers, tels que $r < 2a$. Le signe, le $+$ ou le $-$, dépend du carré parfait utilisé. Ici nous utilisons le signe $+$ pour plus de clarté.

On explique cela à l'aide de notions vues en cours : une **identité remarquable** (ou bien la **double distributivité**) et le fait que

le carré d'un nombre plus petit que 1 est plus petit que le nombre lui-même

ce qui s'écrit, au moyen de l'expression suivante :

$$\forall x > 0 \quad x^2 < x \Leftrightarrow x < 1$$

Pour l'identité remarquable, si on développe le carré de $a + \frac{r}{2a}$ alors on a

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{r}{2a}\right)^2 &= a^2 + 2a \cdot \frac{r}{2a} + \frac{r^2}{4a^2} \\ &= a^2 + r + \frac{r^2}{4a^2} \\ &\approx a^2 + r \end{aligned}$$

car, comme on a dit plus haut, $\frac{r}{2a} < 1$ et donc son carré est encore plus petit. Ainsi ce terme peut être supprimé, parce que nous cherchons une approximation.

En pratique, pour les entiers inférieurs à 100 (ça marche aussi avec les entiers supérieurs

à 100, mais il faut connaître plus de carrés parfaits.¹

Procédure

Trouver une approximation de $\sqrt{27}$

1. on cherche le carré parfait le plus proche de 27 (ce sera nôtre a^2), ici 25;
2. on calcule $r = N - a^2$, ici $r = 27 - 25 = 2$, donc $r = 2$;
3. on déduit a , ici $a = 5$;
4. on écrit l'approximation

$$\sqrt{27} \approx 5 + \frac{2}{10} = 5 + \frac{1}{5} = 5,2$$

La valeur donnée par la calculatrice est

$$\sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5,19615242271$$

et on voit que c'est une bonne approximation au dixième²!

Question

Sais-tu trouver une approximation de $\sqrt{18}$? Et de $\sqrt{138}$?

1. Un carré parfait est le carré d'un entier. Par exemple 25 est un carré parfait car il est le carré de 5. D'autres exemples sont 4, 9, 16, 36, 49 etc.

2. C'est-à-dire à une décimale après la virgule.