D'ou vient le 3 de la formule du volume de la pyramide ?

Robinson Cartez

Vous êtes-vous déjà posé la question du pourquoi on divisait par deux dans le calcul de l'aire du triangle ?

$$\text{Aire triangle} = \frac{\text{longueur base} \cdot \text{hauteur}}{2}$$

Avec un peu de patience on réussit à voir que ce que l'on fait pour calculer cette aire est de construire un parallélogramme à partir du triangle, puis on calcule l'aire de ce dernier et enfin on divise par deux pour avoir l'aire du triangle de départ. Bien sûr pour construire ce parallélogramme on "colle" littéralement un double du triangle d'origine, tourné de $180°$.

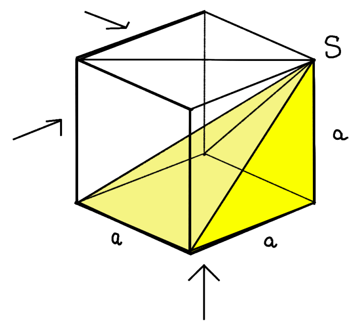
Et bien pour le volume de la pyramide c'est un peu la même chose. La seule différence c'est qu'on est en trois dimensions. Mais attendez, c'est alors parce que l'on est en trois dimensions que l'on doit diviser par trois ? Non, ce n'est pas aussi simple, ni évident au premier abord. Je vous propose de commencer par calculer l'aire d'une pyramide découpée dans un cube. Ensuite montrer que quelque soit l'endroit où se trouve le sommet de la pyramide, la formule ne change pas et ne dépends que de l'aire de la base et de la hauteur de la dite pyramide.

Ensuite on prendra une base différente, par exemple un triangle, puis un n-gone quelconque. Arrivés à ce stade, nous pouvons même pousser jusqu'à trouver la formule de l'aire du cône. Chemin faisant on trouvera aussi, pourquoi pas, une approximation de π, et finalement, montrer que si on a le volume du cône et celui du cylindre le contenant, on en tire le volume de la sphère.

Dans ce cube il y a trois pyramides de base carrée, de longueur a. Chaque base est signalée par une flèche et le sommet de toutes les pyramides est signalé par la lettre S.

Le volume de cette pyramide est

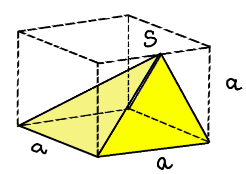
$$V = \frac{\text{aire base} \cdot \text{hauteur}}{3}$$



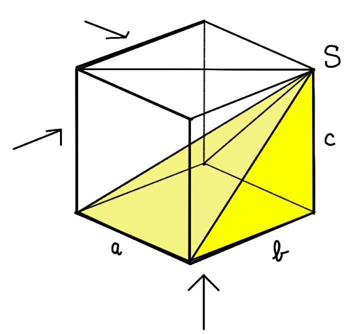
En effet, comme il y en a trois dans le cube, et que les trois sont issues du même sommet S, la somme des trois volume donne le volume du cube :

$$\frac{a^2 \cdot a}{3} \cdot 3 = a^3$$

Mais qu'en est-il si le sommet S bouge ? Parce que pour ces pyramides il est confondu avec un des sommets du cube.



On pourrait aussi se demander : "qu'est-ce qu'il se passe si au lieu d'un cube on avait un parallélépiède rectangle ?"

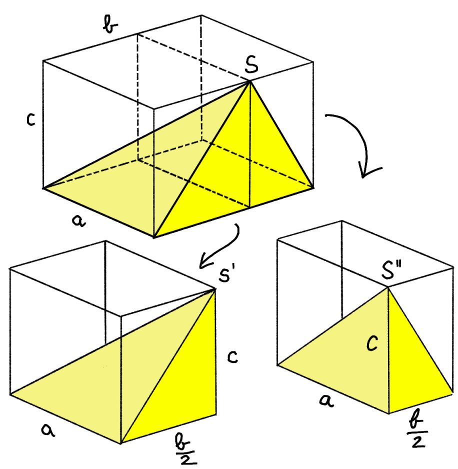


Mais calculons le volume du parallélépipède rectangle ci-dessus. On a que le volume total est la somme des volumes des trois pyramides de sommet S, donc $V = V_1 + V_2 + V_3$:

$$V_1 = \frac{a \cdot b \cdot c}{3}$$
$$V_2 = \frac{a \cdot c \cdot b}{3}$$
$$V_3 = \frac{b \cdot c \cdot a}{3}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = a \cdot b \cdot c$$

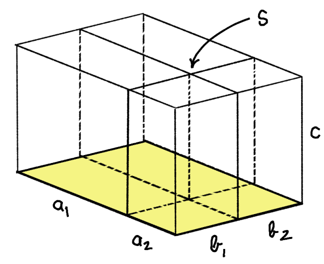
Il n'y a donc aucun problème tant que le sommet est sur une arête du volume. Mais illustrons le cas où le sommet S n'est pas sur une arête du volume :



$$\frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot 3} + \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot 3} = \frac{a \cdot b \cdot c}{3}$$

Le volume de chaque sous pyramide est une pyramide dans un parallélépipède rectangle ! En général donc, lorsque la base est un rectangle (carré y compris !) nous pouvons toujours utiliser la formule trouvée plus haut.

Maintenant, si le sommet de la pyramide est positionné au centre de la surface de la base, qui est toujours un rectangle pour l'instant, on découpe la pyramide en quatre sous pyramides ayant chacune le sommet sur une arête du parallélépipède qui l'englobe : on calcule le volume de chacune des quatre et on fait la somme :

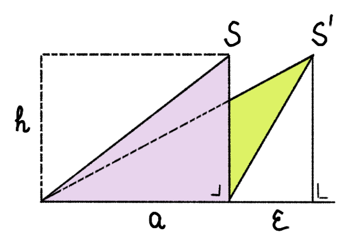


$$V_1 = \frac{a_2 \cdot b_1 \cdot c}{3} \qquad V_2 = \frac{a_2 \cdot b_2 \cdot c}{3}$$
$$V_3 = \frac{a_1 \cdot b_2 \cdot c}{3} \qquad V_4 = \frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c}{3}$$

Et donc

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \\ &= (a_2 \cdot b_1 \cdot c + a_2 \cdot b_2 \cdot c + a_1 \cdot b_2 \cdot c + a_1 \cdot b_1 \cdot c)\frac{1}{3} \\ &= \frac{c \cdot (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b2)}{3} \end{aligned}$$

Avant de passer aux pyramides à base triangulaires, supposons que le sommet S soit hors du prisme qui l'a englobé jusqu'à présent. Supposons qu'il soit déplacé en S', mais toujours à la même hauteur qu'en S. Dans ce cas, la formule reste la même et le volume ne dépend que de l'aire de la base fois la hauteur dvivisée par trois. Voici une vue latérale du solide :

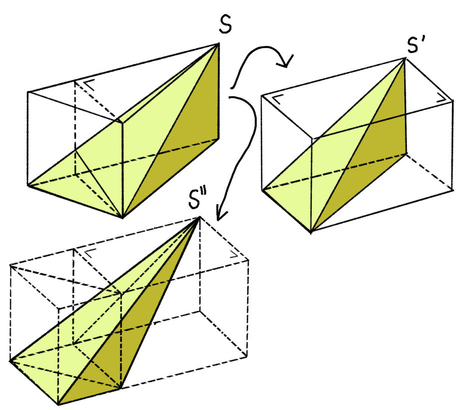


Dans ce qui suit la profondeur (b) n'est pas visible sur cette vue latérale. Pour le volume du solide ayant pour sommet S on a $V = \dfrac{a \cdot b \cdot h}{3}$, et pour le volume du solide ayant pour sommet S' on a $V' = V_1 - V_2$, où $V_1 = \dfrac{(a + \epsilon) \cdot b \cdot h}{3}$ et $V_2 = \dfrac{\epsilon \cdot b \cdot h}{3}$. Mais $V = V'$. En effet :

$$
\begin{aligned}
V' &= \frac{(a+\epsilon)\cdot b\cdot h}{3} - \frac{\epsilon\cdot b\cdot h}{3}\\
&= \frac{a\cdot b\cdot h}{3} + \frac{\epsilon\cdot b\cdot h}{3} - \frac{\epsilon\cdot b\cdot h}{3}\\
&= \frac{a\cdot b\cdot h}{3} = V
\end{aligned}
$$

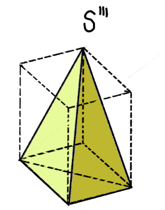
Donc, si le sommet S de la pyramide “sort” du domaine (aire) de la base, mais qu’il gade la même hauteur, c’est toujours la même formule qui est à l’oeuvre : Volume = Aide de la base fois la hauteur divisé par trois. Et, comme montré ci-dessus, il suffit de considérer un prisme droit étendu et de soustraire les volumes qu’il faut pour obtenir le volume de départ.

De même si la base n’est pas rectangulaire, on peut toujours inscrire la pyramide dans un prisme droit et procéder par ajout et soustraction de volumes afin d’obtenir le volume désiré. Dans tous ces cas, si le sommet reste à la même hauteur (pour les possibles volumes ajoutés), c’est la même formule, aire de la base fois la hauteur divisé par trois.



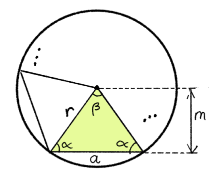
Dans la figure ci-dessus, le volume de sommet S équivaut au volume de sommet S' plus la moitié du volume de sommet S''. C’est un bon exercice de voir que ce dernier volume est égal à celui de sommet S''', illustré ci-après, dont le prisme droit a été construit sur la base de la partie gauche du volume de départ.

On va s’intéresser dans ce qui suit au volume d’un prisme droit ayant comme base un n-gone régulier (qui se construit sur un disque). Il



nous faut établir une formule pour l’aire de la base.

Soit donc un polygone régulier à n côtés chacun de longueur a. Calculons l’aire A_n :



$$
\beta = \frac{360}{n} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{180-\beta}{2} = 90 - \frac{180}{n}
$$

$$
\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{a}{2\cdot r} \Leftrightarrow r = \frac{a}{2\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}
$$

$$
\sin(\alpha) = \frac{m}{r} \Leftrightarrow m = \frac{a\cdot\sin\left(90-\frac{180}{n}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}
$$

$$
A_n = \frac{a}{2}\cdot n\cdot m \Leftrightarrow
$$

$$
A_n = \frac{n\cdot a^2\cdot\sin\left(90-\frac{180}{n}\right)}{4\cdot\sin\left(\frac{180}{n}\right)}
$$

Ainsi, le volume d’une pyramide de base un polygone régulier de n côtés de longueur a et de hauteur h est donné par la formule

$$
V_n = \frac{h\cdot n\cdot a^2\cdot\sin\left(90-\frac{180}{n}\right)}{12\cdot\sin\left(\frac{180}{n}\right)}
$$

Qui n’est autre que la formule que nous avons établi être vraie pour toute pyramide qui peut être inscrite dans un prisme droit, ce qui est le cas pour notre pyramide : elle peut être inscrite dans un prisme droit à n côtés.

Maintenant, si l'on augmente le nombre de côtés indéfiniment, on se rapproche de plus en plus du cône droit. "À la limite" ce volume serait égal au volume du cône. Autrement dit au volume du cylindre divisé par trois :

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Avec les notations qui précèdent, un bon exercice est de voir que, si l'on fixe le rayon r du n-gone régulier à l'unité, on a une approximation de π, et c'est une conjecture que de dire que

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{180}{n}\right) \sin\left(90 - \frac{180}{n}\right) \cdot n = \pi$$

Finalement, on a établit que, moyenant le passage à la limite ci-dessus, le volume du cône de hauteur h et de rayon r vaut le tiers du volume du cylindre de hauteur h et de rayon r. En continuant le travail d'analyse plus loin, on peut se demander que vaut le volume de la sphère de diamètre h contenue dans un cylindre de hauteur h et de rayon $\frac{h}{2}$? Serait-il possible que le volume de cette sphère soit égal aux $\frac{2}{3}$ du volume du cylindre décrit ci-avant ?